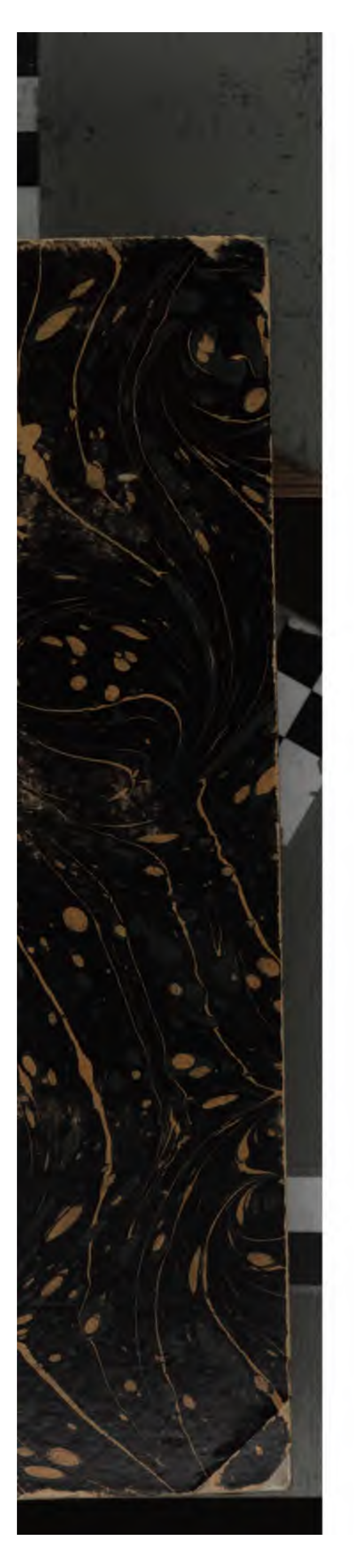
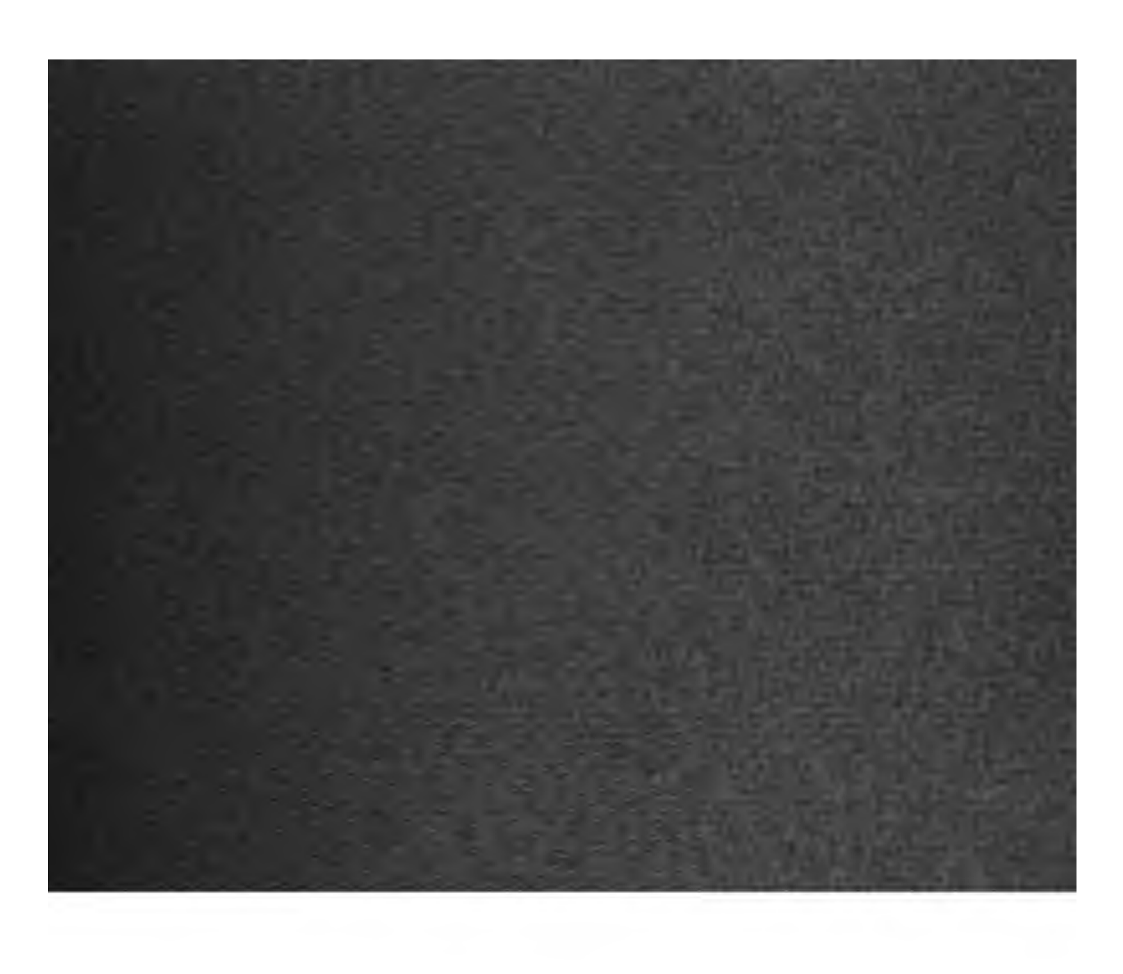
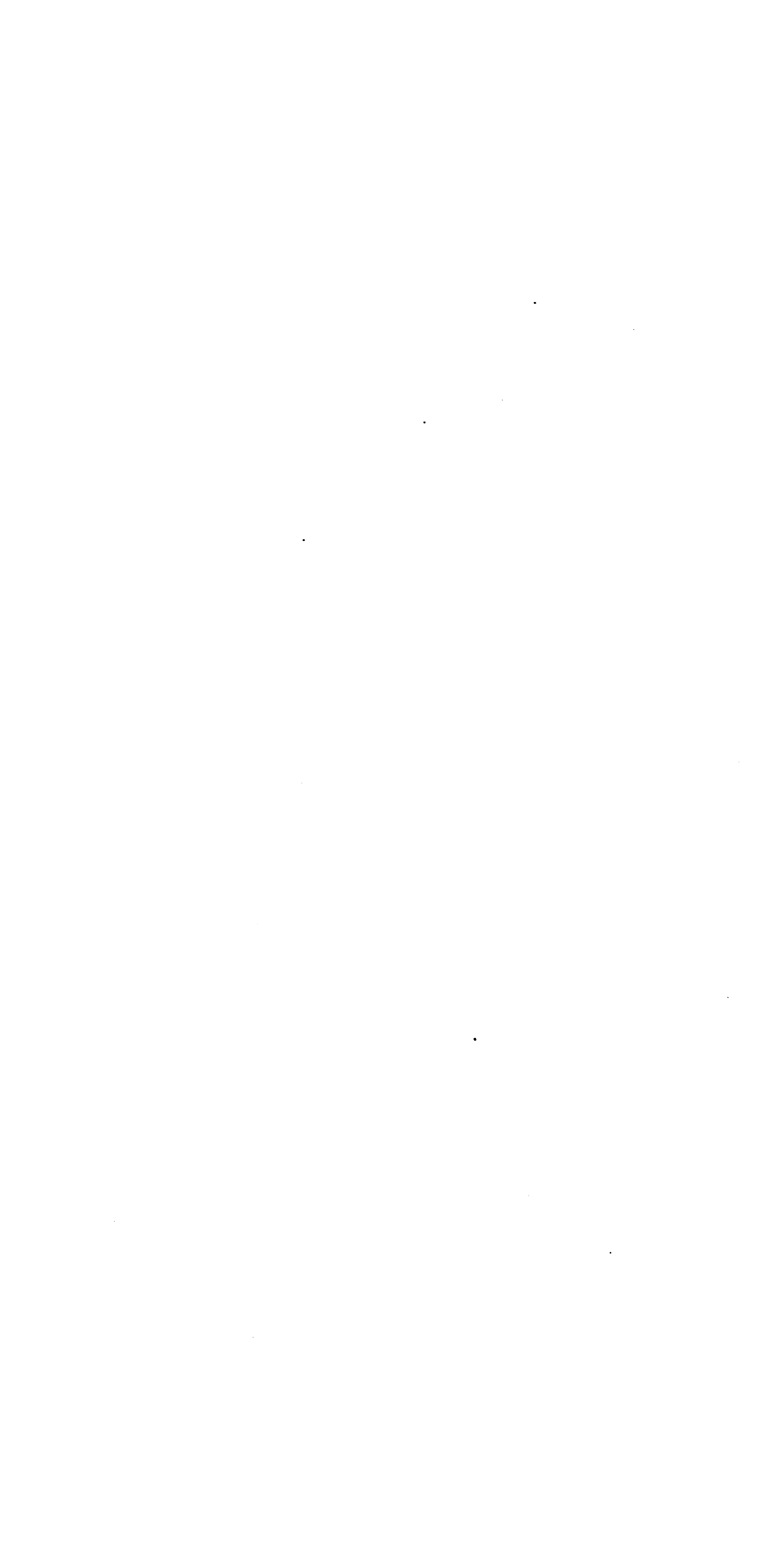
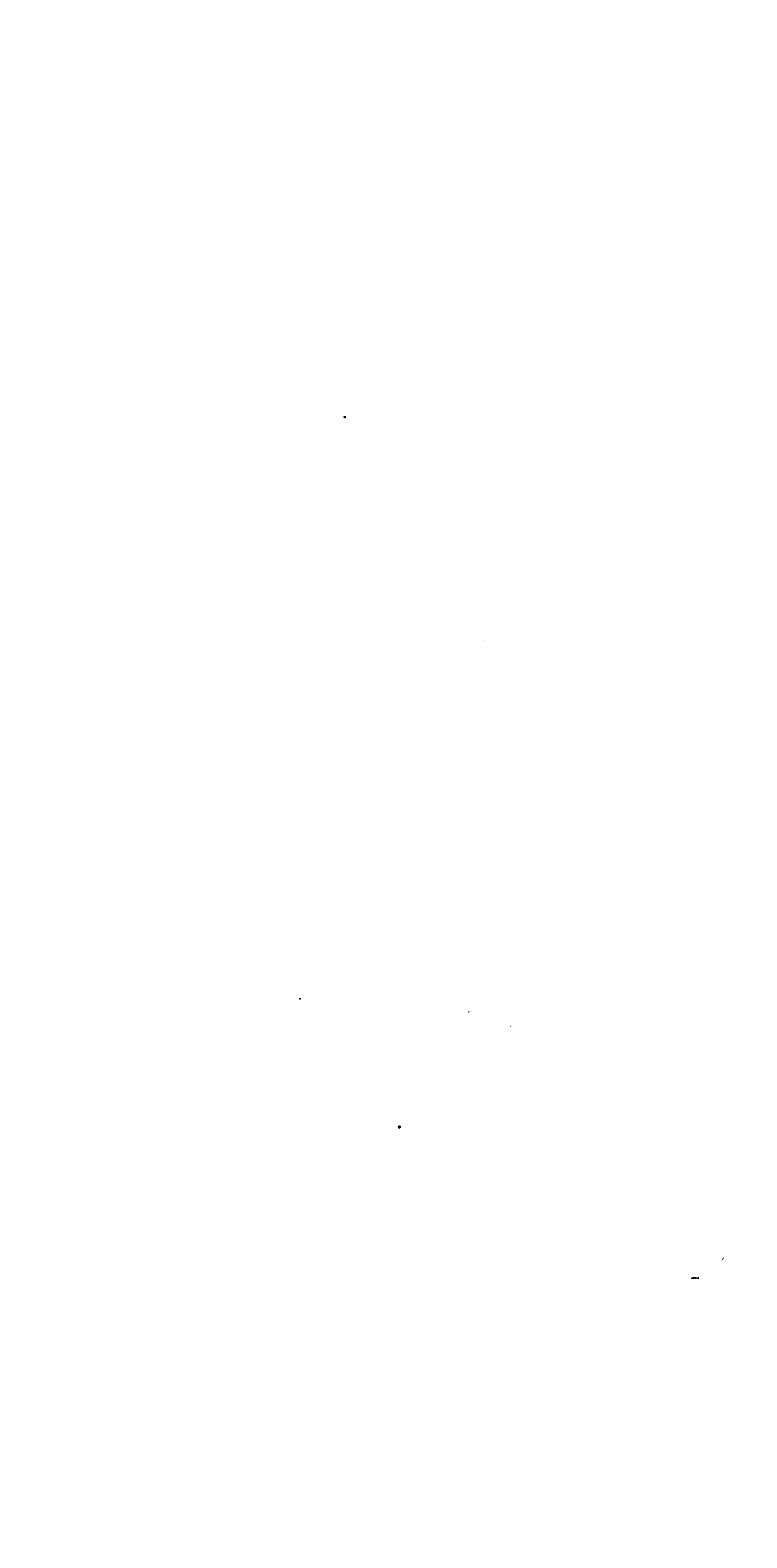










REPERTORIUM

DER LITERARISCHEN ARBEITEN

AUS DEM GEBIETE DER

REINEN UND ANGEWANDTEN MATHEMATIK

„ORIGINALBERICHTE DER VERFASSER“

GESAMMELT UND HERAUSGEGEBEN

VON

Dr. LEO KOENIGSBERGER, und Dr. GUSTAV ZEUNER,
Prof. d. Mathematik a. d. Univ. z. Wien — Prof. d. Mechanik a. d. Polytechnikum z. Dresden

ERSTER BAND.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1877.

Vorwort zum ersten Bande.

Indem die Unterzeichneten beim Erscheinen des ersten Bandes des Repertoriums nochmals auf den vor einem Jahre veröffentlichten Prospect und auf das dem ersten Hefte dieses Bandes beigegebene Vorwort verweisen, erlauben sich dieselben nur noch hinzuzufügen, dass Plan und Anlage des Unternehmens auch fernerhin beibehalten werden soll, so lange eine rege Theilnahme der Mathematiker, wie sie bis jetzt in erfreulichster Weise sich bekundet, eine Billigung des vorgesteckten Zieles und der bei der Gründung maassgebend gewesenen Motive erkennen lässt.

Wien-Dresden, am 15. Mai 1877.

Die Herausgeber.



L. Fuchs: Ueber die linearen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie.

(Borchardt's Journal Band 81 S. 97 sqq.)

1.

Es sei

$$(A) \qquad \frac{d^2u}{dz^2} + p_1 \frac{du}{dz} + p_0 u = 0$$

eine lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten, welcher eine Wurzel u der irreductiblen algebraischen Gleichung:

$$(1) \qquad A_m u^m + A_{m-1} u^{m-1} + \cdot \cdot + A_1 u + A_0 = 0\,,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von z sind, genügt, so genügen ihr die sämmtlichen Wurzeln derselben Gleichung (S. S. 100).

Besitzt die Gleichung (1) zwei Wurzeln u_1, u_2, deren Quotient nicht für jedes z constant ist, so bilden u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von Integralen, d. h. jedes Integral der Differenzialgleichung hat die Form $c_1 u_1 + c_2 u_2$, wo c_1, c_2 constant sind (s. die Abhandlung des Verfassers im 66. Bande des Borchardt'schen Journals No. 2*). Hieraus ergiebt sich, dass in diesem Falle die sämmtlichen Integrale der Differenzialgleichung algebraisch sind (S. S. 100).

Ist der Quotient je zweier Wurzeln der Gleichung (1) für jedes z constant, so hat sie die Form:

$$(1a) \qquad A_m u^m + A_0 = 0\,,$$

und die Differenzialgleichung wird durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt. — Dieser Satz wird (S. 100—101) aus einem allgemeineren auf S. 99 bewiesenen hergeleitet, welcher folgendermassen lautet: Besitzt die irreductible Gleichung (1) zwei Wurzeln u_1, u_2, deren Quotient eine rationale Function j von z, so ist j eine ganzzahlige Wurzel der Einheit.

---

*) Es sollen im Folgenden die Arbeiten des Verfassers im Borchardt'schen Journal einfacher durch blosse Angabe des Bandes, in welchem sie enthalten sind, bezeichnet werden.

Hiernach sind also, wenn die Differenzialgleichung (A) algebraische Integrale besitzt, zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Sie wird durch die Wurzel φ einer rationalen Funktion befriedigt. In diesem Falle ist es *möglich aber nicht nothwendig*, dass die Differenzialgleichung (A) noch ausserdem ein algebraisches Integral ψ besitzt, ohne dass $\frac{\psi}{\varphi}$ constant ist, dass also der Differenzialgleichung nur algebraische Integrale genügen. Tritt dieses ein, so hat die Differenzialgleichung ein Fundamentalsystem von Integralen, welches aus zwei verschiedenen Wurzeln rationaler Functionen besteht*).

2) Die Differenzialgleichung wird durch die Wurzeln einer irreductiblen algebraischen Gleichung befriedigt, von denen mindestens der Quotient zweier nicht für jedes z constant. In diesem Falle sind die sämmtlichen Integrale algebraisch.

Der mit 1) bezeichnete Fall ist leicht zu erledigen nach einem für lineare Differenzialgleichungen einer *beliebigen Ordnung* gültigen Verfahren. Sind nämlich $a_1, a_2, \cdot\cdot a_\varrho$ die sämmtlichen singulären Punkte einer solchen Differenzialgleichung, so hat eine ihr genügende Wurzel einer rationalen Funktion die Form:

$$u = (z - a_1)^{\alpha_1} (z - a_2)^{\alpha_2} \cdots (z - a_\varrho)^{\alpha_\varrho} g(z)\,,$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \cdot\cdot \alpha_\varrho$ rationale Zahlen, $g(z)$ eine ganze rationale Funktion bedeutet (S. 101). Es werden zunächst (S. 102) gewisse algebraische

*) Man erkennt dieses am einfachsten folgendermassen:

Nach (B. 66 No. 4) hat ψ in der Umgebung eines singulären Punktes a der Differenzialgleichung die Form

$$\psi = c_1 \varphi + c_2 (z - a)^\lambda \chi(z)\,, \tag{1}$$

wo c_1 und c_2 Constanten und $\chi(z)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von $z - a$ fortschreitende Reihe darstellt, welche für $z = a$ nicht verschwindet. Hieraus ergiebt sich, dass $\frac{d}{dz}\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)$ in der Umgebung eines jeden der singulären Punkte a mit einer Potenz von $z - a$ multiplicirt eindeutig wird. Da diese Function algebraisch und für alle übrigen endlichen Werthe von z eindeutig ist, so ist sie Wurzel einer rationalen Funktion. Bezeichnen wir dieselbe mit t, so ergiebt sich aus einem Satze von Abel (vergl. Liouville journal de l'école polytech. cah. 22 p. 131), dass

$$\frac{\psi}{\varphi} = \int t\,dz = \beta t + C\,,$$

wo β eine rationale Funktion und C eine Constante bedeutet. Demnach ist

$$\psi = \beta \varphi t + C\varphi\,. \tag{2}$$

Gleichungen rationale Wurzeln besitzen müssen, welche die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\varrho$ liefern. Alsdann hat ein bestimmtes System linearer Gleichungen endliche Lösungen zuzulassen, welche die Werthe der Coefficienten von $g(z)$ gewähren.

2.

Bei der Behandlung des Falles 2) voriger Num. ist es zweckmässig die Differenzialgleichung (A) durch die Substitution

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dz} \cdot y$$

in eine Differenzialgleichung

$$(B) \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = Py$$

zu verwandeln. Der Untersuchung werden gewisse aus einem Fundamentalsysteme von Integralen der Differenzialgleichung (B) y_1, y_2 gebildete Formen zu Grunde gelegt. Es sei nämlich η ein algebraisches Integral dieser Differen ialgleichung, welches einer irreductiblen Gleichung

$$(1) \qquad A_m y^m + A_{m-1} y^{m-1} + \cdots + A_0 = 0$$

mit rationalen Coefficienten genügt. Unter den Wurzeln derselben seien $\eta, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-1}$ so beschaffen, dass nicht der Quotient zweier derselben für jedes z constant ist, so wird ihre Gesammtheit (S. 111) als das *reducirte Wurzelsystem der Gleichung* (1) bezeichnet.

Das Product

$$\Pi = \eta \eta_1 \eta_2 \cdots, \eta_{n-1}$$

ist eine algebraische Funktion, welche für jeden Umlauf von z in sich selbst multiplicirt mit einer Einheitswurzel übergeht, d. h. Wurzel einer rationalen Funktion (S. 114). Andererseits ist η_i als Integral der Differenzialgleichung (B) der Form $c_{i1} y_1 + c_{i2} y_2$, wenn c_{i1}, c_{i2} Constanten bezeichnen. Demnach ist $\Pi = f(y_1, y_2)$ eine aus y_1, y_2 gebildete Form n^{ten} Grades. — Während also in dem Falle, dass die Differenzialgleichung (B) durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt wird, eine lineare Form $c_1 y_1 + c_2 y_2$ gleich der Wurzel einer rationalen Function ist, so sind in dem allgemeineren Falle, so fern die Differenzialgleichung nur algebraische Integrale hat, Formen höheren Grades gleich Wurzeln rationaler Functionen. — Der niedrigste Grad einer Form dieser Art werde mit N bezeichnet (S. 116). Es wird nachgewiesen (S. S. 123. Satz II), dass *die Zahl*

N niemals grösser als zwölf, und weiter (S. S. 126), dass sie eine gerade Zahl sei.

Bezeichnen wir den Complex aller Formen, welche Wurzeln rationaler Functionen aequivalent sind, mit Φ, so zeichnen sich unter diesen diejenigen aus, welche nur die Glieder des reducirten Wurzelsystems einer irreductiblen Gleichung als Factoren enthalten, welcher ein bestimmtes Integral genügt, und zwar diese Glieder alle und jeden zur ersten Potenz. Dieselben werden *Primformen* genannt (S. 114). Jede Form des Complexes Φ lässt sich in ein Product von Primformen zerlegen (S. 115). Die Zahl N ist auch der niedrigste Grad einer Primform (S. 116).

3.

Nach Ermittelung der eben angegebenen oberen Grenze für die Zahl N werden im Wesentlichen zwei Methoden angewendet, um über die Frage zu entscheiden, ob die Differenzialgleichung (B) algebraische Integrale habe oder nicht.

I. Methode.

Eine aus einem Fundamentalsysteme von Integralen der Differenzialgleichung (B) y_1, y_2 gebildete Form μten Grades genügt einer linearen Differenzialgleichung $\mu + 1$ ter Ordnung mit rationalen Coefficienten, welche in der Arbeit S. 129 als Differenzialgleichung (C) bezeichnet ist. Dieselbe ist übereinstimmend mit der linearen Differentialgleichung, welcher y^μ genügt, wo y ein beliebiges Integral der Differenzialgleichung (B) ist (S. 129—131).

Wird also die Differentialgleichung (B) nur durch algebraische Integrale befriedigt, so muss die Differenzialgleichung (C) für $\mu = N$, demnach, wenn nicht $N = 1$, d. h. schon der Differenzialgleichung (B) eine Wurzel einer rationalen Function genügt, *für einen der geradzahligen Werthe von μ die nicht die Zahl 12 übersteigen*, durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt werden (S. 131).

Erfolgt dieses für $\mu = 1$ oder für einen der angegebenen Zahlenwerthe von μ die grösser sind als 2, so hat auch *umgekehrt* die Differenzialgleichung (B) algebraische Integrale (S. 131). Dieser Satz ergiebt sich aus dem folgenden: Ist eine aus dem Fundamentalsysteme y_1, y_2 gebildete Form höheren als zweiten Grades und nicht Potenz einer Form zweiten Grades Wurzel einer rationalen Function, so hat die Differenzialgleichung (B) ein algebraisches Integral, ein Satz, welcher S. 127—128 bewiesen ist.

Hat aber die Differenzialgleichung (C) zuerst für $\mu = 2$ eine Wurzel φ einer rationalen Function zum Integral, so ist $\varphi(z)^2$ eine *rationale Funktion* und

$$\varphi(z)^2 \left[\left(\frac{d \log \varphi(z)}{dz}\right)^2 + 2\,\frac{d^2 \log \varphi(z)}{dz^2} - 4P\right]$$

eine constante Zahl λ. Ist nun

$$\lambda \int \frac{dz}{\varphi(z)}$$

gleich dem Logarithmus einer algebraischen Funktion, so sind die Integrale der Differenzialgleichung (B) algebraisch (S. 131). Der Beweis dieses Satzes gründet sich auf die S. 117—118 gemachten Entwickelungen.

Hiermit ist die Untersuchung der Frage, wie die Differenzialgleichung (B) beschaffen sein müsse, um algebraische Integrale zu besitzen, bis auf die Betrachtung von $\int \frac{dz}{\varphi(z)}$, die im letztangegebenen Falle nöthig wird, auf die in No. 1 dieser Notiz angeführte Aufgabe zurückgeführt, nämlich zu bestimmen, unter welchen Umständen eine lineare Differenzialgleichung durch die Wurzel einer rationalen Funktion befriedigt wird, d. h. nach S. 102 zu untersuchen, ob ein bestimmtes System linearer Gleichungen endliche Lösungen zulässt.

Es wird (S. 132—134) nachgewiesen, dass bei der Anwendung dieser Methode die Differenzialgleichung (C) nicht aufgestellt zu werden braucht, dass man vielmehr ein derselben gleichbedeutendes sich unmittelbar darbietendes System von Differenzialgleichungen der Rechnung zu Grunde legen kann.

II. Methode.

Diese stützt sich auf Entwickelungen, welche der Verfasser im Bande 75 des Borchardt'schen Journals S. 208 sqq. in Bezug auf die Coefficienten der linearen homogenen Relationen gegeben hat, durch welche die zu den verschiedenen singulären Punkten einer linearen Differenzialgleichung gehörigen Fundamentalsysteme derselben mit einander verbunden werden; Einwirkungen, durch welche diese Coefficienten aus den in den Coefficienten der Differenzialgleichung enthaltenen Constanten bestimmt werden.

Indem nun (S. 138—140) direct die Einwirkungen der verschiedenen Umläufe von z, als eben so vieler mit einem Fundamentalsysteme y_1, y_2 ausgeführter linearer Substitutionen, auf eine

aus y_1, y_2 gebildete Form untersucht werden, erhalten wir ein gewisses System von Gleichungen zwischen den Coefficienten jener linearen Relationen, den Coefficienten der Primform niedrigsten Grades, und den in P enthaltenen Constanten. Es lässt sich demnach bestimmen, wie diese Constanten beschaffen sein müssen, damit die Differenzialgleichung (B) algebraische Integrale besitze.

Der Verfasser bemerkt jedoch (S. 141), dass die erste Methode vor dieser den Vorzug besitze, die endgültige Entscheidung auf ein System *algebraischer linearer* Gleichungen zurückzuführen, während die zweite Methode die Untersuchung *transscendenter* Gleichungen erforderte. Indessen wo die Gesetze dieser transscendenten Funktionen sich einer ähnlichen Einfachheit erfreuen wie die Gauss'schen Π-Funktionen, könne diese Methode nicht ohne Vortheil angewendet werden.

Ist umgekehrt die Differenzialgleichung (B) *gegeben*, und soll entschieden werden, ob diese algebraische Integrale besitzt, so lässt die zweite Methode Vereinfachungen zu (S. S. 141—142), indem gelehrt wird eine Tabelle von ähnlicher Beschaffenheit aufzustellen, wie die auf S. 126, und die Relationen zwischen den zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsystemen auf dieselbe anzuwenden.

4.

Es ist in No. 2 dieser Notiz das Resultat erwähnt worden, dass die Zahl N nicht grösser als 12 sei. Dasselbe ist eine unmittelbare Folge von Entwickelungen, welche sich auf die Eigenschaften derjenigen algebraischen Funktionen, welche der Differenzialgleichung (B) genügen, und die Natur der binären Formen, welche aus einem Fundamentalsysteme y_1, y_2 derselben überhaupt beziehen (S. 102 —126). Die hauptsächlichen Elemente dieser Entwickelungen sind die folgenden:

Sind die sämmtlichen Integrale der Differenzialgleichung (B) algebraisch, so ist jedes Integral derselben eine rationale Funktion von z und einem beliebigen anderen Integrale (S. 107).

Wenn ein algebraisches Integral y auf einem gewissen Wege in yj übergeht, wo j constant, so ist j eine primitive ganzzahlige $l$te Wurzel der Einheit, es ist l Divisor des Grades m der irreductiblen algebraischen Gleichung, welcher y genügt, und jedes Integral hat die Form

$$(\alpha' + \beta' c_1)y + \beta' y^{l-1}\psi(y^l),$$

worin α', β' Constanten, $\psi(y^l)$ eine ganze rationale Funktion von y^l vom Grade $\frac{m}{l} - 1$ mit in z rationalen Coefficienten bedeutet. Die Grösse c_1 ist ebenfalls constant, wenn $l > 2$ (S. 108).

Die Function

$$y^{l-1}\psi(y^l)$$

ist ebenfalls ein Integral der Differenzialgleichung (B) (S. 108—109).

Ist $F(y)$ ein Integral, welches nicht gleich y multiplicirt mit einer Constanten und

1) $$(\alpha) \quad F(y) = \beta' y^{l-1}\psi(y^l) \quad (\beta' \text{ constant}),$$

so sind die Glieder der Reihe

$$(\beta) \quad F(y),\ F(yj),\ F(yj^2),\ \ldots,\ F(yj^{l-1})$$

nur um constante Factoren verschieden.

2) Ist $F(y)$ nicht der Form (α) und l eine ungerade Zahl, so ist kein Glied der Reihe (β) gleich einem anderen multiplicirt mit einer Constanten.

3) Ist $F(y)$ nicht der Form (α) und l eine gerade Zahl, so ist kein Glied der Reihe

$$(\gamma) \quad F(y),\ F(yj),\ F(yj^2),\ \ldots,\ F\left(yj^{\frac{l}{2}-1}\right)$$

gleich einem anderen multiplicirt mit einer Constanten. Dagegen ist

$$F\left(yj^{\frac{l}{2}+i}\right) = -F(yj^i) \quad \text{(S. 110—111).}$$

Der Grad m der irreductiblen algebraischen Gleicheng, welcher ein algebraisches Integral der Differenzialgleichung (B) genügt, ist für alle Integrale unverändert derselbe. Man kann daher mit Recht m den zur Differenzialgleichung (B) gehörigen Grad nennen (S. 111).

Ist $y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ das reducirte Wurzelsystem einer irreductiblen algebraischen Gleichung $m$ten Grades, welcher das Integral y genügt, und $j, j_1, j_2 \ldots$, die Zahlen, mit welchen irgend welche der Glieder dieses Systems multiplicirt die anderen Wurzeln derselben Gleichung reproduciren, so sind diese Zahlen Einheitswurzeln. Sie seien resp. $l$te, $l_1$te, $l_2$te, ..., primitive Wurzeln der der Einheit, und unter den Zahlen $l, l_1, l_2, \ldots, l$ die grösste, so ist l ein Multiplum von $l_1, l_2, \ldots$, und es liefert das System:

$$y_i,\ y_ij,\ y_ij^2,\ \ldots,\ y_ij^{l-1} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (S. 111—113).

Die Zahl l wird der *Index* des reducirten Wurzelsystems ge-

nannt, es ist also das Product aus der Gliederzahl des reducirten Wurzelsystems in den Index desselben gleich dem Grade der Gleichung (S. 113).

Von jeder Form des in No. 2 dieser Notiz mit Φ bezeichneten Complexes gilt der Satz, dass sie alle solche Linearfactoren, welche zusammen das reducirte Wurzelsystem einer irreductiblen Gleichung bilden, gleich oft enthält (S. 115).

Gehört eine Form dem Complexe Φ an, so gehört auch jede Covariante derselben dem Complexe Φ an (S. 106).

Die Hesse'sche Covariante einer Primform niedrigsten Grades ist ebenfalls eine Primform (S. 116).

Die Linearfactoren einer Primform niedrigsten Grades bilden ein reducirtes Wurzelsystem mit kleinster Gliederanzahl N. Es wird der Index desselben mit L (S. 115) bezeichnet.

Es sei η ein Linearfactor einer Primform niedrigsten Grades $\Phi(y_1, y_2)$, ζ irgend ein Factor der Hesse'schen Covariante $\Psi(y_1, y_2)$ derselben. Ist

$$(\delta)\quad \zeta = \beta' \eta^{L-1} \psi(\eta^L),$$

wo β' constant und

$$\psi(\eta^L) = c_0 + c_1 \eta^L + \cdots + c_{(N-1)L} \cdot \eta^{(N-1)L},$$

so ist $N = 4$ (S. 119).

Ist kein ζ Factor der Form (δ), und $N > 2$, und setzt man $\lambda = \frac{L}{2}$ oder L, je nachdem L gerade oder ungerade, so ist λ Divisor von $2N - 4$ (S. 121) und $\Psi(y_1, y_2)$ der Form

$$(\varepsilon)\quad \Psi(y_1, y_2) = C[\beta_1^\lambda y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1} L_1^\lambda \cdot y_1^\lambda][\beta_2^\lambda y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1} \alpha_2^\lambda y_1^\lambda] \cdots [\beta^\lambda_{\lambda'} y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1} \cdot \alpha^\lambda_{\lambda'} y_1^\lambda]$$

$\lambda' = \frac{2N-4}{\lambda}$ (S. 122).

Die Hesse'sche Covariante $\Psi_1(y_1, y_2)$ der Hesse'schen Covariante $\Psi(y_1, y_2)$ hat die Form

$$\Psi_1(y_1, y_2) = (y_1 y_2)^{\lambda-2} \Psi_1'(y_1^\lambda, y_2^\lambda),$$

wo $\Psi_1'(y_1^\lambda, y_2^\lambda)$ nur solche Potenzen von y_1, y_2 enthält, deren Exponenten Vielfache von λ sind (S. 122).

Die Zahl λ ist kleiner als 6 (S. 122).

Die Zahl N ist nicht grösser als 12 (S. 123).

Die Covarianten niedrigern als Nten Grades einer Primform niedrigsten Grades müssen identisch verschwinden (S. S. 98).

Mit Hülfe der Eigenschaften der Primformen niedrigsten Grades wird eine Tabelle für die möglichen Gestalten derselben hergeleitet (S. 123—126), aus welcher sich namentlich ergiebt, dass N von den die Zahl 12 nicht übersteigenden Werthen nur die geradzahligen annehmen kann.

5.

Zum Schluss noch einige besondere Resultate, welche zeigen, wie man in concreten Fällen aus den in der Arbeit entwickelten Principien einfache Mittel der Entscheidung gewinnen kann, ob die Differenzialgleichung (B) algebraische Integrale hat.

Sind die Integrale der Differenzialgleichung (B) sämmtlich algebraisch, so gehört sie zu der Klasse der Differenzialgleichungen (12) No. 4 der Arbeit in B. 66, und es müssen die Wurzeln der zu den einzelnen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen nach (B. 66 No. 6 II) rationale Zahlen sein (s. S. 104 der vorl. Arbeit). Ist dieses erfüllt, und irgend einer der Nenner dieser auf ihre kleinste Benennung gebrachten Zahlen grösser als 10, so besitzt die Differenzialgleichung (B) kein algebraisches Integral, wenn nicht diese selber oder die Differenzialgleichung (C) für $\mu = 2$ durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt wird (S. S. 134—135).

Sind die Nenner derselben Zahlen sämmtlich von den Zahlen 1, 2, 4 verschieden, und wird die Differenzialgleichung (C) für $\mu = 2$ durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt, so genügt der Differenzialgleichung (B) entweder überhaupt kein algebraisches Integral oder die Wurzel einer rationalen Function (S. 135—136).

Sind sämmtliche Nenner gleich 2, ferner $\frac{\delta_i}{n_i}$ die in algebraischem Sinne grössere der beiden Wurzeln $\frac{\delta_i}{n_i}$, $1 - \frac{\delta_i}{n_i}$ der zum singulären Punkt a_i gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, endlich y_{i1} das zu $\frac{\delta_i}{n_i}$ als Exponent gehörige Integral (s. B. 66 No. 5), und setzt man voraus, dass für alle singulären Punkte der Coefficient von $(z - a_i)^{-\delta_i - 1}$ in der Entwickelung von $\frac{1}{y_{i1}^2}$ nach steigenden Potenzen von $z - a_i$ verschwindet, so wird die Differenzialgleichung (B) durch die Quadratwurzel einer rationalen Function befriedigt (S. S. 137—138).

Heidelberg. L. Fuchs.

F. Klein: Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst. (Mathematische Annalen IX. p. 183—209.)

Die von Riemann in die Functionentheorie eingeführte Vorstellung, die Werthe einer complexen Variabeln nicht durch die Punkte der Ebene sondern durch die Punkte der Kugel zu repräsentiren, wird im gegenwärtigen Aufsatze dazu verwerthet, gewisse algebraische Formen zu studiren, zu denen namentlich diejenigen gehören, die, im Sinne dieser Repräsentation, durch die Ecken der regulären Körper vorgestellt werden. Der Verf. ist zu diesen Untersuchungen indirect, durch Probleme der projectiven Geometrie geführt worden. Er hatte sich mit der allgemeinen projectiven Massbestimmung beschäftigt (Ueber die sog. Nicht-Euklidische Geometrie, Math. Ann. IV, VI) und insbesondere die bez. Bewegungen betrachtet, vermöge deren die zugehörige fundamentale Fläche zweiten Grades in sich übergeführt wird. Wenn man diese Fläche insbesondere als eine Kugel voraussetzt, so zeigte sich, dass die genannten Transformationen der Fläche in sich mit denjenigen übereinstimmen, welche sie erfährt, wenn man die im Riemann'schen Sinne über die Kugel ausgebreitete complexe Variable beliebigen linearen Transformationen unterwirft.

So im Besitze eines neuen Mittels zur Untersuchung der linearen Transformationen einer einzelnen Variablen, stellte sich der Verf. die Aufgabe:

Alle endlichen Gruppen zu construiren, welche aus derartigen Transformationen zusammengesetzt sind,

und dann ferner:

Diejenigen algebraischen Formen, welche durch die Transformationen einer solchen Gruppe in sich übergeführt werden, soweit es durch blosse Anwendung der geometrischen Anschauung gelingen wollte, nach verschiedenen Richtungen zu untersuchen.

Es sei hier nur angegeben, dass die gesuchten Gruppen wesentlich durch diejenigen Bewegungen vorgestellt werden können, welche die regulären Körper in sich überführen. Die Ecken der letzteren geben daher ausgezeichnete Beispiele der in der zweiten Fragestellung verlangten Formen. — Von ihnen untersucht der Verf. insbesondere eine der zwölften Ordnung, welche durch die Ecken des regulären *Ikosaeder's* repräsentirt wird. Es gelingt ihm, das Formensystem, welches im Sinne der Invariantentheorie der betr. Form zugehört, durch wesentlich geometrische Mittel erschöpfend

anzugeben. Er discutirt sodann den Affect der Auflösbarkeit der betr. Gleichung und giebt insbesondere Resolventen sechsten und fünften Grades an (die eine sehr einfache geometrische Bedeutung haben). Die dabei auftretenden Formeln stimmen merkwürdigerweise, wenn man von der Bedeutung der vorkommenden Grössen und der aus ihr hervorgehenden Ableitung der Formeln absieht, genau überein mit Formeln, welche von Kronecker, Hermite und bes. Brioschi bei Untersuchungen über die Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades gegeben worden sind, so dass die letzteren in der hier gegebenen Theorie eine durchaus anschauliche und selbst elementare Interpretation finden.

Noch sei der an verschiedenen Stellen der vorliegenden Arbeit hervorgehobene und präcisirte Umstand genannt, dass die regulären Körper als Bilder algebraischer Formen, freilich bei anderen Fragestellungen aber unter zum Theil ähnlichen Gesichtspunkten, durch Schwarz betrachtet worden sind (Borch. Journ. Bd. 75).

Endlich mag einer einfachen Darstellung des Formensystems der binären cubischen und biquadratischen Form gedacht werden, welche in § 4 der vorliegenden Arbeit abgeleitet wird, nachdem sie der Verf. bereits früher (Programmschrift, Erlangen 1872) mitgetheilt hatte. Die Verschwindungspunkte einer binären cubischen Form werden durch drei aequidistante Punkte des Kugeläquators vorgestellt; die cubische Covariante ist dann durch die drei diametral gegenüberliegenden Punkte, die Hesse'sche Form durch Nord- und Südpol gegeben. Um die biquadratische Form zu repräsentiren, gehe man von der zugehörigen Covariante sechsten Grades aus. Sie kann vorgestellt werden durch die sechs Durchstosspunkte der Kugel mit einem concentrischen, rechtwinkligen Axenkreuze. Die vier Punkte der Grundform, sowie die vier Punkte der Hesse'schen Form erhalten mit Bezug auf dasselbe eine symmetrische Anordnung.

München. F. Klein.

L. Schläfli: Correzione alla Memoria intitolata; quand'è che dalla superficie generale di terz'ordine si stacca un pezzo rientrante? (Annali di matematica t. 6.)

Ein Briefwechsel mit Herrn Felix Klein in München über die unpaarige Natur der Ebene in Bezug auf den für geometrische Zwecke etwas veränderten Riemann'schen Begriff des Zusammenhanges machte mir klar, dass die unbegrenzte Ebene sich ähnlich

verhält wie das mit einer einzigen Randcurve versehene endliche Stück einer Ebene, wenn man sich nicht entschliessen will, jeden Punkt der Ebene doppelt zu zählen, jenachdem er ihrer Oberseite oder ihrer Unterseite angehört. Ich sah nun ein, dass ich in einer in den Annali di Matematica veröffentlichten und im September 1872 geschriebenen Abhandlung über die Anzahl der Zusammenhangsarten, welche jeder der fünf Arten der allgemeinen Fläche dritten Grades besonders zukömmt, alle fünf Zusammenhangszahlen um 1 zu gering angesetzt hatte, und dass sie in 7, 5, 3, 1, — 1 zu verbessern sind. Wohl spät nach der gewonnenen Einsicht und nachdem Herr Klein schon längst seine Ansichten von der Sache veröffentlicht hatte, schrieb ich wegen dieser Verbesserung im September 1875 den oben angezeigten kleinen Artikel.

Bern. L. Schläfli.

P. Gordan: Das Formensystem binärer Formen. (Teubner 1875.)

Im 69. Bde. des Borchardt'schen Journals habe ich den Beweis gegeben, dass es für jede binäre Form eine endliche Anzahl von Covarianten und Invarianten giebt, durch welche sich alle übrigen als *ganze* Functionen ausdrücken lassen; oder, wie ich mich ausdrückte, dass das Formensystem einer binären Form endlich ist. Seit jener Zeit bemühte ich mich, die hierbei eingeschlagenen Methoden möglichst zu vereinfachen und den Zusammenhang zwischen allen Formenbildungen zu ergründen. Besonders war es mir darum zu thun, in dem gewonnenen System alle überflüssigen Formen auszuscheiden und das *kleinste* Formensystem zu erhalten. Dieser Plan ist mir nicht gelungen, ich erreichte vielmehr nur eine engere Umgrenzung meines Systems, indem ich eine Reihe von Formen durch andre ausdrückte, welche früher für irreducibel galten.

Den Satz über die Endlichkeit der Formensysteme kann ich für Formen mit mehr als 2 Variabeln *allgemein* nicht beweisen, doch gilt er für alle quadratischen Formen und ausserdem für die cubischen und biquadratischen ternären. — Alle meine Untersuchungen gehen im Wesentlichen von der Darstellung der Invarianten durch symbolische Producte aus. Clebsch hat nämlich (vergl. seine „Invarianten binärer Formen“ Teubner) den Beweis geliefert, dass alle Invarianten und Covarianten sich als Aggregate symbolischer Determinantenproducte darstellen lassen. Nach diesem

Satze bedurfte es nur einer Ausbildung der Rechnung mit Symbolen, um Beziehungen zwischen Invarianten und Covarianten aufzustellen. Von wesentlichem Einfluss hierauf waren die Untersuchungen von Formen mit mehreren Reihen Veränderlicher. Jede binäre Form mit 2 Reihen Veränderlicher lässt sich (vergl. Clebsch's Buch) in eine endliche Reihe entwickeln, deren Glieder Polaren von Formen mit einer Reihe Variabeln sind. Die Invarianten und Covarianten von Formen mit mehreren Reihen Veränderlicher sind daher simultane Invarianten und Covarianten von Formen mit einer Reihe Veränderlicher.

Eine binäre Form mit 3 Reihen Variabler lässt sich auf mehrere Weisen als Summe von Polaren darstellen; vergleicht man dieselben unter einander, so gelangt man zu Relationen zwischen symbolischen Producten, welche in andrer Weise nur schwer zu erhalten sind. Diess ist das Verfahren, welches ich fast immer angewandt habe, um zu prüfen, ob sich eine Form durch andre ausdrücken lasse. Eine volle Sicherheit gewährt es allerdings nicht, eine solche ist aber auch in nächster Zeit von keiner andern Methode zu erwarten.

Wie in früheren Arbeiten die Formen 5. und 6. Grades, so hatte ich hier besonders die vom 7. Grade im Auge; ich habe alle diejenigen Covarianten und Invarianten des Systems der Form:

$$f = a_x^7$$

angegeben, welche sich nicht durch Symbole der quadratischen Covariante:

$$(f, f)^6 = a_x b_x (ab)^6$$

ausdrücken lassen. Die übrigen entstehen dadurch, dass man die gefundenen Formen mit dieser Covariante in bekannter Weise combinirt. Ihre Anzahl ist sehr gross und es ist mir nicht gelungen, die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen aufzustellen.

Erlangen. P. Gordan.

M. Brioschi: Sur une formule de transformation des fonctions elliptiques. (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences — 9 Novembre 1874 No. 19, 25 Janvier 1875. No. 4.)

In una delle lettere dirette da Jacobi a Legendre, pubblicate alcuni anni ora sono dal Sigr. Bertrand*), nelle quali quell'

*) Annales de l'École Normale Supérieure. T. VI. Année 1869. Borchardt, Journal für Mathematik. Band 80.

illustre geometra, con una semplicità e con una modestia ammirabili, confidava al fondatore della teoria delle funzioni elittiche le sue scoperte sulla trasformazione delle funzioni stesse, si leggono le seguenti parole:

„Vous auriez voulu que j'eusse donné la chaine des idées qui „m'a conduit à mes théorèmes. Cependant la route que j'ai suivie „n'est pas susceptible de rigueur géomètrique. La chose étant „trouvée, on pourra y substituer une autre sur laquelle on aurait „pu y parvenir rigoureusement. Ce n'est donc que pour vous, Mon„sieur, que j'ajoute le suivant."

„La première chose que j'avais trouvée (dans le mars 1827) „c'était l'équation $T = V\frac{dU}{dx} - \frac{dV}{dx}$: de là je réconnus que pour un „nombre n quelconque, la transformation était un problème d'Analyse „algébrique *déterminé*, le nombre des constantes arbitraires égalant „toujours celui des conditions. Au moyen des coefficients indéter„minés, je formai les transformations relatives aux nombres 3 et 5. „L'équation du quatrième dégré à laquelle me mena la première ayant „presque la même forme que celle qui sert à la trisection, j'y soup„çonnais quelque rapport. Par un tatonnement heureux, je rémar„quais dans ces deux cas l'autre transformation complémentaire pour „la multiplication. Là j'écrivis ma première lettre à Mr. Schu„macher, la méthode étant générale et verifiée par des exemples*)".

Nel primitivo concetto e nei risultati dapprima ottenuti la trasformazione delle funzioni elittiche per quindi considerata come un problema di analisi algebrica. Anche Abel nella sua memoria — *Solution d'un problème générale concernant la transformation des fonctions elliptiques* — essendosi posto il problema „Trouver tous „les cas possibles dans lesquels on pourra satisfaire à l'équation „differentielle:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1 - c_1^2 y^2)(1 - e_1^2 y^2)}} = \pm a \frac{dx}{\sqrt{(1 - c^2 x^2)(1 - e^2 x^2)}}$$

„en mettant pour y une fonction algébrique de x rationnelle ou „irrationelle" aggiunge: „La méthode qui s'offre d'abord pour ré„soudre le problème dans le cas où y est rationelle est celle des „coefficients indéterminés; or on serait bientôt fatigué à cause de „l'extrème complication des équations à satisfaire**)".

---

*) Lettera 3. porta la data di Koenigsberg — 12 Aprile 1828.

**) Abel: Oeuvres complètes. T. 1. pag. 253.

Sebbene però egli non ricorra al metodo dei coefficienti indeterminati, la via da lui addottata nel S. 3. del suo — *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques**) — allo scopo di stabilire la „Propriété générale de la fonction rationnelle $y = \psi(x)$ qui satisfait à une équation de la forme:

$$\frac{dy}{\Delta'(y)} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta(x)} \text{“}$$

essendo basata sulla considerazione di una proprietà delle radici della equazione $y = \psi(x)$, può dirsi appartenga ancora all' analisi algebrica.

Eisenstein ritornava due volte sull' argomento nelle sue — *Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen* — cioè al capitolo III. — *Fernere Bemerkungen zu den Transformationsformeln* — ed al capitolo V. — *Ueber die Differenzialgleichungen, welchen der Zähler und der Nenner bei den elliptischen Transformationsformeln genügen***) — applicando in conclusione tanto nell'uno che nell'altro caso il metodo dei coefficienti indeterminati; limitandosi però in questi lavori come in altri ad esporre il concetto piattosto che a svilupparlo ed a renderlo fecondo.

Lo scopo delle due Note la una presentata all' Accademia delle scienze col titolo — *Sur une formule de transformation des fonctions elliptiques* — era appunto quello di mostrare come con piccola difficoltà si possano determinare le formole generali di trasformazione pel caso di n numero primo per mezzo di sole considerazioni di analisi algebrica. — Jo aveva già seguando la stessa via pubblicate nell' anno 1864***) alcune formole per la moltiplicazione le quali conducono a quelle trovate in altro modo dal Sigr. Kiepert nella sua memoria — *Wirkliche Ausführung der ganzzahligen Multiplication der elliptischen Funktionen*†), — ed aveva anche dimostrato l'uso delle medesime in alcuni problemi geometrici.

Nelle ricerche più recenti ho addottato come forma canonica dell' integrale elittico la:

$$(1) \qquad \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

---

*) Abel: Oeuvres complètes. T. 1. pag. 372.

**) Eisenstein: Mathematische Abhandlungen, Seite 159, 207. — Enneper: Elliptische Funktionen, Theorie und Geschichte S. 382.

***) Sur quelques formules pour la multiplication des fonctions elliptiques. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. 7. Novembre 1864. No. 19.

†) Borchardt, Journal für Mathematik. Band 76. 1873. Seite 21.

nella quale g_2, g_3 sono gli invarianti di una forma binaria biquadratica $f(x_1, x_2)$. È noto che il Sigr. Hermite*) giunse a quella forma trasformando l'integrale:

$$\frac{x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1}{\sqrt{f(x_1, x_2)}}$$

per mezzo della:

$$xf(x_1, x_2) + h(x_1, x_2) = 0$$

essendo h l'hessiano della forma f.

Dalla (1) ponendo $x = -\frac{1}{2}z$, $g_2 = 3s$, $g_3 = -t$ si ottiene, facendo astrazione da un coefficiente costante, l'altra forma canonica dell' integrale elittico:

$$\frac{dz}{\sqrt{2t + 3sz - z^3}}$$

che incontrasi nelle ricerche geometriche sulle curve piane del terzo ordine.

Supponendo:

$$\frac{dy}{\sqrt{4y^3 - G_2 y - G_3}} = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

le proprietà della funzione razionale $y = \psi(x)$ che soddisfa alla equazione superiore sono le seguente:

1. Essendo n numero primo, si ha:

$$y = \frac{U}{T^2}$$

nella quale U è un polinomio del grado n, e T un polinomio del grado $\frac{n-1}{2} = \nu$.

2. Ponendo $\varphi(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3$, e:

$$T = x^\nu + a_1 x^{\nu-1} + a_2 x^{\nu-2} + \ldots + a_\nu$$

si ottiene per U il valore seguente:

(2) $U = \varphi(x)(T'^2 - TT'') - \frac{1}{2}\varphi'(x)TT' + [(2\nu+1)x + 2a_1]T^2$

essendo

$$T' = \frac{dT}{dx}, \quad T'' = \frac{d^2T}{dx^2}.$$

3. Posto:

$$U = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots + \alpha_n$$

e:

(3) $V = \varphi(x)(U'^2 - UU'') - \frac{1}{2}\varphi'(x)UU' + [(2n+1)x + 2\alpha_1]U^2$

---

*) Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées. Journal de Crelle. T. 52.

si ha la equazione identica:

$$(4)\qquad V - xU^2 + \tfrac{1}{2} G_2 UT^2 + G_3 T^4 = 0$$

dalla quale si deducono i valori delle indeterminate a_1, a_2, ... a_ν, G_2, G_3. Le calcolazioni occorenti sono della più grande facilità vista la relazione di forma esistente fra i polinomj U, V. Per $n = 3$ si hanno le relazioni modulari:

$$a_1^4 - \frac{1}{2} g_2 a_1^2 + g_3 a_1 - \frac{1}{48} g_2^2 = 0,$$

$$G_2 = 120 a_1^2 - 9 g_2\,; \qquad G_3 = -280 a_1^3 + 42 g_2 a_1 - 27 g_3,$$

per $n = 5$:

$$a_1^6 - 5 g_2 a_1^4 + 40 g_3 a_1^3 - 5 g_2^2 a_1^2 + 8 g_2 g_3 a_1 - 5 g_3^2 = 0,$$

$$a_2 = \frac{1}{6a_1}(a_1^3 + \tfrac{1}{2} g_2 a_1 - g_3),$$

$$G_2 = \frac{1}{a_1}(80 a_1^3 - 39 g_2 a_1 + 40 g_3)\,; \quad G_3 = -140 a_1^3 + 112 g_2 a_1 - 195 g_3.$$

Queste formole speciali furono già calcolate dal Sgr. Müller nella sua dissertazione inaugurale — *De transformatione functionum ellipticarum* — (1867) giovandosi delle proprietà delle funzioni periodiche.

Dimostrasi facilmente come le relazioni (2), (3), (4) risolvano il problema qui considerato. Posto infatti

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad \Phi(y) = 4y^3 - G_2 y - G_3$$

si ha:

$$\log y' = \tfrac{1}{2} \log \Phi(y) - \tfrac{1}{2} \log \varphi(x)$$

per la quale:

$$y'' \varphi(x) + \tfrac{1}{2} y' \varphi'(x) = \tfrac{1}{2} \Phi'(y)$$

e da questa;

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' \varphi(x) + \tfrac{1}{2} \frac{y'}{y} \varphi'(x) = 2y + \frac{1}{2y} G_2 + \frac{1}{y^2} G_3\,.$$

Ma se $y = \frac{U}{T^2}$ sostituendo si ha:

$$\varphi(x)\left[\left(\frac{U'}{U}\right)' - 2\left(\frac{T'}{T}\right)'\right] + \tfrac{1}{2}\varphi'(x)\left[\frac{U'}{U} - 2\frac{T'}{T}\right]$$
$$= 2\frac{U}{T^2} + \tfrac{1}{2} G_2 \frac{T^2}{U} + G_3 \frac{T^4}{U^2}$$

la quale, osservando essere $\alpha_1 = 2a_1$, riducesi, per le relazioni (2) (3), alla equazione identica (4).

Milano. M. Brioschi.

A. Cayley: On the geometrical representation of Cauchy's theorems of Root-limitation. (From the Cambridge Philosophical Transactions, Vol. XII, Part. II.)

There is contained in Cauchy's Memoir „calcul des indices des fonctions“, journ. de l'école polytech. t. XV (1837) a general theorem, which, though including a well-known theorem in regard to the imaginary roots of a numerical equation, seems itself to have been almost lost sight of. In the general theorem (say Cauchy's two-curve theorem) we have in a plane two curves $P = 0$, $Q = 0$, and the real intersections of these two curves, or say the „roots“, are divided into two sets according as the Jacobian

$$d_x P \,.\, d_y Q - d_x Q \,.\, d_y P$$

is positive or negative, say these are the Jacobian-positive and the Jacobian-negative roots: and the question is to determine for the roots within a given contour or circuit, the difference of the numbers of the roots belonging to the two sets respectively.

In the particular theorem (say Cauchy's rhizic theorem) P and Q are the real part and the coefficient of i in the imaginary part of a function of $x + iy$ with, in general, imaginary coefficients (or, what is the same thing, we have

$$P + iQ = f(x + iy) + i\varphi(x + iy),$$

where f, φ are real functions of $x + iy$): the roots of necessity are of the same set: and the question is to determine the number of roots within a given circuit.

In each case the required number is theoretically given by the same rule, viz., considering the fraction $\frac{P}{Q}$, it is the excess of the number of times that the fraction changes from $+$ to $-$ over the number of times that it changes from $-$ to $+$, as the point (x, y) travels round the circuit, attending only to the changes which take place on a passage trough a point for which P is $= 0$.

In the case where the circuit is a polygon, and most easily when it is a rectangle the sides of which are parallel to the two axes respectively, the excess in question can be actually determined by means of an application of Sturm's theorem successively to each side of the polygon, or rectangle.

In the present memoir I reproduce the whole theory, presenting it under a completely geometrical form, viz. I establish between the two sets of roots the distinction of *right-* and *left*-handed: and

(availing myself of a notion due to Prof. Sylvester) I give a geometrical form to the theoretic rule, making it depend on the „intercalation“ of the intersections the two curves with the circuit: I also complete the Sturmian process in regard to the sides of the rectangle; the memoir contains further researches in regard to the curves in the case of the particular theorem; or say as to the rhizic curves $P=0$, $Q=0$.

The general theory may be explained as follows:

Consider in a plane two curves $P=0$, $Q=0$ (P and Q each a rational and integral function of x, y), which to fix the ideas I call the *red* curve and the *blue* curve respectively (it is assumed throughoud that the two curves have no points, or at least no real points, of multiple intersection; i. e. they nowhere touch each other, and neither curve passes trough a multiple point of the other curve), the curve $P=0$ divides the plane into two sets of regions, say a positive set for each of which P is positive, and a negative set for each of which P is negative: it is of course immaterial whiche set is positive and which negative, since writing $-P$ for P the two sets would be interchanged: but taking P to be given, the two sets are distinguished as above. And we may imagine the negative regions to be coloured red, the positive ones being left uncoloured, or say they are white. Similarly the curve $Q=0$ divides the plane into two sets of regions, the negative regions being coloured blue, and the positive ones being left uncoloured, or say they are white. Taking account of the twofold division, and considering the coincidence of red and blue as producing black, there will be four sets of regions, which for convenience may be spoken of as *sable*, *gules*, *argent*, *azure*: viz. in the figures we have

$\overbrace{P \quad Q}$
$- \; -$ sable, shown by cross lines
$- \; +$ gules, „ „ vertical lines
$+ \; +$ argent, left white
$+ \; -$ azure, shown by horizontal lines,

sable and argent ($- \, -$ and $+ \, +$) being thus positive colours, and gules and azure ($- \, +$ and $+ \, -$) negative colours.

Consider any point of intersection of the two curves. There will be about this point four regions, sable and argent being opposite to each other, as also gules and azure; whence selecting an order

sable, gules, argent, azure;

if to have the colours in this order we have to go about the point, or root, right-handedly, the root is right-handed: but if left-handedly, then the root is left-handed: or, what is more convenient, going always right-handedly, then, if the order of the colours is

sable, gules, argent, azure,

the root is right-handed; but if the order is

sable, azure, argent, gules,

the root is left-handed.

The distinction of rigth- and left-handed corresponds to the sign of the Jacobian

$$\frac{d(P, Q)}{d(x, y)} = (d_x P \,.\, d_y Q - d_x Q \,.\, d_y P),$$

and we may (reversing if necessary the original sign of one of the functions) assume that for a right-handed root the Jacobian is positive, for a left-handed one, negative.

I consider a trajectory which may be either an unclosed curve not cutting itself or else a circuit, viz. this is a closed curve not cutting itself. A circuit is considered as described right-handedly: an unclosed trajectory is considered as described according to a currency always determinate *pro hâc vice*: viz. one extremity is selected as the beginning and the other as the end of the trajectory: but the currency may if necessary or convenient be reversed: thus if an unclosed trajectory forms part of a circuit the currency is thereby determined: but the same unclosed trajectory may form part of two opposite circuits and as such may have to be taken with opposite currencies. It is assumed that a trajectory does not pass through any intersection of the P and Q curves.

A trajectory has its P- and Q-sequence, viz. considering in order its intersections with the two curves, we write down a P for each intersection with the red curve and a Q for each intersection with the blue curve, thus obtaining an intermingled series of P's and Q's, which is the sequence in question. In the case of a circuit, the sequence is considered as a circuit, viz. the first and last terms are considered as contiguous, and it is immaterial at what point the sequence commences. The sequence will of course vanish if the trajectory does not meet either of the curves.

A P- and Q-sequence gives rise to an „intercalation", viz. if in the sequence there occur together any even number of the same letter these are omitted (whence also any odd number of the same letter is reduced to the letter taken once): and if by reason of an

omission there again occur an even numbre of the same letter these are omitted: and so on. The intercalation contains therefore only the letters P and Q alternately: viz. in the case of an unclosed trajectory the intercalation may contain an even number of letters beginning with the one and ending with the other letter, and so containing the same number of each letter — or it may contain an odd number of letters, beginning and ending with the same letter, and so containing one more of this than of the other letter; say the intercalation is PQ or QP, or else PQP or QPQ. The intercalation may vanish altogether, thus is the sequence were $QPPQ$ this would be the case.

In the case of a circuit the intercalation cannot begin and end with the same letter, for these, as contiguous letters, would be omitted; and since any letter thereof may be regarded as the commencement it is PQ or QP indifferently. A little consideration will show that the whole number of letters must be evenly even, or, what is the same thing, the number of each letter must be even. Thus imagine the circuit beginning in sable, and let the intercalation begin with PQ; viz. P we pass from sable to azure, and Q we pass from azure to argent; in order to get back into sable we must either return the same way (Q argent to azure, P azure to sable), but then the sequence is $PQQP$, and the intercalation vanishes; here the number of letters is 0, an evenly even number; or else we must complete the cycle of colours P argent to gules, Q gules to sable; and the sequence and therefore also the intercalation then is $PQPQ$, where the number of letters is 4, an evenly even number.

In the case of any trajectory whatever, the half number of letters in the intercalation is termed the „index", viz. this is either an integer or an integer $+ \frac{1}{2}$. But in the case of a circuit the index is an even integer, and the half-index is therefore an integer. The index may of course be $= 0$.

But we require a further distinction; instead of a P- and Q-sequence we have to consider a $\pm P$- and Q-sequence. To explain this observe that a passage over the red curve may be from a negative to a positive colour (azure to sable or gules to argent), this is $+ P$, or from a positive to a negative colour (sable to azure or argent to gules), this is $- P$. And so the passage over the blue curve may be from a negative to a positive colour (gules to sable or azure to argent), this is $+ Q$, or else from a positive to

a negative colour (sable to gules or argent to azure), this is $-Q$. The sequence will contain the P and Q intermingled in any manner, but the signs will always be $+\ -$ alternately; for $+\ (P$ or $Q)$, denoting the passage into a positive colour, must always be immediately succeded by $-\ (P$ or $Q)$, denoting the passage into a negative colour. Whence, knowing the sequence independently of the signs, we have only to prefix to the first letter the sign $+$ or $-$ as the case may be, and the sequence is then completely determined.

Passing to a $\pm$ intercalation, observe that in omitting any even number of P's or Q's, the omitted signs are always $+ - + - \cdots$ or else $- + - + \cdots$, viz. the omitted signs begin with one sign and end with the opposite sign. Hence the signs being in the first instance alternate, they will after any omission remain alternate; and the letters being also alternate, the intercalation can contain only $+P$ and $-Q$ or else $-P$ and $+Q$. Hence in the case of a circuit the intercalation is either $(+P-Q)$, say this is a *positive* circuit, or else $(-P+Q)$, say this is a *negative* circuit. There is of course the *neutral* circuit $(PQ)_0$, for which the intercalation vanishes.

Consider a circuit not containing within it any root; as a simple exemple let the circuit lie wholly in one colour, or wholly in two adjacent colours, say sable and gules: in the former case the sequence, and therefore also the intercalation, vanishes: in the latter case the sequence is $+Q-Q$, and therefore the intercalation vanishes: viz. in either case the intercalation is $(PQ)_0$.

Consider next a circuit containing within it one right-handed root; for instance let the circuit lie wholly in the four regions adjacent to this root, cutting the two curves each twice; the sequence and therefore also the intercalation is $+\mathrm{P}-Q+P-Q$; viz. this is a positive circuit $(+P-Q)_1$, where the subscript number is the half index, or half of the number of P's or of Q's. Similarly if a circuit contains within it one left-handed root, for instance if the circuit lies wholly in the four regions adjacent to this root, cutting the two curves each twice, the sequence and therefore also the intercalation is $-P+Q-P+Q$, viz. this is a negative circuit $(-P+Q)_1$: and the consideration of a few more particular cases leads easily to the general and fundamental theorem:

A circuit is positive $(+P-Q)_\delta$ *or negative* $(-P+Q)_\delta$ *according as it contains within it more right-handed or more left-handed*

roots; and in either case the half-index δ is equal to the excess of the number of one over that of the other set of roots. If the circuit is neutral $(PQ)_0$, then there are within it as many left-handed as right-handed roots.

Consider now $F(z) = (z, 1)^n$ a rational and integral function of z, of the order n with in general imaginary (complex) coefficients, or, what is the same thing, let $F(z) = f(z) + i\varphi(z)$, where the functions f, φ are real*). Writing herein $z = x + iy$ let P, Q be the real part and the coefficient of the imaginary part in the function $F(x + iy)$: or, what is the same thing, assume

$$P + iQ = f(x + iy) + i\varphi(x + iy)\,,$$

then it is clear that to any root $\alpha + i\beta$ (real or imaginary) of the equation $F(z) = 0$, there corresponds a real intersection, or root, $x = \alpha$, $y = \beta$, of the curves $P = 0$, $Q = 0$. The functions P, Q as thus serving for the determination of the roots of the equation $F(z) = 0$ are termed „rhizic functions“ and similarly the curves $P = 0$, $Q = 0$ are „rhizic curves“. The assumed equation shows at once that we have

$$d_y(P + iQ) = i d_x(P + iQ)\,,$$

or, what is the same thing,

$$d_y P = -d_x Q\,, \quad d_x P = d_y Q\,.$$

And we hence see that

$$\frac{d(P, Q)}{d(x, y)} = (d_x P)^2 + (d_y P)^2, \text{ or } (d_x Q)^2 + (d_y Q)^2$$

is positiv: viz. that the roots $P = 0$, $Q = 0$ are all of them right-handed (the essential thing is that they are same-handed; for by reversing the signs of P and Q they might be made left-handed: but it is convenient to take them as right-handed): hence the theorem — which in the general case, P and Q arbitrary functions, serves to determine the difference of the number of the right and left-handed roots — in the particular case, where P and Q are rhizic functions serves to determine the number of intersections of the curves $P = 0$,

---

*) It is assummed that the equation $F(z) = 0$ has no equal roots: this being so, the curves $P = 0$, $Q = 0$ will have no point of multiple intersection; which accords with the assumption made in the general case of two arbitrary curves.

$Q = 0$: or, what is the same thing, the number of the (real or imaginary) roots of the equation $F(z) = 0$, viz. we thus determine the number of roots within a given circuit.

Cambridge. A. Cayley.

A. Mayer: Directe Begründung der Theorie der Berührungstransformationen. (Math. Annalen VIII. p. 304—312.)

Nach der Definition von Lie bilden die $2n+1$ Gleichungen:

$$z' = Z, \quad x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i$$

eine Berührungstransformation, so oft $Z, X_1, \ldots X_n, P_1, \ldots P_n$ solche Functionen der $2n+1$ unabhängigen Variabeln $z, x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n$ sind, dass identisch

$$(1) \qquad dZ - \sum_{i=1}^{i=n} P_i dX_i = \varrho\left(dz - \sum_{i=1}^{i=n} p_i dx_i\right)$$

wird. Aus dieser Forderung ergibt sich eine Reihe charakteristischer Relationen für die Functionen Z, X, P, die von Lie gefunden wurden, indem er die in der Bedingung (1) enthaltene Aufgabe als einen speciellen Fall des Pfaff'schen Problems auffasste und auf dieselbe die Resultate anwandte, die Clebsch für das letztere Problem gewonnen hat. Die vorliegende Note lehrt, wie man auch ganz direkt aus der Formel (1) die in Rede stehenden Relationen ableiten kann.

Bezeichnet man durch das Zeichen

$$\frac{d}{dx_k}$$

die Operation

$$\frac{\partial}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial}{\partial z}$$

und setzt:

$$[\Phi\Psi] = \sum_{h=1}^{h=n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p_h}\frac{d\Psi}{dx_h} - \frac{d\Phi}{dx_h}\frac{\partial\Psi}{\partial p_h}\right),$$

so sind diese, zur Erfüllung der Forderung (1) nothwendigen und hinreichenden Relationen die folgenden:

$$[ZX_k] = [X_iX_k] = [X_kP_i] = [P_iP_k] = 0,$$
$$[P_kX_k] = \varrho, \quad [ZP_k] = -\varrho P_k$$

und es zeigt sich, dass das Problem (1) nur noch von der Auflösung endlicher linearer Gleichungen abhängt, so oft man $n+1$

von einander unabhängige Functionen $Z, X_1, \dots X_n$ gefunden hat, die paarweise den Gleichungen

$$[ZX_k] = 0, \quad [X_i X_k] = 0$$

genügen.

Verbindet man diese Resultate mit der Cauchy'schen Integrationsmethode der partiellen Differenzialgleichungen 1. Ordnung, welche, wenn man jetzt $p_1, \dots p_n$ als die Differenzialquotienten der unbekannten Function z nach $x_1, \dots x_n$ ansieht, die vollständige Integration der gegebenen Gleichung

$$X_1 = \text{const.}$$

zurückführt auf die Ermittelung aller Lösungen F der linearen Differenzialgleichung

$$[X_1 F] = 0,$$

so erhält man sofort den wichtigen Satz von Lie, dass es zur vollständigen Integration einer gegebenen partiellen Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$H_0(z, x_1, \dots x_n, p_1, \dots p_n) = \text{const.}$$

nur nöthig ist, irgend n von einander wie von H_0 unabhängige Functionen $H_1, \dots H_n$ zu finden, welche die $\frac{n(n+1)}{2}$ Bedingungen

$$(2) \qquad [H_i H_k] = 0$$

identisch erfüllen, ein Satz, der die Jacobi'sche Methode zur Integration der Gleichung $H_0 = \text{const.}$ von der sehr störenden Beschränkung befreit, dass die Functionen $H_0, H_1, \dots H_n$ gerade in Bezug auf $z, p_1, \dots p_n$ von einander unabhängig sein mussten.

Bedenkt man andrerseits, dass umgekehrt aus einer vollständigen Lösung der partiellen Differenzialgleichung $H_0 = \text{const.}$ sich immer n von einander wie von H_0 unabhängige Functionen $H_1, \dots H_n$ ableiten lassen, die allen Bedingungen (2) genügen, so gelangt man zu einer allgemeineren Form des Fundamentaltheorems der Jacobi-Hamilton'schen Theorie, wonach die Auffindung aller Lösungen F der Gleichung

$$[H_0 F] = 0$$

zurückgeführt werden kann auf die vollständige Integration der partiellen Differenzialgleichung

$$H_0 = \text{const.}$$

Genügen auch diese Sätze schon, um die Wichtigkeit der Theorie der Berührungstransformationen ausser Zweifel zu stellen, so tritt doch die wahre Bedeutung, die diese Theorie für die partiellen

Differenzialgleichungen 1. Ordnung besitzt, vollkommen klar erst in der grossen Lie'schen Arbeit über Berührungstransformationen zu Tage, zu der die hiermit angezeigte Note nur einen erläuternden Zusatz bringen sollte, dessen einziger Zweck es war, die schönen Untersuchungen von Lie von der weitaus complicirteren Theorie des allgemeinen Pfaff'schen Problems unabhängig zu machen.

Leipzig. A. Mayer.

A. Mayer: Ueber eine Erweiterung der Lie'schen Integrationsmethode. (Math. Annalen VIII. p. 313—318.)

Das Fundamentaltheorem, welches der Lie'schen Integrationsmethode der partiellen Differenzialgleichungen 1. Ordnung, wie sie in den Math. Annalen VI. p. 162 auseinandergesetzt worden ist, zu Grunde liegt, kann bei Einführung des Jacobi'schen Zeichens

$$(\varphi\psi) = \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\frac{\partial\psi}{\partial p_k} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\frac{\partial\psi}{\partial q_k}\right)$$

also ausgesprochen werden:

Die vollständige Integration der gegebenen partiellen Differenzialgleichung 1. Ordnung mit n unabhängigen Variabeln $q_1, \ldots q_n$

$$H_1(q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n) = \text{const.},$$

in der $p_1, \ldots p_n$ die Differenzialquotienten der gesuchten Function nach $q_1, \ldots q_n$ bedeuten, lässt sich auf die vollständige Integration einer partiellen Differenzialgleichung 1. Ordnung mit nur noch $n - r$ unabhängigen Variabeln zurückführen, sobald man zu der gegebenen Function H_1 r andere Functionen $H_2, \ldots H_{r+1}$ der Variabeln q und p hinzugefunden hat, welche die Bedingungen

$$(H_i H_k) = 0$$

erfüllen und von einander wie von H_1 unabhängig sind hinsichtlich der Variabeln p.

Nun gibt es zwar eine ganze Reihe von Methoden, welche lehren, wie man unabhängige Functionen finden kann, welche paarweise mit H_1 und mit einander verbunden, den Bedingungen $(H_i H_k) = 0$ Genüge leisten. Aber bei keiner von diesen Methoden ist man a priori sicher, dass die Functionen, zu denen man gelangt, auch wirklich gerade in Bezug auf die Differenzialquotienten p von einander unabhängig sein werden. Es war daher von grosser Wichtigkeit zu zeigen, dass diese Forderung der Unabhängigkeit

hinsichtlich der p überflüssig ist und dass der Satz auch dann noch richtig bleibt, wenn die Functionen $H_1, H_2, \ldots H_{r+1}$ nur überhaupt von einander unabhängig sind. Diesen Nachweis liefert die vorliegende Note und verschafft hierdurch der Lie'schen Methode dieselbe Allgemeinheit, die durch Lie der Jacobi'schen Methode zu Theil geworden ist.

Leipzig. A. Mayer.

Sophus Lie: Allgemeine Theorie der partiellen Differenzialgleichungen 1. Ordnung. (Math. Annalen Bd. IX, p. 245—296.)

Nach einer gedrängten Darstellung der von Jacobi und Clebsch herrührenden Theorie vollständiger Systeme von linearen partiellen Differenzialgleichungen wird das folgende Problem gestellt:

Problem 1. Bestimme alle Gleichungssysteme der Form

$$f_k(x_1 \ldots x_n p_1 \ldots p_n) = 0 \qquad (k = 1 \ldots m)$$

vermöge deren die Differenzialrelation

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n = 0$$

identisch stattfindet.

Es ergibt sich, dass jedes solches Gleichungssystem n Gleichungen der Form

$$x_k = -\frac{dH}{dp_k} \qquad (k = ab \ldots l)$$

$$p_i = \frac{dH}{dx_i} \qquad (i = m \ldots t)$$

enthält, wobei $ab \ldots lm \ldots t$ eine Permutation der Zahlen $1\ 2 \ldots n$ sind, und H irgend eine Function von $p_a \ldots p_l$ $x_m \ldots x_t$ bezeichnet, die hinsichtlich der p homogen von erster Ordnung ist.

Beschränkt man sich für einen Augenblick auf $n = 3$ und fasst dabei $x_1 x_2 x_3$ als Cartesische Punktcoordinaten im Raume auf, $p_1 p_2 p_3$ als Bestimmungsstücke einer durch den Punkt $x_1 x_2 x_3$ gehenden Ebene

$$p_1(x_1' - x_1) + p_2(x_2' - x_2) + p_3(x_3' - x_3) = 0,$$

so kann diese Theorie folgendermassen interpretirt werden. Die Grössen $x_1 x_2 x_3$ $p_1 p_2 p_3$ sind Bestimmungsstücke eines Flächenelements; die Gleichung $\Sigma p dx = 0$ sagt, dass die beiden benachbarten Elemente xp und $x + dx$ $p + dp$ vereinigt liegen. Das gestellte

Problem kommt darauf hinaus, alle Schaaren von Flächenelementen zu finden, in denen jedes Element mit allen benachbarten Elementen derselben Schaar vereinigt liegt. Und der gefundene Satz lehrt, dass die Elemente, die eine Fläche bedecken, oder eine Curve umhüllen oder endlich durch einen Punkt gehen, die allgemeinste Schaar der verlangten Eigenschaft bilden. — Ist n eine beliebige Zahl, so liesse sich eine entsprechende Interpretation entwickeln, indem man nämlich die Betrachtungen der modernen Mannigfaltigkeitslehre benutzte. In diesem Referate wird es doch zweckmässig sein, eine rein analytische Darstellung zu geben.

Problem 2. Vorgelegt seien q Gleichungen

$$F_k(x_1 \ldots x_n p_1 \ldots p_n) = 0\,,$$

die hinsichtlich der p homogen von nullter Ordnung sind. Man soll in allgemeinster Weise $n - q$ weitere Gleichungen finden, welche zusammen mit den gegebenen, die Relation $\Sigma p dx = 0$ identisch befriedigen.

Seien

$$F_1 = a_1, \ldots F_q = a_q$$

die vorgelegten Gleichungen; gelingt es solche weitere Funktionen $F_{q+1}, \ldots F_n$ zu finden, dass eine Relation der Form

$$\Sigma p dx = \Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_n dF_n \tag{1}$$

stattfindet, so bilden die Gleichungen

$$F_{q+1} = a_{q+1}, \ldots F_n = a_n \tag{2}$$

zusammen mit $F_1 = a_1, \ldots F_q = a_q$ ein Gleichungssystem der verlangten Art. Wir sagen in diesem Falle, dass die Gleichungen (2) eine vollständige Lösung der vorgelegten Gleichungen bilden. Ist zuerst eine vollständige Lösung gefunden, so bestimmt man durch ausführbare Operationen — Variation der Constanten — das allgemeinste Gleichungssystem der verlangten Art.

Man beweist, dass Functionen F und Φ, die (1) erfüllen, durch die folgenden Relationen verknüpft sind

$$\begin{gathered}(F_i F_k) = (F_i \Phi_k) = (\Phi_i \Phi_k) = 0\,, \qquad (F_i \Phi_i) = 1 \\ \sum_k p_k \frac{dF_i}{dp_k} = 0\,, \quad \sum_k p_k \frac{d\Phi_i}{dp_k} = \Phi_i\,,\end{gathered} \tag{3}$$

dass ferner jedes Grössensystem $F\Phi$, welches diese Bedingungen erfüllt, wirklich die Gleichung (1) befriedigt. Nun aber kann man, wenn überhaupt $q + m$ Grössen $F_1 \ldots F_q \Phi_1 \ldots \Phi_m$ vorgelegt sind, welche (3) befriedigen, immer, indem man successiv eine An-

zahl vollständiger Systeme aufstellt und jedesmal eine Lösung bestimmt, weitere Functionen $F_{q+1} \dots F_n \Phi_{m+1} \dots \Phi_n$ finden, welche dieselben Relationen erfüllen.

Hieraus schliessen wir zunächst, dass jede Gleichung $F_1 = a_1$ vollständige Lösungen besitzt, und dass die Bestimmung einer solchen nur die Integration gewöhnlicher Differenzialgleichungen verlangt.

Wir schliessen ferner, dass jedes Gleichungssystem

$$F_1 = a_1, \dots F_q = a_q \qquad (F_i F_k) = 0$$

vollständige Lösungen besitzt, deren Bestimmung nur die Integration gewöhnlicher Differenzialgleichungen verlangt.

Sei jetzt vorgelegt ein Gleichungssystem der Form

$$(4) \qquad p_k - h_k (p_{q+1} \dots p_n \; x_1 \dots x_n) \qquad (k = 1 \dots q)$$

wo

$$(p_i - h_i, \; p_k - h_k) = 0$$

ist. Es lässt sich beweisen, dass der Ausdruck

$$\Omega = h_1 dx_1 + \dots + h_q \partial x_q + p_{q+1} dx_{q+1} + \dots p_n dx_n$$

auf eine $(n - q)$ gliedrige Form

$$\Omega = \Phi_i dF_1 + \dots + \Phi_{n-q} dF_{n-q}$$

gebracht werden kann. Die Grössen F und Φ sind definirt durch die Gleichungen

$$(p_k - h_k, F) = 0, \qquad (p_k - h_k, \Phi) = 0,$$

$$(F_i F_k) = = (F_i \Phi_k) = (\Phi_i \Phi_k) = 0, \qquad (F_i \Phi_i) = 1,$$

$$\sum_k p_k \frac{dF}{dp_k} = 0 \qquad \sum p_k \frac{d\Phi}{dp_k} = \Phi .$$

Ist ein Grössensystem $F\Phi$ gefunden, welches diese Relationen erfüllt, so befriedigen die Gleichungen

$$F_1 = a_1 \dots F_{n-q} = a_{n-q}$$

zusammen mit (4) die Relation $\Sigma p dx = 0$; sie bilden, sage ich, eine vollständige Lösung der vorgelegten Gleichungen. Von einer gegebenen vollständigen Lösung geht man über zu der allgemeinsten vollständigen Lösung, indem man die Gleichung

$$\Phi_1 dF_1 + \dots + \Phi_{n-q} dF_{n-q} = \Phi_1' dF_1' + \dots + \Phi_{n-q}' dF_{n-q}'$$

in allgemeinster Weise befriedigt. Wie dies geschieht, ist aus der Theorie des Pfaff'schen Problems bekannt.

Sei endlich vorgelegt ein Gleichungssystem der Form

$$(5)\quad \begin{aligned} x_k &= \varphi_k(x_{q+1}\dots x_n) \qquad (k=1\dots q) \\ p_i &- h_i(x_{q+1}\dots x_n p_1 \dots p_q p_{q'} \dots p_n) \qquad (i = q \dots q') \end{aligned}$$

wo

$$(x_k - \varphi_k,\ p_i - h_i) = 0, \qquad (p_i - h_i,\ p_r - h_r) = 0.$$

Es wird bewiesen, dass der Ausdruck

$$p_1 \partial\varphi_1 + \dots + p_q d\varphi_q + h_{q+1} dx_{q+1} + \dots + h_{q'} dx_{q'}$$
$$+ p_{q'+1} dx_{q'+1} + \dots + p_n dx_n$$

sich auf eine $(n - q')$ gliedrige Form

$$\Phi_1 dF_1 + \dots + \Phi_{n-q'} dF_{n-q'}$$

bringen lässt; die Integration des Gleichungssystems (5) wird auf diejenige eines Systems der Form (4) zurückgeführt.

Sind nun r ganz beliebige Gleichungen

$$F_1 = 0, \dots \quad F_r = 0$$

vorgelegt, so beweist man, dass jedes Gleichungssystem

$$F_1 = 0 \dots F_r = 0 \quad \Phi_{r+1} = 0 \dots \Phi_n = 0,$$

das den Ausdruck $\Sigma p dx$ identisch verschwinden lässt, sämmtliche Gleichungen der Form

$$(F_i F_k) = 0$$

enthält. Durch Anwendung dieses Satzes gelingt es, das allgemeine Problem 2 durch ausführbare Operationen auf den speciellen Fall zu reduciren, dass die vorgelegten Gleichungen die Form (5) oder noch einfacher, die Form (4) besitzen, und da dieses specielle Problem schon erledigt ist, so ist hiermit eine allgemeine Behandlungsweise des allgemeinen Problems 2 gefunden.

Die entwickelte Integrationsmethode verlangt eine grosse Anzahl Integrations-Operationen. Einfacher sind die folgenden Methoden.

Handelt es sich darum $p_n - h_n = 0$ zu integriren, das heisst

$$V = p_1 dx_1 + \dots + p_{n-1} dx_{n-1} + h_n dx_n$$

auf eine $(n - 1)$ gliedrige Form

$$\Phi_1 dF_1 + \dots + \Phi_{n-1} dF_{n-1}$$

zu bringen, so weiss man, dass die Grössen F_i und $\frac{\Phi_i}{\Phi_{n-1}}$ Lösungen von

$$(p_n - h_n,\ U) = 0, \qquad \sum_k p_k \frac{dU}{dp_k} = 0$$

sind. Bezeichnet man daher mit

$$\omega_1 \dots \omega_{2n-3}$$

ein beliebiges System Lösungen dieser Gleichungen, so kann V immer die Form

$$V = \varrho \sum_{k=1}^{k=2n-3} \Omega_k(\omega_1 \ldots \omega_{2n-3})\, d\omega_k$$

erhalten. Wählt man insbesondere die Grössen

$$\omega_1 \ldots \omega_{n-1} \quad \omega_n \ldots \omega_{2n-3}$$

derart, dass sie durch die Substitution $x_n = \alpha =$ const. die Werthe

$$x_1 \ldots x_{n-1} \frac{p_1}{p_{n-1}} \ldots \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}}$$

annehmen, so ist

$$V = \sigma\,(\omega_n d\omega_1 + \omega_{n+1} d\omega_2 + \omega_{n+2} d\omega_3 + \cdots + \omega_{2n-3} d\omega_{n-2} + d\omega_{n-1}),$$

und also bestimmen die Gleichungen

$$\omega_1 = a_1 \ldots \omega_{n-1} = a_{n-1}$$

eine vollständige Lösung von $p_n - h_n = 0$. Dies ist die *Cauchy'sche Methode* in ihrer wahren Allgemeinheit.

Soll man andererseits das System

$$p_1 - h_1 = 0 \ldots p_q - h_q = 0, \quad \text{wo} \quad (p_i - h_i,\, p_k - h_k) = 0,$$

integriren, oder anders ausgesprochen, soll man den Ausdruck

$$V = h_1 dx_1 + \cdots + h_q dx_q + p_{q+1}\, dx_{q+1} + \cdots + p_n dx_n$$

auf eine $(n - q)$ gliedrige Form

$$\Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_{n-q} dF_{n-q}$$

bringen, so sind F_i und $\frac{\Phi_i}{\Phi_{n-q}}$ ein System Lösungen von

$$(p_n - h_n, U) = 0 \ldots (p_{n-q+1} - h_{n-q+1}, U) = 0, \sum_k p_k \frac{dU}{dp_k} = 0\,.$$

Bezeichnet man daher überhaupt mit $\omega_1 \ldots \omega_{2n-2q-1}$ ein System Lösungen dieser Gleichungen, so besteht immer eine Relation der Form

$$V = \varrho \sum_{k=1}^{k=2n-2q-1} \Omega_k(\omega_1 \ldots \omega_{2n-2q-1})\, d\omega_k\,.$$

Wählt man insbesondere die Grössen

$$\omega_1 \ldots \omega_{n-q}\,\omega_{n-q+1} \ldots \omega_{2n-2q-1}$$

derart, dass sie durch die Substitution $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_q = \alpha_q$ die Werthe

$$x_1 \ldots x_{n-q} \frac{p_1}{p_{n-q}} \ldots \frac{p_{n-q-1}}{p_{n-q}}$$

annehmen, so verschwinden die $n-q-1$ letzten Glieder in der letzten Gleichung, und es kommt

$$V = \sigma(\omega_{n-q+1}d\omega_1 + \omega_{n-q+2}d\omega_2 + \cdots + \omega_{2n-2q-1}d\omega_{n-q-1} + d\omega_{n-q}),$$

und also bestimmen die Gleichungen

$$\omega_1 = a_1 \ \ldots \ \omega_{n-q} = a_{n-q}$$

eine vollständige Lösung von $p_1 - h_1 = 0 \ \ldots . \ p_q - h_q = 0$. Dies ist die vom Verfasser *erweiterte Cauchy'sche Methode*.

Noch einfacher ist die folgende vom Verfasser herrührende Integrationsmethode des Systems

$$p_1 - h_1 = 0 \ \ldots \ p_q - h_q = 0,$$

wo

$$(p_i - h_i, \ p_k - h_k) = 0.$$

Man bezeichne diejenige Function, in welche $\Phi(x_1 \ldots x_n \ p_1 \ldots p_n)$ durch die Substitution

$$x_1 = a_1 + \tau_1 x \ \ldots \ x_q = a_q + \tau_q x$$

übergeht, mit Φ^τ, und bilde sodann die Gleichung

$$p - \sum_k \tau_k h_k^{(\tau)} = 0 = p - h.$$

Ist nun

$$W\left(x_1 \ \ldots . \ x_n \ \frac{p_{q+1}}{p_n} \ \ldots . \ \frac{p_{n-1}}{p_n}\right)$$

eine Lösung von

(6) $\quad (p_1 - h_1, \ W) = 0 \ \ldots \ (p_q - h_q, \ W) = 0 \quad \sum_k p_k \frac{dW}{dp_k} = 0,$

so ist auch

(7) $\quad (p - h, \ W^{(\tau)}) = 0.$

Sind $W_1 \ \ldots . \ W_{2n-2q-1}$ ein System Lösungen von (6), so sind $W_1^{(\tau)} \ \ldots . \ W_{2n-2q-1}^{(\tau)}$ ein System Lösungen von (7). Nimmt man dagegen eine beliebige Lösung Ψ von (7) und führt auf sie die inverse Substitution

$$\tau_k = \frac{x_k - a_k}{x}$$

aus, so ist die hervorgehende Function $\Psi^{(x)}$ im Allgemeinen keine Lösung von (6). Wählt man indess ein System Lösungen

$$\omega_1 \ \ldots \ \omega_{n-q} \ \omega_{n-q+1} \ \ldots \ \omega_{2n-2q-1},$$

welche die Eigenschaft besitzen, durch die Substitution $x_1 = a_1 \ \ldots . \ x_q = a_q$ die Werthe

$$x_{q+1} \ldots . x_n \cdot \frac{p_{q+1}}{p_n} \ldots . \frac{p_{n-1}}{p_n}$$

anzunehmen, so sind die Grössen

$$\omega_1^{(x)} \ldots . \omega_{2n-2q-1}^{(x)}$$

ein System Lösungen von (6). Hiermit ist die Integration des Systems $p_1 - h_1 = 0 \ldots . p_q - h_q = 0$ auf diejenige von $p - h = 0$ zurückgeführt.

Vermöge dieses Satzes kann die Integration der Gleichung

$$p_n - h_n(p_1 \ldots p_{n-1}\; x_1 \ldots x_n) = 0\,,$$

nachdem eine Function N gefunden ist, welche die Gleichungen

$$(p_n - h_n,\; N) = 0\,,\quad \sum_k p_k \frac{\partial N}{\partial p_k} = 0$$

erfüllt, auf diejenige einer Gleichung zwischen $(n - 1)$ Variabeln

$$p_{n-1} - h_{n-1}(p_1 \ldots p_{n-2}\; x_1 \ldots x_{n-1}) = 0$$

zurückgeführt werden. Um diese reducirte Gleichung zu integriren, kann man zunächst eine Lösung der Gleichungen

$$(p_{n-1} - h_{n-1},\; M) = 0\,,\quad \sum_k p_k \frac{\partial M}{\partial p_k} = 0$$

suchen, und sodann eine aequivalente Gleichung zwischen $n - 2$ Variabeln aufstellen

$$p_{n-2} - h_{n-2}(p_1 \ldots p_{n-3}\; x_1 \ldots x_{n-2}) = 0\,.$$

Diese Gleichung wird in entsprechender Weise auf eine zwischen $n - 3$ Variabeln reducirt u. s. w. Zuletzt kommt man zu einer gewöhnlichen Differenzialgleichung zwischen 2 Variabeln. Ist sie integrirt, so findet man successiv durch ausführbare Operationen vollständige Lösungen aller aufgestellten Gleichungen, insbesondere auch eine vollständige Lösung von $p_n - h_n = 0$.

Es ist unmöglich gewesen, in diesem kurzen Referate die Beziehungen zwischen den hier dargestellten und den von Jacobi, Mayer u. s. w. herrührenden Theorien auseinanderzusetzen.

Christiania. Sophus Lie.

P. Mansion: Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. (Paris 1875. Prix 6 frcs.)

Ce mémoire contient le résumé des recherches de Lagrange, Pfaff, Jacobi, Bour, Weiler, Clebsch, Korkine, Boole, Mayer, Cauchy, Serret et Lie, jusqu'en 1872 sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Nous avons groupé les travaux des ces géomètres dans les subdivisions suivantes:

Introduction. Génération des équations aux dérivées partielles du premier ordre (§§ 1—4).

Livre I. Méthode de Lagrange et de Pfaff (§§ 5—15).

Livre II. Méthode de Jacobi (§§ 16—27).

Livre III. Méthode de Cauchy et de Lie (§§ 28—32).

Appendice. Méthode de Lie comme synthèse des idées antérieures (§ 33).

Cet arrangement est rigoureusement didactique, c'est-à-dire, que du commencement à la fin nous pénétrons de plus en plus profondément dans notre sujet. Il est en même temps historique dans ses grandes lignes, à une exception près: la méthode de Cauchy est antérieure de beaucoup à tous les travaux résumés dans notre livre deuxième. Nous avons été amenés à placer la méthode de Cauchy à la fin de notre mémoire, avec celle de Lie, parce que cette dernière est la suite naturelle de la première, et que, réunies, elles constituent une étude plus approfondie de la question de l'intégration des équations aux dérivées partielles que les méthodes de Lagrange, de Pfaff, de Jacobi et de Bour.

Dans notre Introduction, nous donnons d'abord, d'après Lagrange (1772 et 1774) et Lie (1872), la définition du problème de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Nous indiquons ensuite, d'après Jacobi, deux moyens généraux et très-simples de faire disparaître la variable indépendante des équations en question. Nous montrons, contrairement à l'avis de Bertrand et d'autres géomètres, que le second procédé de transformation de Jacobi n'est pas illusoire (§ 1)*). Les deux paragraphes suivants contiennent la théorie des équations aux dérivées

*) M. M. Lie et Mayer partagent cette manière de voir (Mathematische Annalen, t. IX, p. 366).

partielles, à 3 ou à $(n+1)$ variables, telle que l'a découverte Lagrange en 1774, au moyen de sa féconde méthode de la variation des constantes arbitraires. Nous avons ajouté toutefois à l'exposition de Lagrange diverses remarques empruntées à Jacobi et une méthode très-simple de génération des équations simultanées. Le dernier paragraphe est consacré aux vues de Lie sur le sujet traité dans les numéros précédents et à l'explication du paradoxe relatif aux constantes supplémentaires.

Le livre premier contient l'analyse des travaux de Lagrange et de Pfaff. Nous avons exposé, avec prédilection, ces recherches déjà anciennes, d'abord parce qu'elles contiennent le germe de maintes découvertes ultérieures, ensuite parce qu'elles sont susceptibles d'une foule d'applications que l'on traite plus simplement, par ces méthodes, que par les méthodes plus savantes de Jacobi ou de Cauchy.

Le premier chapitre traite des équations linéaires, dont Lagrange a trouvé la théorie en 1779 et en 1785. Notre exposition ne diffère de celle de nos devanciers qu'en ce que nous employons davantage la théorie des déterminants fonctionnels. Dans le dernier paragraphe, nous donnons l'extension de la théorie de Lagrange faite par Jacobi, en 1827. Il est assez étonnant que ces recherches du géomètre de Berlin soient passées sous silence dans tous les traités, et même dans les mémoires récents de Graindorge et Imschenetsky, car seules, elles font comprendre l'étroite connexion qui existe entre les équations aux dérivées partielles et les systèmes d'équations différentielles du premier ordre (voir le n⁰ 32). En passant, nous avons fait connaître sous quel point de vue Lie considère les équations linéaires (n⁰ 23)*).

Le second chapitre contient l'analyse des travaux de Lagrange sur les équations non linéaires. C'est en 1772 que le géomètre de Turin trouva le moyen de ramener l'intégration des équations non linéaires à trois variables à celle des équations linéaires à quatre variables. Il revint sur le même sujet en 1774, pour faire connaître les diverses intégrales des équations aux dérivées partielles, et en 1806, pour expliquer un singulier paradoxe que présente la théorie de l'intégrale générale. Nous faisons connaître la méthode de La-

---

*) D'après M. Mayer, qui nous a écrit à ce sujet, nous aurions du profiter davantage, dans ce chapitre, du Mémoire de Jacobi, intitulé *Dilucidationes*, etc. (Journal de Crelle, t. XXIII, p. 1—104).

grange sous ses diverses formes. En premier lieu, le grand géomètre observe qu'intégrer l'équation

$$q = \varkappa(x, y, z, p),$$

c'est trouver une valeur de p, telle que

$$dz = pdx + \varkappa dy$$

soit intégrable. Ensuite, il indique le moyen général pour trouver une valeur de p avec une constante arbitraire, ce qui est le germe de la *méthode de Jacobi*. Enfin, il montre comment on peut déduire la valeur la plus générale de z, de la valeur la plus générale de p, ce qui est le germe de la *méthode de Pfaff*.

Jacobi, en effet, en appliquant la méthode de Lagrange, sous sa dernière forme, aux équations à n variables indépendantes, a été amené, en 1827, à refaire en sens inverse tous les calculs de Pfaff. Nous exposons ce curieux travail de Jacobi dans notre chapitre III. Le géomètre de Berlin ramène l'intégration d'une équation non linéaire à celle d'un système d'équations simultanées dont la solution est plus générale que celle de l'équation donnée. Pour particulariser cette solution et en déduire l'intégrale cherchée, il est forcé de faire un changement de variables: $(2n - 1)$ variables $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{n-1}$ sont remplacées par les constantes de l'intégration des équations simultanées auxiliaires, et la question se ramène dès lors à l'intégration d'une équation différentielle totale à $(2n - 1)$ variables.

Pfaff, dès 1814, avait suivi précisément une route inverse, comme nous le montrons dans le chapitre suivant. Pour intégrer l'équation.

$$p_n = \varkappa(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{n-1})$$

il considère l'équation différentielle totale

$$dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_{n-1} dx_{n-1} + \varkappa dx_n$$

à $2n$ variables, $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{n-1}$, et la transforme en une autre de même forme à $(2n - 1)$ variables. C'est précisément celle que Jacobi a trouvée en généralisant les dernières recherches de Lagrange, et Pfaff y arrive en intégrant le même système d'équations que Jacobi. Les deux méthodes sont donc identiques, sauf que l'une est, plus clairement que l'autre, la généralisation de la méthode de Lagrange, et que Pfaff traite, en outre, le problème général de l'intégration des équations différentielles totales, qui porte son nom. Dans notre exposition des travaux de Pfaff, nous nous aidons de divers écrits de Gauss, de Jacobi et de

Cayley. Le dernier paragraphe du chapitre IV contient, outre le problème inverse de Pfaff, la simplification introduite dans toute cette théorie, par l'emploi des valeurs initiales des variables comme constantes arbitraires. Le problème général de Pfaff conduit à intégrer n systèmes d'équations simultanées dont chacun ne peut être formé qu'après l'intégration complète de tous les précédents. Jacobi, en 1836, profitant d'une idée de Hamilton, montra que l'on peut former immédiatement ces n systèmes, si l'on prend, comme nous venons de le dire, les valeurs initiales des variables pour constantes arbitraires; de plus, s'il s'agit de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles, il n'y a plus qu'un système à intégrer. Cauchy, longtemps auparavant, en 1818, était arrivé à ce dernier résultat, en employant aussi les valeurs initiales des variables comme constantes. C'est à lui, d'ailleurs, qu'est due l'introduction de cette idée dans la science, mais Jacobi semble avoir ignoré les travaux de Cauchy.

Tel est le cycle des recherches exposées dans notre livre premier. Nous avons joint à chaque théorie les applications que l'on rencontre ordinairement dans les traités, outre celles qui se trouvent dans les mémoires de Lagrange. De plus, nous avons donné dans un paragraphe spécial l'intégration d'une équation très-remarquable, due à Schläfli, et publiée par lui en 1868.

Le livre second est consacré à la méthode de Jacobi et de Bour, aux perfectionnements de cette méthode dus à Weiler et à Clebsch, enfin aux méthodes de Korkine, de Boole et de Mayer qui s'y rattachent de très-près.

La *Nova methodus* de Jacobi a été trouvée par lui en 1838 et publiée par Clebsch en 1862. Nous la faisons connaître dans nos deux premiers chapitres. Notre exposition ne diffère de celle de Graindorge et Imschenetsky qu'en ce que nous avons réuni dans un chapitre spécial, le premier, tout ce qui se rapporte aux conditions d'intégrabilité. En nous éloignant un peu de nos prédécesseurs et de Jacobi sur ce point, on trouvera peut-être que nous avons abusé des notations symboliques. Toutefois, le lecteur qui se sera familiarisé avec ces notations reconnaîtra que, seules, elles peuvent conduire naturellement à la démonstration des principes de la méthode de Jacobi. Dans le chapitre III, nous donnons l'extension de cette méthode aux équations simultanées, due à Bour, en corrigeant la petite erreur qui s'est glissée dans l'exposition de ce dernier et dans celle des auteurs qui l'ont suivi. Cette erreur

a été signalée par Mayer, en 1871. Au point de vue historique, il importe de remarquer que les travaux de Bour ne procèdent pas de ceux de Jacobi, qui n'ont été publiés qu'en 1862. Liouville, Bour et Donkin avaient trouvé, vers 1853 et 1854, les théorèmes fondamentaux de la *Nova methodus*, sans avoir connaissance de celle-ci. Dans le chapitre IV, nous reproduisons des calculs d'une admirable élégance, dus à Clebsch, et publiés en 1866, où l'éminent algébriste fait connaître une notable simplification de la méthode de Jacobi, trouvée par Weiler en 1863*).

Les chapitres V et VI sont consacrés à des méthodes où l'on procède par changement de variables. Dans la méthode de Korkine (1868), qui s'applique aux équations simultanées non linéaires, on dispose de la fonction arbitraire, qui entre dans l'intégrale générale de l'une des équations données, de manière à satisfaire aux autres équations; on transforme ainsi le système en un autre qui contient une équation et une variable de moins. Les calculs auxquels nous avons été conduit pour démontrer les principes de cette méthode, auraient été extrêmement longs, si nous n'avions largement employé la théorie des déterminants. La méthode de Boole (1863), qui s'applique seulement aux équations linéaires, procède à peu près comme celle de Korkine. Elle est exposée dans le dernier paragraphe du chapitre V. La méthode de Mayer (1872), qui vient ensuite, s'applique aussi aux équations linéaires, dont elle ramène l'intégration à celle de certains systèmes d'équations différentielles totales. Chaque fois que l'on parvient à intégrer une équation de l'un de ces systèmes, on le transforme en un autre système contenant une équation et une variable de moins. Les nouvelles variables sont les valeurs initiales des variables primitives. En outre, au moyen d'une transformation de variables d'un genre tout différent, on peut faire en sorte de n'avoir à considérer qu'un seul système. Quand il s'agit des équations linéaires auxquelles conduit la méthode de Jacobi, un théorème de Mayer, analogue à celui de Poisson et Jacobi, dont il est un corollaire, introduit de nouvelles simplifications**).

---

*) M. M. Weiler (Journal de Schlömilch, 1875, t. XX, pp. 83 sqq. 271 sqq.) et Mayer (Mathem. Ann. t. IX, p. 346 sqq.) ont exposé de nouveau cette simplification, qui n'est pas identique à celle de Clebsch.

**) M. Mayer m'apprend que malheureusement j'ai laissé une erreur se glisser dans mon exposition de sa méthode.

Les méthodes de Jacobi, de Clebsch et de Mayer, conduisent à chercher *une* intégrale de systèmes de $2(n-1)$, $2(n-2)$, ..., 2 équations différentielles ordinaires, ces systèmes étant respectivement pour les trois méthodes, au nombre de:

$$\begin{array}{lll} 1, 2, 3, \ldots, & (n-2), & (n-1), \\ 1, 2, 2, \ldots, & 2, & 2, \\ 1, 1, 1, \ldots, & 1, & 1. \end{array}$$

Les équations sont supposées ne pas contenir explicitement la variable dépendante. La méthode de Lie, dont nous parlerons plus bas, exige précisément le même nombre d'intégrations que celle de Mayer.

Le livre troisième contient d'abord l'exposé de la méthode de Cauchy. L'illustre géomètre l'a trouvée dès 1818, en partant de deux idées principales; l'une est le changement de variables, qu'il semble emprunter à Ampère, plutôt qu'à Lagrange ou à Pfaff, car il paraît avoir ignoré les recherches de celui-ci; l'autre est l'introduction immédiate dans le calcul des valeurs initiales des variables, comme on le fait dans la théorie des intégrales définies. Si les recherches de Cauchy n'étaient antérieures à celles de Jacobi sur la méthode de Pfaff, on les prendrait pour une exposition simplifiée de tous les travaux analysés dans notre livre premier, y compris la théorie des équations linéaires de Lagrange. Quand il s'agit de trouver les intégrales de ces équations, supposées à trois variables, Lagrange et Monge cherchent d'abord les courbes qui peuvent engendrer les surfaces représentées par les intégrales. Une idée analogue donne à Cauchy les courbes ou variétés à une dimension, appelées caractéristiques par Lie, qui engendrent, pour ainsi dire, l'intégrale des équations non linéaires. Pfaff et Jacobi étaient forcés, dans la suite de leurs calculs, d'égaler à des constantes n de leurs $(2n-1)$ variables auxiliaires. Cauchy, dès le début, ne prend que $(n-1)$ variables auxiliaires, et il suppose immédiatement que ce sont les valeurs initiales des anciennes variables, ce qui le dispense du circuit par lequel Jacobi est arrivé, plus tard, au même résultat. Cauchy a donné une forme plus générale à sa méthode, en 1841; les valeurs initiales des variables peuvent être à volonté de nouvelles variables ou des constantes d'intégration. C'est ce travail de 1841, auquel on n'a pas accordé suffisamment d'attention, qui est la base de notre exposition. Nous avons pu, grâce à lui, donner, avec une entière rigueur, la théorie de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles, dans les cas les plus

singuliers, par exemple, dans le cas des équations semi-linéaires de Lie (1872), rencontré incidemment par Serret en 1861; l'intégrale de ces équations est donnée par m relations entre $(n+1)$ variables et n constantes arbitraires. Mayer a montré, en 1871, que la méthode de Pfaff, modifiée par Jacobi, ne donne jamais l'intégrale complète des équations homogènes par rapport aux quantités p; il en est de même de la méthode primitive de Cauchy. Mais quand on laisse à cette méthode toute son élasticité, si j'ose ainsi dire, elle conduit, sans calcul, aux modifications de la méthode de Pfaff et Jacobi, proposées par Mayer, et Darboux.

La méthode générale de Cauchy se prête très-bien aussi à une exposition rigoureuse des recherches de Serret (1861), relatives au cas où la méthode de Cauchy *semble* en défaut. Nous donnons ces recherches dans le chapitre II.

Le chapitre suivant contient, d'après Mayer, un exposé de la méthode de Lie (1872) considérée comme une extension de la méthode de Cauchy. Dans cette méthode, on ramène l'intégration de $(m+1)$ équations à $(n+m)$ variables indépendantes à celles d'une équation unique contenant n variables indépendantes, soit en cherchant une intégrale de m équations, soit après une simple transformation de variables. Dans ce dernier cas, on voit clairement que la méthode de Lie est la suite naturelle de celle de Cauchy. Combinée avec celle de Jacobi, elle s'applique à une seule équation à $(n+1)$ variables, surtout dans les cas les plus défavorables.

Enfin, dans un court appendice, nous donnons, au moyen des idées de Lie lui-même, un aperçu synthétique des méthodes principales, qui permet au lecteur d'entrevoir leur fusion prochaine, entre les mains du géomètre norwégien.*)

Gand. P. Mansion.

---

*) Aux écrits de M. Lie, cités, page 272, il faut encore ajouter maintenant le suivant: *Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung* (Math. Ann. t. IX, p. 245—296).

P. Mansion: Sur la méthode de Cauchy pour l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Note présentée par M. Hermite. (Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, 1875, 2d semestre, t. LXXXI, p. 790—793.)

Résumé de la partie la plus originale de notre *Mémoire sur les équations aux dérivées partielles* (nos 4, 5, 107, 108, 111, 129). Voici l'idée fondamentale qui est exposée dans ce petit article: une équation aux dérivées partielles à $(n+1)$ variables du premier ordre et les équations canoniques correspondantes représentent les mêmes éléments, en nombre ∞^{2n}, dans un espace à ∞^{n+1} dimensions. Pour déduire une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles du système intégral des équations canoniques, il suffit d'associer d'une manière convenable les ∞^{2n} éléments, ce que permet la méthode de Cauchy dans tous les cas; par exemple, dans ceux qui ont été examinés récemment par Mayer et Darboux, et qui semblent exceptionnels.

Gand. P. Mansion.

P. Mansion: Introduction à la théorie des déterminants, à l'usage des établissements d'instruction moyenne. (Gand, Hoste, 1876. Mons, Manceaux, 1876. 28 p. in 8°. Prix: fr. 0.50.)

P. Mansion: Eléments de la théorie des déterminants d'après Baltzer et Salmon. (Ibid. 1875, 44 p. in 8°. Prix: fr. 1. 25.)

Le premier de ces écrits est extrait de la *Revue de l'Instruction publique en Belgique* (t. XVIII, 1875; t. XIX, 1876), le second, de la Nouvelle Correspondance mathématique (t. I, 1874—1875); toutefois le tirage à part de celui-ci contient de plus que le texte publié dans le journal deux belles démonstrations, dues à Janni, l'une du théorème de Bezout sur l'élimination, l'autre des propriétés des déterminants nuls. L'ordre des matières est le même dans les deux opuscules: I. Définitions et propriétés immédiates. II. Calcul des déterminants. III. Applications à la résolution des équations linéaires et à l'élimination. Dans l'*Introduction*, nous n'employons pas la théorie des permutations et nous ne parlons que de déterminants à 4 ou à 9 éléments, les seuls qui soient vraiment utiles dans

l'enseignement moyen. Dans les Éléments, au contraire, nous avons recours à la théorie générale des permutations.

Nous pensons avoir simplifié deux points dans les *Éléments* 1° Nous disons qu'une permutation $a_{\alpha\alpha'}$, $b_{\beta\beta'}$, $c_{\gamma\gamma'}\ldots$, d'éléments à deux indices, est paire ou impaire suivant que le nombre des dérangements des premiers indices $\alpha\beta\gamma\ldots$, et des seconds $\alpha'\beta'\gamma'\ldots$ est pair ou impair. Cette manière de définir les permutations paires et impaires rend plus facile la démonstration des propriétés des déterminants qui découlent immédiatement de la définition et peut s'étendre aux permutations d'éléments à 3, 4, ... indices. 2° La règle de la multiplication des déterminants, supposée connue par induction, se démontre très simplement, a posteriori en faisant usage, d'une manière systématique, d'une notation déjà ancienne, savoir $[abc]$ pour $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3$.

La comparaison de nos Eléments avec ceux de divers professeurs (Hattendorf, Studnicka, Günther, Dieckmann, Mellberg) nous y a fait découvrir quelques lacunes. Nous en signalerons deux. Nous aurions du consacrer quelques pages à l'application de la théorie des déterminants aux fractions continues et à la discussion des équations du premier degré.

Gand. P. Mansion.

P. Mansion: Now Demonstration of the Fundamental Property of Linear Differential Equations. (Messenger of Mathematics. New Series, t. IV, n° 18, p. 177—178. 1875.)

P. Mansion: Demonstration de la propriété fondamentale des équations différentielles linéaires. (Archiv der Mathematik und Physik, gegründet von Grunert, fortgesetzt von Hoppe, Th. LVI, p. 99—100.)

On sait, depuis Brisson et Cauchy, qu'une équation différentielle linéaire à coefficients *constants*:

$$y^{IV} + A_1 y''' + A_2 y'' + A_3 y' + A_4 y = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$(D - a_1)(D - a_2)(D - a_3)(D - a_4)\, y = 0$$

D étant un signe de dérivation. Nous avons démontré qu'il en est de même si les coefficients sont *variables* (Mém. en 8° de l'Acad. de Brux. t. XXII), et que a_4 est *nécessairement* tel que $z' - a_4 z = 0$.

z étant une solution de particulière de l'équation donnée. Dans une note subséquente (Bulletins de Bruxelles, 2e Serie, t. XXXVIII), nous avons vérifié *a posteriori* que si a_4 satisfait à une pareille relation, $(D - a_4)y$ est un des facteurs symboliques de l'équation donnée. La démonstration donnée dans le Messenger est une simplification de celle des Bulletins. Ces trois premières preuves du théorème fondamental ont un défaut commun: elles supposent qu'une équation d'ordre n a n solutions distinctes, pour prouver l'existence d'un seul facteur symbolique $(D - a)y$. La quatrième démonstration donnée dans le journal de M. Hoppe n'offre pas cet inconvénient et complète les trois autres.

Gand. P. Mansion.

P. Mansion: Sur une question de maximum appelée Problème d'Huygens. (Nouvelle Correspondance mathématique t. I. p. 193—194.)

Les sommes $x + y + z + u$, $xy + xz + xu + yz + yu + zu$, $xyz + xyu + xzu + yzu$ prennent leur valeur minima, quand $x = y = z = u$, si $xyzu$ est constant. Par suite il en est de même de $(1 + x)(1 + y)(1 + z)(1 + u)$. L'expression

$$H = \frac{axyz}{(a + x)(x + y)(y + z)(z + b)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{y}{x}\right)\left(1 + \frac{z}{y}\right)\left(1 + \frac{b}{z}\right)}$$

à laquelle conduit le problème d'Huygens est donc maxima quand $x:a = y:x = z:y = b:z$. On trouve ainsi, par l'algèbre élémentaire la solution d'une question qu'il est très pénible de traiter complètement par le calcul différentiel (voir *Picart*, Nouv. Ann. de Mathém., 1874, p. 212—219).

Gand. P. Mansion.

M. Noether: Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve. (Math. Annal. IX, p. 166—182.)

Dieser Aufsatz beabsichtigt, in der *Theorie der algebraischen Curven* die Beschränkungen aufzuheben, welche sich die bisherigen geometrischen Arbeiten (mit Ausnahme weniger neuerer Arbeiten

über rationale Transformation) durch Ausschliessen der singulären Punkte aus Mangel einer geometrisch-algebraischen Theorie derselben auflegen mussten.

Auch in der Functionentheorie hat sich die Nothwendigkeit gezeigt, an Stelle des von Fall zu Fall variirenden **Puiseux**'schen Verfahrens zur Aufstellung der Reihenentwicklungen, die in einem singulären Werthsystem einer algebraischen Function stattfinden, eine allgemein gültige *analytische* Methode für diese Entwicklungen zu setzen. Durch den Gedanken *successiver eindeutiger Transformationen* ist diese Methode geschaffen worden. Statt wie früher (wenn x, y die Variabeln $(x = 0,\ y = 0)$ das singuläre Werthsystem und dabei $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0$ ist) direct eine Transformation.

$$y = y' x^2$$

vorzunehmen, führt man nun successive Transformationen der Form

$$y' = \frac{y}{x}$$

aus, wobei die transformirte Function y' eine niedrigere Singularität in dem Werthsystem $(x = 0,\ y' = 0)$, nämlich die von $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, erhält. Man führt die Transformationen so weit, bis in den entsprechenden Werthsystemen der resultirenden Function jede Singularität zum Verschwinden gebracht ist; und da sich die nach ganzen Potenzen der Variabeln gehenden Entwicklungen in jenen Werthsystemen dann direct anschreiben lassen, so ergeben sich durch Rückwärtsverfolgen der einfachen Transformationen oder gelegentliche Umkehrung der Entwicklungen auch die ursprünglich geforderten Reihenentwicklungen der Function y.

Die Ausführungen dieser Methode finden sich bei H. **Hamburger** (Ztschr. f. Math. u. Phys. XVI, 1871), bei H. **Königsberger** in dessen Buch „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen", und nochmals neuerdings bei H. **Stolz** (Math. Ann. VIII). Ausserdem ist zugleich der dem Verfahren zu Grunde liegende Gedanke, der der Untersuchung der singulären Werthsysteme durch successive Transformationen, auch in einer 1871 von mir veröffentlichten Note (Gött. Nachr. 1871, p. 267, „Ueber die algebr. Functionen", Note 2) angegeben.

Aber dieser Gedanke reicht noch weiter: die successiven Transformationen allein liefern schon, ohne dass man bis zu den Reihenentwicklungen vorzuschreiten braucht, die *Definition der singulären Punkte*. Denn wenn einem gewöhnlichen vielfachen Punkte P durch

die Transformation nur mehrere einfache Punkte entsprechen, so verbinden sich diese, wenn P zu einem singulären Punkte P' wird, selbst wieder zu einem singulären Punkte Q der transformirten Curve; und man kann die Singularität P' auffassen als die Verbindung des gewöhnlichen vielfachen Punktes P mit der Singularität des Punktes Q. Ein singulärer Punkt besteht dann aus einer endlichen Zahl gewöhnlicher vielfacher Punkte, die nur in bestimmten Richtungen unendlich nahe an einander gerückt sind, ohne dass hierdurch ein Punkt von einer höheren Ordnung der Vielfachheit wird.

Um indess diese Definition geometrisch auch im Einzelnen und vollständig durchzuführen, wird es nöthig, zunächst die Plücker'sche Auffassung der Entstehung einer algebraischen Curve aus ihren Elementen weiter durchzubilden. Man denkt sich hiernach das Fortschreiten auf der Curve so: in einem Punkt P nimmt man eine bestimmte *Richtung* t an; ein darauffolgender, P benachbarter, Punkt P' wird in dieser Richtung t angenommen und dann durch P' eine Richtung t', die t benachbart ist, etc. Die Curve kann dabei als durch die Punkte $P, P' \ldots$, oder auch als durch die Geraden $t, t' \ldots$ erzeugt gedacht werden; oder endlich auch als durch die Combination der Punkte P und Erzeugenden t erzeugt. Indem wir die letztere Auffassung annehmen, nennen wir ein *Curvenelement* der Curve *die Combination eines Punktes P mit einer durch P gehenden Richtung t* (also nicht etwa die Verbindungslinie zweier Punkte oder den Schnitt zweier Erzeugenden). Aus solchen *aufeinanderfolgenden Curvenelementen* lassen wir die Curve entstehen. Es *geht* dann also *im Allgemeinen* eine Erzeugende t durch zwei aufeinanderfolgende Punkte, *gehört* aber nur zu *einem* Element oder *einem* Punkt P, d. h. *berührt* in *einem* Punkte P; und umgekehrt ist ein Punkt im Allgemeinen der Schnitt *zweier* aufeinanderfolgenden Erzeugenden, aber der Berührungspunkt *einer* Erzeugenden.

Im Besonderen können nun zwei Curvenelemente einer Curve (ob aufeinanderfolgende Elemente oder nicht) ihren Punkt gemein haben, oder sie können ihre Richtung gemein haben, oder sie können endlich Punkt und Richtung gemein haben (also dann zusammenfallen, obwohl sie hierdurch *nicht* zu aufeinanderfolgenden Elementen werden). Wir nennen einen Punkt P der Curve einen *k-elementigen*, wenn k der Curvenelemente (ob verschiedene oder aufeinanderfolgende) den Punkt P gemein haben. Es gibt dann k Richtungen durch P, welche zusammen mit P je ein Element der

Curve bilden, d. h. k Erzeugende der Curve, welche dieselbe *in* diesem Punkte P *berühren*; und jede Gerade der Ebene, welche durch P geht (einzelne ausgenommen), trifft die Curve in k mit P *zusammenfallenden* Punkten, da sie hier k Elemente der Curve trifft.

Ein gewöhnlicher k-elementiger Punkt, d. h. ein solcher, dessen k Elemente alle endlich verschiedene Richtungen besitzen, wird ein *k-facher* Punkt genannt.

Gehören aber zu *einem* Punkte P k' *aufeinanderfolgende* Curvenelemente, so sagen wir, dass die Curve in P noch einen $(k'-1)$-*fachen Verzweigungspunkt* besitzt, eine Bezeichnung, der wir auch die durch $k'-1$ *einfache Verzweigungspunkte* äquivalent setzen.*) Man hat dann, von diesen k' Elementen herrührend, $k'+1$ aufeinanderfolgende Erzeugende der Curve, welche durch P gehen.

Ebenso kann auch *eine* Richtung t zu l Curvenelementen gehören. Sind darunter l' aufeinanderfolgende, so trifft die l-elementige Gerade t, hiervon herrührend, die Curve in $l'+1$ aufeinanderfolgenden Punkten, berührt aber nur in l' derselben, etc. Und diese Verhältnisse können sich nun noch combiniren. Insbesondere kann die Tangente eines Curvenelementes eines k-elementigen Punktes P selbst wieder eine mehrelementige sein, also auch zu Curvenelementen gehören, die ihren Punkt dem Punkte P *benachbart* haben, etc.

Diese Verhältnisse werden aber alle durch die eindeutigen Transformationen, da dieselben aufeinanderfolgende oder getrennte Elemente der Curve bezüglich wieder in solche überführen, völlig klar gestellt. Insbesondere wird unter Zugrundelegung der angedeuteten Auffassung in der Arbeit der allgemeine Satz bewiesen:

Ein beliebig singulärer *k-elementiger* Punkt ist als Grenzfall eines *k-fachen* Punktes zu definiren, zu welchem zunächst eine Anzahl von einfachen Verzweigungspunkten tritt, und an welchen weiter eine Reihe von l-, m-, ... elementigen Punkten $(l+m+\cdots<k)$ unendlich nahe heranrückt.

Durch diesen Satz, dessen algebraische und geometrische Begründungen sich völlig decken, wird die Behandlung der Probleme in verschiedenen Theorien der algebraischen Curven von dem Auftreten singulärer Punkte unabhängig gemacht, vielmehr auf die bei gewöhnlichen vielfachen Punkten zurückgeführt. So erwähnen wir

*) Man wird beachten, dass diese „Verzweigungspunkte der Curven" nur einen Theil der in der Functionentheorie ebenso benannten „Verzweigungspunkte" der zugehörigen algebr. Function ausmachen.

die Untersuchung der Resultante der Elimination aus zwei speciellen Gleichungen, besonders solchen, die sich im Unendlichen speciell verhalten; wir erwähnen ferner das projectivische Verhalten der Curven, wie es in den Plücker'schen Gleichungen auftritt, also die Bestimmung der *Klasse* der Curve etc., und endlich das Verhalten einer Curve bei rationalen Transformationen überhaupt, worauf schon oben hingedeutet worden ist.

Erlangen. M. Noether.

H. Durège: Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten. (Sitzungsber. der Wiener Acad. Bd. 72. Abth. II. October 1875.)

In Vorstehendem wurden die Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten mit Hülfe Steiner'scher Verwandtschaft behandelt. Zuvörderst sei aber bemerkt, dass bei Abfassung dieses Aufsatzes übersehen worden war, dass einige der mitgetheilten Resultate bereits in Fiedlers Bearbeitung von Salmons „Higher plane Curves", pag. 321 enthalten sind. Man findet dort schon angegeben die Gleichungen der vier Doppeltangenten und die des Kegelschnittes, der die acht Berührungspunkte der Doppeltangenten enthält. Es ist daher nur über die weiteren Resultate zu berichten.

Es wurde ein System von Curven 4. Ordnung, alle mit den nämlichen Doppelpunkten p, q, r betrachtet, welches geometrisch so definirt werden kann. Man geht von einer bestimmten Curve W aus, die die specielle Eigenschaft besitzt, dass ihre Tangenten in den Doppelpunkten zugleich Wendetangenten sind. Schneidet man diese Curve mit irgend einer Geraden G, so bilden alle Curven 4. Ordnung mit Doppelpunkten in p, q, r, welche durch die Schnittpunkte von W und G gehen, einen Büschel. Gibt man der Geraden G alle möglichen Lagen, und bestimmt für jede den zugehörigen Büschel, so bilden alle diese Büschel das betrachtete System. Ein solches System enthält nur eine Curve W und ist durch diese individualisirt. Bei zwei demselben Systeme angehörigen und die Curve W auf den Geraden G und G' schneidenden Curven liegen ihre eigenen Schnittpunkte ebenfalls in einer Geraden Γ, und G, G', Γ treffen sich in einem Punkte. Lässt man eine Curve das betrachtete System durchlaufen, so beschreiben bei jeder Doppeltangente die beiden Berührungspunkte einen Kegelschnitt S, und diese vier Kegelschnitte

S gehen auch durch die Doppelpunkte. Durchläuft die Curve einen der vorhin erwähnten Büschel, so dreht sich jede Doppeltangente ausserdem um einen festen Punkt, und diese vier Punkte liegen auf der dem Büschel zugehörigen Geraden G. Bestimmt man für eine Curve C und für die ihr zugehörige Curve W resp. die Kegelschnitte Σ und Σ_w, welche die Berührungspunkte der bezüglichen vier Doppeltangenten enthalten, so haben diese beiden Kegelschnitte eine doppelte Berührung, und die Berührungssehne ist die der Curve C angehörige Gerade G.

Sucht man bei einem gegebenen Kegelschnitte K die vier Kegelschnitte auf, welche den K doppelt berühren und zugleich einem gegebenen Dreiecke pqr umschrieben sind, und bestimmt dann durch p, q, r als Doppelpunkte und durch fünf jener Berührungspunkte eine Curve 4. Ordnung, so geht diese auch durch die drei übrigen Berührungspunkte. Nimmt man aber an Stelle von K den Kegelschnitt Σ_w, welcher die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer Curve W enthält und für p, q, r die Doppelpunkte der letztern, so ist die erwähnte Curve 4. Ordnung die Curve W selbst. Die vier den Σ_w doppelt berührenden Kegelschnitte sind identisch mit den Kegelschnitten S, von denen jeder durch die Berührungspunkte einer Doppeltangente und durch die Doppelpunkte geht; und die Berührungssehnen sind die Doppeltangenten der Curve W.

Die Curven W haben ferner die Eigenschaft, dass der durch die Berührungspunkte ihrer Doppeltangenten gehende Kegelschnitt Σ_w zugleich derjenige ist, der von den sechs Tangenten in den Doppelpunkten eingehüllt wird.

Indem nun noch auf den Fall eingegangen wurde, dass die Curve 4. Ordnung drei Rückkehrpunkte hat, ergab sich die folgende Kegelschnittbeziehung. Zu jedem einem Dreiecke pqr eingeschriebenen Kegelschnitte gehört ein bestimmter dem Dreiecke umschriebener Kegelschnitt, welcher den erstern doppelt berührt, und umgekehrt. Die Berührungspunkte sind jedesmal imaginär, wenn das Dreieck reell ist; die Berührungssehne aber trifft die Seiten des Dreiecks in den Punkten, die bezüglich der Ecken desselben harmonisch zugeordnet sind zu den Berührungspunkten des eingeschriebenen Kegelschnittes, und durch dieselben Punkte gehen auch die in den Ecken des Dreicks an den umschriebenen Kegelschnitt gelegten Tangenten. Es mag gestattet sein hieran noch folgendes anzuschliessen. Bei einer Curve 4. Ordnung mit drei Spitzen p, q, r

haben die beiden Kegelschnitte, von denen der eine durch die Spitzen und durch die Berührungspunkte der Doppeltangente geht, der andere die Seiten des Dreiecks pqr in den Punkten berührt, in denen diese Seiten von den Rückkehrtangenten getroffen werden, mit einander eine doppelte Berührung, und die Berührungssehne ist die Doppeltangente der Curve 4. Ordnung. Hieraus ergibt sich, wenn die Spitzen und die Rückkehrtangenten reell gegeben sind, eine einfache Construction für die Doppeltangente, die alsdann imaginäre Berührungspunkte hat.

Für die den Curven 4. Ordnung mit drei Spitzen dualistisch gegenüberstehenden Curven 3. Ordnung mit einem Doppelpunkte hat man die folgenden Eigenschaften: Wenn man bei einer Curve 3. Ordnung mit einem Doppelpunkte die beiden Kegelschnitte aufsucht, von denen der eine die drei Wendetangenten und die Tangenten des Doppelpunktes berührt, der andere aber dem Dreiecke der Wendetangenten umschrieben ist und in den Ecken desselben diejenigen Geraden zu Tangenten hat, welche diese Ecken mit den gegenüberliegenden Wendepunkten verbinden, so hat der letztere Kegelschnitt mit dem ersteren eine doppelte Berührung, und ihre gemeinschaftlichen Tangenten sind die Tangenten des Doppelpunktes. Bei dem zuerst genannten Kegelschnitte gehen die Geraden, welche die Durchschnitte je zweier Wendetangenten mit den Berührungspunkten auf der dritten Wendetangente verbinden, alle drei durch den Doppelpunkt. Je zwei Wendetangenten werden durch die von ihrem Durchschnittspunkte nach dem Doppelpunkte und nach dem dritten Wendepunkte gehenden Strahlen harmonisch getrennt.

Prag. H. Durège.

M. Krause: Ueber die Discriminante der Modulargleichungen der elliptischen Functionen. (Math. Annalen. Bd. VIII.)

Bei Einführung der bekannten Hermite'schen φ-Function haben die Wurzeln der Modulargleichungen der elliptischen Functionen, welche zu einer Transformation $n$ten Grades gehören, vorausgesetzt, dass n eine unpaare Zahl ohne quadratischen Theiler ist, die Form:

$$\left(\frac{2}{\delta}\right) \varphi\left(\frac{\delta\tau - 16\,\xi}{\delta_1}\right)$$

wo δ ein beliebiger Theiler von n, $\delta\delta_1 = n$ ist und ξ eine jede ganze Zahl kleiner δ_1 bedeuten kann.

Der Verfasser der obigen Abhandlung stellt sich die Aufgabe, alle τ zu finden, für welche zwei solcher Wurzeln einander gleich werden. Die Lösung dieser Aufgabe gibt zu gleicher Zeit die Wurzeln der Discriminante der Modulargleichung, da diese ja nichts anderes sind, als die zugehörigen Functionen $\varphi(\tau)$.

Es wird nun zuerst gezeigt, dass diese Grössen τ einer quadratischen Gleichung genügen:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

und dann die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen aufgestellt, denen die Coefficienten dieser Gleichung Genüge leisten müssen. Hierbei bleibt der Fall ausgeschlossen, dass P, Q, R mit n denselben gemeinsamen Theiler haben.

Breslau. M. Krause.

A. Radicke: Ueber die mathematische Darstellung der Riemann'schen P-Function. (Programm der Realschule I. O. zu Bromberg, Ostern 1875.)

Eine der wichtigsten Aufgaben der neueren Functionentheorie ist bekanntlich die, Functionen, die durch gewisse charakteristische Eigenschaften entweder eindeutig oder n-deutig oder bis auf eine oder mehrere willkürliche Constante definirt sind, mathematisch darzustellen. Im Grunde genommen geht man bei den verschiedenen Methoden, die zur Erreichung dieses Zieles angewendet werden, von demselben Satze aus, der zugleich an sich die mathematische Darstellung der einfachsten Gattung von Functionen liefert, dem Satze nämlich, „dass eine in der ganzen unendlichen Ebene überall eindeutige und stetige Function eine Constante ist". Sobald man dann von der darzustellenden Function w weiss, dass sie, mit einem gewissen durch seine analytische Form gegebenen Factor M multiplicirt, ein in der ganzen Ebene eindeutiges und stetiges Product liefert, so ist die Function w durch den Ausdruck M^{-1} bis auf einen willkürlichen constanten Factor mathematisch dargestellt. In den meisten Fällen reicht man freilich mit dieser einfachen Betrachtung nicht aus, sondern man ist genöthigt, eine Gleichung, meist eine Differenzialgleichung herzuleiten, der die Function Genüge leistet, und diese dann aufzulösen. Aber die Coefficienten

dieser Gleichung werden auch dann nur vermittelst des obigen allgemeinen Princips zu bestimmen sein. Ein vortreffliches Beispiel für diese Methode findet sich in der bekannten Riemann'schen Abhandlung über die Gauss'sche Function $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ aus dem Jahre 1857 (Ber. der Soc. der Wiss. zu Göttingen), in der die Zweige einer durch ihre charakteristischen Eigenschaften gegebenen Function P als Particularlösungen einer gewissen linearen homogenen Differenzialgleichung 2. Ordnung erkannt werden; da letztere durch Reihen oder bestimmte Integrale integrirt werden kann, so ist hierdurch die Darstellung der Zweige gewonnen.

Eine andere Methode zur Darstellung eben dieser Zweige der Riemann'schen Function P ist in der in der Ueberschrift genannten Arbeit zur Anwendung gekommen. Sie dürfte deshalb auf einiges Interesse Anspruch machen, weil sie eine ganz unmittelbare Folge des vorangeschickten allgemeinen Princips ist. Der Verfasser zeigt nämlich, dass aus den Zweigen P^α, $P^{\alpha'}$, P^β, $P^{\beta'}$, P^γ, $P^{\gamma'}$ durch wiederholte Differenziation resp. Integration in gewissen besondern Fällen, und im allgemeinen Falle durch diejenige Rechnungsoperation, welche von Liouville die Differenziation mit beliebigem Index genannt ist, neue Functionen sich ergeben, die ebenso, wie die vorhin besprochene Function w, durch einfache Multiplication mit einem Factor M constant werden. Wendet man dann auf diese neuen Functionen die inversen Rechnungsoperationen an, so hat man die Darstellung der Zweige P^α etc. selbst. Wenn beispielsweise von dem Ausdruck $D_z^\mu \cdot P^\alpha$ gefunden ist, dass er, mit M multiplicirt, ein in der ganzen Ebene eindeutiges und stetiges Product liefert, so wird P^α gleich $D_z^{-\mu} \cdot \{M^{-1}\}$ vermehrt um seine complementäre Function sein. Wir können auf die Details dieser Methode natürlich nicht näher eingehen, verweisen vielmehr in Betreff derselben auf die Arbeit selbst und begnügen uns damit, hier noch folgendes Resultat hervorzuheben: Das allgemeine Integral der Differenzialgleichung der hypergeometrischen Reihe

$$x(1-x)y'' + \big(\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\big)y' - \alpha\beta y = 0$$

kann, wie bekannt, in drei verschiedenen analytischen Formen dargestellt werden:

$$\text{(I)}\quad CF(\alpha, \beta, \gamma, x) + C' x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x)$$

$$\text{(II)}\quad C_1 \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}dt + C_1' \int_\infty^{\frac{1}{x}} t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}dt$$

$$\text{(III)} \quad C_2 x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} D_x^{-\alpha} \cdot \left\{x^{\gamma-\alpha-1}(1-x)^{\beta-\gamma}\right\} + C_2' D_x^{\alpha-1} \cdot \left\{x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1}\right\},$$

worin $CC'C_1C_1'C_2C_2'$ willkürliche Constante bedeuten.

Während aber die beiden Ausdrücke I und II nur eine beschränkte Gültigkeit haben, so dass für die Umgebung von $x = 1$ und für sehr grosse Werthe der Variablen andere Darstellungsformen nothwendig werden, gilt der Ausdruck III unbeschränkt für die ganze unendliche Ebene, und es ergeben sich aus ihm die für die einzelnen Gebiete convergenten Reihen, je nachdem man unter dem Zeichen D nach steigenden Potenzen von x, $1 - x$ oder $\frac{1}{x}$ entwickelt. Durch den Ausdruck III ist also die in Rede stehende Function ebenso allgemein definirt, wie durch die Differenzialgleichung oder durch Riemann's P, während die Definition durch die hypergeometrische Reihe oder durch das ihr proportionale bestimmte Integral gewissen Beschränkungen unterworfen ist.

Bromberg. A. Radicke.

V. Schlegel: Die Elemente der modernen Geometrie und Algebra. Nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre und mit Berücksichtigung verwandter Methoden dargestellt. A. u. d. T. System der Raumlehre. 2. Theil. (Leipzig. Teubner. 1875.)

Der Zweck dieses Werkes ist, die in Grassmann's Ausdehnungslehre niedergelegten Ideen in ähnlicher Weise für die Lehren der modernen Geometrie und Algebra zu verwerthen, wie es im 1. Theil für die Elemente der Geometrie geschehen war. Im Allgemeinen lässt sich die Stellung, welche Grassmann's Arbeiten gegenwärtig zu den Leistungen der Zeitgenossen einnehmen, am besten durch die Worte charakterisiren, mit welchen ein Aufsatz der Math. Annalen über die mathematischen Arbeiten von Clebsch (Bd. 7, S. 12) der Grassmann'schen Leistungen gedenkt: „Man beginnt erst in der letzten Zeit, auf die Grassmann'schen Arbeiten zurückzugehen und bemerkt, dass Grassmann bereits in den vierziger Jahren eine Reihe sehr umfassender Ideen concipirte, welche der Process allgemeiner geometrischer Entwickelung erst in der Zwischenzeit ausgebildet, zum Theil aber noch gar nicht berührt hat". Da das

Studium der Grassmann'schen Originalwerke einerseits durch die grosse Allgemeinheit und den abstracten Charakter der Untersuchung, andererseits durch den Mangel einer befriedigenden Gliederung grosse Schwierigkeiten bietet, so war es von vornherein das Streben des Verfassers, einerseits durch stufenweises Aufsteigen vom Speciellen zum Allgemeinen, andererseits durch Einfügung des ganzen Stoffes in ein logisch gegliedertes System eine leicht fassliche und übersichtliche Darstellung zu erreichen. Form und Inhalt des zweiten Bandes ist hiernach mehrfach durch die Rücksicht auf den ersten bestimmt worden.

Ueber den Inhalt dieses zweiten Bandes ist Folgendes zu bemerken. Die der Ausdehnungslehre eigenthümlichen Operationen (die sich als Erweiterungen des gewöhnlichen Multiplicationsbegriffs darstellen und die Besonderheit bieten, dass sie im Allgemeinen nicht an Zahlen, sondern an Raumgrössen ausgeführt werden) waren zwar bereits im 1. Bande vollständig aufgestellt und mannigfach angewendet worden. Es fehlten jedoch einige für den Inhalt des 2. Bandes wesentliche Anwendungen, welche nunmehr in der *Einleitung* vorangeschickt sind. Es wird hier zuerst der Begriff des unendlich fernen Punktes erörtert, und seine Identität mit dem der Strecke nachgewiesen. Dann folgt die Zurückführung der Massbeziehungen auf projectivische, zunächst für das Gebiet der Geraden. Ferner wird die Curve n. Grades (α) als Function eines variablen Punktes x dargestellt, und für die Gleichung derselben die allgemeine Form $\alpha x^n = 0$ gefunden, eine Form, durch welche (mit veränderten Exponenten von α und x) nicht nur alle aus der Function ableitbaren Formen (Invarianten, Covarianten etc.) sich darstellen lassen, sondern welche sich auch unmittelbar in jede beliebige Coordinaten-Gleichung verwandeln lässt. Endlich werden aus einem allgemein aufgestellten Multiplicationsbegriff die verschiedenen in der Ausdehnungslehre verwendeten Multiplicationen (einschliesslich der algebraischen) durch Specialisirung abgeleitet, wobei sich die völlige Gleichberechtigung aller dieser Multiplicationen herausstellt.

Die 1. Abtheilung, welche eine Lücke des 1. Bandes auszufüllen bestimmt ist, behandelt die elementaren Eigenschaften der Kegelschnitte, indem dieselben als Resultate der Bewegung eines Punktes mit Rücksicht auf einen festen Kreis betrachtet werden. Es ergeben sich aus dieser Form der Darstellung mancherlei die Anschaulichkeit und Kürze betreffende Vortheile.

Die 2. Abtheilung (Projectivität von Punkten und Linien) behandelt nach einander Halbirungspunkte und -Linien, harmonische, involutorische und projectivische Punktreihen und Strahlenbüschel; wobei die Begriffe der Involution und Projectivität auf Vereine von Punkten, die nicht in einer Geraden liegen, und von Geraden, die nicht durch einen Punkt gehen, ausgedehnt werden. Den Schluss bilden die Eigenschaften des Pascal'schen und des Brianchon'schen Sechsecks. — Die in dieser Abtheilung erscheinenden Methoden und Bezeichnungen haben äusserlich eine nicht geringe Aehnlichkeit mit denen der neueren analytischen Geometrie, wie sie namentlich von Hesse ausgebildet worden. Doch besteht ein wesentlicher begrifflicher Unterschied. Die symbolischen Gleichungen von der Form $a = 0$, durch welche sonst Punkte und Linien dargestellt werden, sind nur abgekürzte Bezeichnungen für mehr oder weniger verwickelte Coordinatenausdrücke. Es muss nun, nachdem der wesentliche Charakter dieser Ausdrücke durch die Abkürzung verschwunden ist, als ein weiterer Fortschritt in der Bezeichnung angesehen werden, wenn es gelingt, diese einfachen Symbole ohne den Umweg durch die Coordinatenausdrücke zu erlangen. Zu diesem Fortschritte führen aber die Methoden der Ausdehnungslehre ganz von selbst, da sie eben lehren, dieselben Rechnungen mit Punkten und Linien auszuführen, welche sonst an den symbolischen Gleichungen dieser Gebilde vollzogen werden. Diese gedankliche Vereinfachung bewirkt gleichzeitig einen engeren Anschluss der geometrischen Deutung an die Rechnung, als er bisher möglich war, und an vielen Stellen eine bedeutende Vereinfachung der Betrachtrachtungen wie der Rechnungen.

Die 3. Abtheilung enthält die Lehre von den zusammengesetzten Grössen, an deren Spitze sich vermöge seiner besonderen einfachen Eigenschaften *der Kreis* stellt. Hier werden vorzugsweise die Sätze über Systeme von Kreisen, die sich in 2 oder 1 Punkte schneiden, abgeleitet. — Es folgt die Lehre von den *Determinanten*. Der Begriff der ursprünglichen Einheiten, wie ihn die Ausdehnungslehre aufstellt, erweist sich hier als ein besonders fruchtbarer, indem er nicht nur eine sehr einfache Definition (die Determinante ist der Zahlfactor eines äusseren Productes aus n linearen Factoren, deren jeder aus denselben n Einheiten abgeleitet ist) und eine angemessene und bequeme Bezeichnung herbeiführt, sondern auch alle Determinantensätze in kürzester und klarster Weise liefert. Der Grund dieser Erscheinung liegt darin, dass alle Regeln und Sätze über

Determinanten in den Eigenschaften der äusseren Multiplication ihren Ursprung haben, und dass die ursprünglichen Einheiten die natürlichen Objecte dieser Operation sind. Der Verfasser gelangt zu dem Schluss, dass die äussere Multiplication dieser Einheiten für die Determinantenlehre von ähnlicher Bedeutung sei, wie das Rechnen mit Polynomen für die Theorie der dekadischen Zahlen. Der Begriff der Functionsdeterminante, speciell der Hesse'schen Determinante (für welche sich, wenn αx^n die gegebene Function und p die Zahl der Variablen ist, der ähnliche Ausdruck $\alpha^p x^{p(n-2)}$ ergibt), führt schliesslich auf die Lehre von den *räumlichen Functionen*. Nachdem die allgemeinen Bildungsgesetze der abgeleiteten Formen (Invarianten, Covarianten etc.) erörtert worden sind, werden die binären Formen 2. 3. und 4. Grades, die Systeme ihrer Formen, sowie die wichtigsten simultanen Systeme, und ihre geometrische Bedeutung betrachtet, von den ternären Formen die quadratischen, und die simultanen Systeme von 2 und 3 solchen Formen. Den Schluss bildet die Erweiterung der in der Einleitung gegebenen projectivischen Darstellung der Massbeziehungen für das Gebiet der Ebene. — Das Eigenartige der Darstellung in diesem Abschnitt besteht in der aus den Gesetzen der Ausdehnungslehre mit Nothwendigkeit sich ergebenden Bezeichnungsweise, welche an die Stelle der sonst üblichen Symbolik tritt. Indem ferner die symbolischen Rechnungen durch die oben erwähnten Multiplicationen ersetzt werden, ergibt sich die geometrische Bedeutung der Formen, sowie ihr Zusammenhang untereinander mit einer überraschenden Einfachheit, ohne dass man nöthig hat, die complicirten Coordinatenausdrücke zu bilden. So sagt z. B., wenn α ein Punktepaar, und x und y Punkte auf derselben Geraden sind, die Gleichung $\alpha xy = 0$, dass x und y mit α harmonisch sind, $(\alpha\beta) = 0$, dass α und β harmonische Punktepaare sind, $(\alpha\beta)x^2 = 0$, dass das Paar $(\alpha\beta)$ mit den Paaren α und β gleichzeitig harmonisch ist, $(\alpha\beta\gamma) = 0$, dass die drei Paare α, β, γ involutorisch sind, etc. Hierbei ist $(\alpha\beta)$ simultane Invariante zweier, $(\alpha\beta\gamma)$ dreier, $(\alpha\beta)x^2$ simultane Covariante von zwei binären quadratischen Formen. — Weniger wichtig für geometrische Zwecke erscheint die Formenbildung durch Multiplication von Determinanten; dieselbe ist jedoch in paralleler Darstellung beigefügt, da sie vorläufig für manche algebraischen Untersuchungen noch nicht zu entbehren ist. Auch auf die canonischen Formen wird wenig Werth gelegt; dieselben werden (mit geometrischer Interpretation) zwar gebildet, jedoch für die Folge nicht weiter benutzt. Im Ganzen tritt

durch den Wegfall der Coordinaten eine schärfere Scheidung ein zwischen den wesentlichen Eigenschaften einer Form und denjenigen, welche eben nur in besonderen Beziehungen der Coordinaten bestehen. Es würde die Uebersichtlichkeit und Fasslichkeit der Lehren der modernen Algebra ungemein erhöhen, wenn diese Scheidung des geometrisch Wichtigen von dem rein Algebraischen zur allgemeinen Durchführung gelangte, und wenn die so verschiedenartige, willkürliche und complicirte Symbolik der verschiedenen Autoren einer einheitlichen, sachgemässen und einfachen Bezeichnungsweise Platz machte, wie sie herzustellen im letzten Theile dieses Buches versucht worden ist. Die Hauptbedingung für das Gelingen einer wirklich nützlichen Reform auf diesem Gebiete scheint die Emancipation von den Coordinaten zu sein. Denn bei allem Nutzen, den die Coordinaten auf anderen Gebieten gewähren, ist doch nicht zu übersehen, dass diese dem Gegenstande der Untersuchung fremden Gebilde hier nur zu oft den Blick vom Wesentlichen ablenken, ganz abgesehen von der Weitläufigkeit der Bezeichnungen und Rechnungen, die sich von ihrem Gebrauche nicht trennen lässt.

Waren. V. Schlegel.

R. Hoppe: Zum Problem des dreifach orthogonalen Flächensystems. (Grunert's Archiv LV. 362—391. LVI. 153—162. 250—266. LVII. 89—106. 255—276. 366—384. LVIII. 37—48.

Das genannte Problem wird vermittelt durch die Darstellung eines der Variation fähigen Systems von Krümmungslinien auf einer mitvariirenden Fläche. Ein solches System wird gewonnen unter Zugrundelegung der ihm entsprechenden Indicatrix der Normale, d. i. eines beliebig gegebenen orthogonalen Curvensystems auf der Kugel für den Radius = 1. Zuerst nämlich bestimmt eine lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{\partial^2 m}{\partial u \partial v} + \frac{\partial m}{\partial u} \frac{\partial \log M}{\partial v} = \frac{\partial m}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\partial M}{M N \partial v} \tag{8}$$

den einen Hauptkrümmungsradius m, woraus dann der andere n gemäss der Relation

$$n \frac{\partial M}{\partial v} = \frac{\partial (M m)}{\partial v}$$

ohne neue Integration folgt, und nachher ergeben sich sofort durch blosse Quadratur die Gleichungen der Fläche

$$x = \int \left(m \frac{\partial p}{\partial u} \partial u + n \frac{\partial p}{\partial v} \partial v \right); \; y = \text{etc.}$$

in Parametern der Krümmungslinien u, v. Hier sind die Richtungscosinus der Normale p, q, r, und demnächst die Grössen

$$M^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2; \quad N^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2$$

als gegeben in u, v zu betrachten. Da die Integration der Gl. (8) 2 willkürliche Functionen einführt, so löst sie die Aufgabe, die Flächenfamilie von gemeinsamer Indicatrix des Normalensystems zu bestimmen. Man kann nun von da zu der weitern Untersuchung schreiten, welche dreifach orthogonalen Flächensysteme eine Flächenschaar aus jener Familie besitzen, indem man alle hinzugetretenen Constanten mit einem dritten Parameter w variiren lässt, und für u und v Functionen von (u, w) und (v, w) substituirt. Die Bedingungsgleichungen der Orthogonalität nach w sind dann wieder linear, die Integrationen haben meist keine Schwierigkeit, und es handelt sich mehr um Scheidung der Fälle der Vereinbarkeit und Unvereinbarkeit. In dieser Weise sind in den 5 ersten Artikeln 2 Flächenfamilien behandelt, beide von der Eigenschaft, dass die rechte Seite der Gl. (8) null ist. Bei der ersten besteht die stereographische Projection des Systems der Indicatricen aus 2 Kreisschaaren, bei der zweiten aus einer Schaar Gerader und ihren parallelen Trajectorien. Der 6. Artikel sucht die Familie, welcher die Flächen 2. Grades angehören; der 7. die orthogonalen Flächensysteme, deren eine Schaar selbst 2. Grades ist.

Berlin. R. Hoppe.

R. Hoppe: Beispiel einer einseitigen Fläche. (Grunert's Arch. LVII. 328—334.)

Betrachtung der geschlossenen Fläche

$x = \cos u \cos 2v$; $y = \cos u \sin 2v$; $z = \sin u (\cos v - \cos u \sin v)$

deren eine Seite stetig in die andere verläuft.

Berlin. R. Hoppe.

R. Hoppe: Ueber die Symmetriepunkte des Dreiecks. (Grunert's Arch. 422.)

Die Symmetriepunkte werden nach barycentrischer Bestimmung definirt. Die Betrachtung knüpft sich hauptsächlich an die Beziehung zwischen Punkten und von denselben erzeugte Linien für reciproke Belastung der Ecken. Insbesondere werden die Kegelschnitte untersucht, welche Geraden als reciproke Linien entsprechen.

Berlin. R. Hoppe.

P. Bachmann: Arithmetische Kleinigkeiten. (Zeitschrift für Math. und Physik, 20. Jahrg.)

Unter diesem Titel habe ich zwei kleine Bemerkungen veröffentlicht, deren erste die Aufgabe löst: alle diejenigen pythagorischen Zahlen explicite zu bestimmen, bei welchen die kleineren beiden zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen sind.

In der zweiten beweise ich den Satz, dass der Quotient

$$\frac{1.2.3\ldots 2a.1.2.3\ldots 2b}{1.2.3\ldots a.1.2.3\ldots(a+b).1.2.3\ldots b}$$

eine ganze Zahl sei. Dieser Satz, von Catalan scheinbar aus der Theorie der elliptischen Functionen erhalten, findet sich in den Nouv. annal. de math. par M. Gérono t. 13 als question 1135 aufgestellt; ein Beweis desselben ist bisher daselbst nicht gegeben worden, denn der Satz, welchen Bourguet ebend. t. 14 pag. 89 bewiesen hat, enthält jenen, wie Catalan pag. 179 richtig bemerkt, keineswegs als einen speciellen Fall.

Münster. P. Bachmann.

L. Burmester: Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung gesetzmässig-veränderlicher Systeme (dritte Mittheilung). (Zeitschrift für Mathem. und Physik, Bd. 20, S. 381—422, nebst 2 Tafeln.)

In der Geometrie der Bewegung wurde bis jetzt vorzugsweise die Bewegung der starren ebenen und räumlichen Systeme erforscht und vom kinematischen Standpunkte aus besonders auf die praktische

Verwerthung Rücksicht genommen. Die Emporsteigung zur höheren Allgemeinheit erfordert die Aufhebung der Schranken, welche die bisherigen Grundlagen umschliessen; daher bildet dem Wesen dieser Disciplin gemäss die Voraussetzung bewegter gesetzmässig-veränderlicher Systeme das unbegrenzte fruchtbare Fundament, auf dem sich die höheren Stufen kinematisch-geometrischer Forschung entwickeln. Die Ergebnisse sind in jeder Hinsicht von hoher Allgemeinheit, weil sie auf der breiten Basis der Annahme bewegter veränderlicher Systeme stehen; und die Gesetze, welche sich ergeben, liefern einen unermesslichen Reichthum kinematisch-geometrischer Beziehungen, die specialisirt auch für die Bewegung starrer Systeme gelten. Für die ersten Behandlungen der Bewegung veränderlicher Systeme schien mir die synthetische Methode am zweckmässigsten, weil sie durch die Anschauung zur geometrischen Klarheit und besseren Uebersichtlichkeit führt; daher sind die fundamentalen Beziehungen und die wichtigsten Folgerungen durch rein-synthetische Betrachtungen abgeleitet, in denen zugleich die Directive für eine höhere analytische Behandlung liegen. Die Einwirkung der kinematischen Methode auf die analytische Mechanik wird in der Folge grossen Nutzen bringen und die bekannten Sätze der Phoronomie werden sich als Glieder eines umfassenden grossen Organismus manifestiren.

In den beiden ersten Abhandlungen (Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 19.), welche der oben genannten dritten Mittheilung vorangehen, wurden die Grundzüge der Bewegung ebener Systeme untersucht, welche in ihren verschiedenen Phasen ähnlich, affin, oder collinear bleiben. In der dritten Abhandlung wird die Untersuchung der collinear-veränderlichen ebenen Systeme besonders in Hinsicht auf das wichtige Princip der Umkehrung der Bewegung fortgesetzt, und hierauf werden unsere synthetischen Betrachtungen auf die Bewegung der collinear-veränderlichen räumlichen Systeme, so wie der kreisverwandt-veränderlichen ebenen Systeme ausgedehnt. Bei einem collinear-veränderlichen System bleibt eine Gerade während der Bewegung in allen Systemphasen eine Gerade; bei dem kreisverwandt-veränderlichen System bleibt jeder Kreis in allen Phasen des Systems ein Kreis, der, wenn sein Durchmesser unendlich gross wird, in eine Gerade übergeht. Eine Gerade, welche wir als einen unendlich grossen Kreis ansehen, verwandelt sich durch den Uebergang von einer Phase zur anderen in einen Kreis. Durch die Untersuchung der Bewegung des kreisverwandt-veränderlichen Systems werden die ersten Stadien des Weges eröffnet, der zu den

höheren Stufen kinematisch geometrischer Beziehung führt. Die Kreisverwandtschaft ist ein besonderer Fall der Verwandtschaft zweiten Grades. Es bleibt dann noch für die nächste Folge die Behandlung der Bewegung solcher veränderlicher Systeme, deren Phasen in Verwandtschaft zweiten Grades stehen, um durch Uebertragung von hieraus zu der Cremona'schen Verwandtschaft zu gelangen. Damit ist dann der Weg zu der höchsten Stufe kinematisch-geometrischer Beziehungen, der Bewegung rational-veränderlicher Systeme gebahnt, deren Phasen in Cremona'scher Verwandtschaft bleiben.

Im ersten Theile der dritten Abhandlung wird die Bewegung der collinearen ebenen Systeme behandelt und der nachstehende fundamentale Satz, zu dem sich der duale von selbst gesellt, abgeleitet.

Sind drei Punkte eines collinear-veränderlichen ebenen Systems fest, so sind alle Bahncurven der beweglichen Systempunkte entsprechende Curven in collinearen ebenen Systemen, welche die drei festen Punkte als selbstentsprechende Punkte besitzen.

Auf diesen wichtigen Satz kann jede conplane Bewegung eines collinear-veränderlichen ebenen Systems zurückgeführt werden; denn während jeder unendlich kleinen Bewegung bleiben drei Systempunkte (die Collineationspole) fest. Ferner ergibt sich aus diesem fundamentalen Satz die Umkehrung der Bewegung. In einem collinear-veränderlichen ebenen System mit drei festen Punkten beschreiben die Punkte $A, B, C \ldots$ einer Systemcurve K, deren Phasen $K_1, K_2, K_3 \ldots$ sind Bahncurven $a, b, c \ldots$; denken wir uns diese Phasen erstarrt, so kann man dieselben als Bahncurven der Punkte einer Curve L ansehen, deren Phasen die Curven $a, b, c \ldots$ sind, und einem anderen collinear-veränderlichen System angehört, welches dieselben drei festen Punkte besitzt. Da die Curven $K_1, K_2, K_3 \ldots$ und die Curven abc.. dieselbe Curve k umhüllen, so kann die Hüllbahncurve k auf zweierlei Weise erzeugt werden, d. h. wir erhalten dieselbe Curve k, wenn die Bewegung umgekehrt wird. Eine Systemcurve K, deren Punkte A, B, C.. sich auf Bahncurven a, b, c.. bewegen, welche mit K zusammenfallen, erzeugt eine Hüllbahncurve k, die mit K identisch ist, und alle Phasen K_1, K_2, K_3.. liegen in K; hüllen diese selbst ein. Solche Curven eines veränderlichen Systems, welche sich in sich selbst bewegen, werden *Selbsthüllcurven* genannt und zeichnen sich durch viele interessante Eigenschaften aus. Als besonderer Fall solcher Curven treten die Kegelschnitte

auf, welche in zwei festen Punkten die von diesen nach dem dritten festen Punkt gehenden beiden Geraden berühren, und diese Kegelschnitte haben bei der Bewegung eines rotirenden starren ebenen Systems die in sich selbst bewegten Kreise als Analogon. Bei der allgemeinen conplanen Bewegung eines collinear-veränderlichen ebenen Systems beschreiben die drei Collineationspole eine dreitheilige Curve in der festen Ebene und in dem veränderlichen System. Die erste wird die Collineationspolbahn, die zweite die Collineationspolcurve genannt, und weitere Darlegungen liefern die wichtigen Sätze:

Bei der Bewegung eines collinear-veränderlichen ebenen Systems rollt die Collineationspolcurve auf der Collineationspolbahn.

Eine Phase K_1 einer in einem collinear-veränderlichen ebenen System S liegenden Curve K, welche eine Hüllbahncurve k erzeugt, kann als die Hüllbahncurve von der einem collinear-veränderlichen ebenen System Σ zugewiesenen Curve k angesehen werden; dabei bewegen sich die Punkte des Systems Σ auf solchen Curven, die, wenn sie dem System S angehörten, Punkte umhüllen, und die Phase o_1, der bei der ersten Bewegung auf der Collineationspolbahn ω rollenden Collineationspolcurve o des Systems S ist bei der zweiten Bewegung die Collineationspolbahn, auf der die Curve ω des Systems Σ rollt.

Diese beiden wichtigen Sätze, von denen der zweite das Princip der Umkehrung der Bewegung in sich trägt, gelten ganz allgemein für jede eindeutige Verwandtschaft, also auch für die Bewegung eines ebenen Systems, dessen Phasen in Cremona'scher Verwandtschaft stehen.

In dem zweiten Theil werden die Grundgesetze der bewegten collinear-veränderlichen räumlichen Systeme in analoger Weise wie im ersten Theil synthetisch abgeleitet und die wichtigsten Folgerungen aus dem nachstehenden fundamentalen Satz gezogen:

Sind vier Punkte eines collinear-veränderlichen räumlichen Systems fest, so sind alle Bahncurven der beweglichen Systempunkte entsprechende Curven in collinearen räumlichen Systemen, welche die vier festen Punkte als selbstentsprechende Punkte besitzen.

Durch eine briefliche Mittheilung des Herrn Reye bin ich nach dem Erscheinen meiner Abhandlung belehrt worden, dass dieser wichtige Satz schon in v. Staudt's Beiträgen zur Geometrie der Lage (Heft III, S. 332) enthalten ist; und es ist zu bedauern, dass die unübersehbare Fruchtbarkeit desselben, welche sich durch die kinematisch-geometrische Interpretation ergibt, nicht früher entdeckt wurde. Durch die synthetischen Darlegungen ist dieser Satz zwar

nur für vier reelle, so wie für zwei reelle und zwei imaginäre feste Punkte bewiesen; analytisch lässt sich auch leicht seine Gültigkeit nachweisen, wenn alle vier Punkte imaginär sind. Jede unendlich kleine Bewegung eines collinear-veränderlichen räumlichen Systems kann als eine solche mit vier festen angesehen werden. Die Umkehr der Bewegung ergibt sich in gleicher Weise wie für das ebene System, zu den Selbsthüllcurven treten hier als Analogon die *Selbsthüllflächen*; ferner folgt aus jenem fundamentalen Satz die Eigenschaft eines tetraedralen Strahlencomplexes, dass derselbe wandelnd in sich selbst übergeht.

Der dritte Theil enthält die Grundbeziehungen der Bewegung des kreisverwandt-veränderlichen Systems, welche durch Inversion aus der Bewegung des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems abgeleitet werden. Das Fundament der Folgerungen bildet der Satz:

Sind zwei Punkte eines kreisverwandt-veränderlichen ebenen Systems fest, so sind alle Bahncurven der beweglichen Systempunkte entsprechende Curven in kreisverwandten Systemen, welche diese festen Punkte als selbstentsprechende Punkte besitzen.

Da im ähnlich-veränderlichen ebenen System die logarithmischen Spiralen Selbsthüllcurven sind, so ergibt sich durch Inversion, dass im kreisverwandt-veränderlichen ebenen System logarithmische Doppelspiralen als Selbsthüllcurven auftreten.

Durch stereographische Projection wird zu der Bewegung kreisverwandt-veränderlicher ebener Systeme auf der Kugelfläche das Analogon erhalten. Bei der Bewegung des kreisverwandt-veränderlichen Systems tritt zum ersten Male die hohe Allgemeinheit hervor; denn hier ändern sich alle Kreise und alle Gerade gehen in Kreise über, wenn sich das System aus einer Phase in die andere bewegt. Im collinear-veränderlichen System verändert sich die Punktreihe, aber nicht der gerade Träger derselben, eine Gerade bleibt in allen Systemphasen eine Gerade. Durch diese höhere Auffassung werden wir zu wichtigen interessanten Ergebnissen geführt, welche uns eine inhaltsreiche Perspective für die Weiterforschung in dem fruchtreichen Gebiete der kinematischen Geometrie eröffnen; und wir werden zu der Erkenntniss geführt, dass auch in dieser Richtung viele Schätze verborgen liegen, die erst durch tiefere Forschung gehoben werden.

Dresden. L. Burmester.

D. J. Korteweg: Ueber einige Anwendungen eines besonderen Falles der homographischen Verwandtschaft (der Affinität).

(Zeitschrift für Math. und Phys. Jahrg. 21. Heft 1.)

Den bereits von Möbius und Chasles ausgesprochenen einfachen Theoremen über die Lehre der Affinität ein neues anzureihen, war Zweck der Abhandlung. Dazu wurde der Begriff von affinen Figuren eingeführt, welche sich nämlich durch Affinität von einander ableiten lassen, wie z. B. alle Tetraëder, alle Parallelepipede, alle Ellipsoide, etc. Bezeichnet man jetzt allgemein mit A_n eine Figur affin mit einer gegebenen Figur A, so kann folgendes Theorem in allgemeinster Form ausgesprochen werden:

Steht irgend eine Figur A_p zu einer andern Figur B_p in einer Beziehung, welche durch affine Projection nicht geändert wird, und ist A_p die grösste von allen Figuren A_n die in dieser Beziehung denkbar sind, so ist B_p die kleinste aller Figuren B_n, die mit A_p in gleichartige Beziehung gebracht werden können.

Es folgt z. B. aus diesem Theoreme unmittelbar, dass: das grösste Ellipsoid in einem Tetraëder so gelegen sein muss, dass das Tetraëder zu den kleinsten gehört, die um das Ellipsoid beschrieben werden können. Oder gilt es das grösste Ellipsoid, welches die sechs Kanten eines Tetraëders (und nicht ihre Verlängerungen) berührt, so wird dieses Tetraëder das kleinste sein müssen, dessen Kanten (und nicht ihre Verlängerungen) Tangenten des Ellipsoids sind.

Es wird weiter die Affinität auf die Mechanik angewendet und einige Sätze angeführt, die aber grösstentheils schon mehr oder weniger deutlich ausgesprochen in Culmann's statischer Graphik vorkommen. Es ergibt sich daraus z. B.:

In jedem Tetraëder sind die Axen des Centralellipsoids mit den Axen des grössten eingeschriebenen Ellipsoids gleichgerichtet; beide Ellipsoide werden gleichzeitig zu Rotationskörpern.

Breda. J. Korteweg.

S. Günther: Ein stereometrisches Problem. (Archiv der Mathem. und Physik, Band 57.)

Im 56. Bande der gleichen Zeitschrift hatte Bender die Frage discutirt, wie viel congruente Kugeln mit einer Kugel des nämlichen Radius zur Berührung gebracht werden können. Sein Resultat, welches die Maximalzahl 12 ergab, war richtig, allein die Begründung erschien nicht streng genug. In der vorliegenden Arbeit ward demzufolge erstlich durch directe Berechnung gezeigt, dass es in der That nicht mehr als 12 solche Kugeln geben könne, dann aber auch ein Weg angegeben, welcher die betreffende Anzahl direct finden lehrt.

München. S. Günther.

S. Günther: Auflösung eines besonderen Systemes linearer Gleichungen. (Archiv der Mathem. und Physik, Bd. 57.)

In seiner bekannten Untersuchung über die Fortpflanzung des Schalles war Lagrange auf ein gewisses System trigonometrischer Gleichungen geführt worden, mit dessen Auflösung sich später Crelle und Unferdinger eingehend beschäftigt haben. Das betreffende System stellt sich dar als specieller Fall des nachstehenden allgemeineren:

$$\begin{aligned}
&a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n + a_{1,n}x_{n+1} + \cdots + a_{1,2}x_{2n-1} \\
&\qquad + a_{1,1}x_{2n} = A_1\,, \\
&a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n - a_{2,n}x_{n+1} - \cdots - a_{2,2}x_{2n-1} \\
&\qquad - a_{2,1}x_{2n} = A_2\,, \\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&a_{2n-1,1}x_1 + a_{2n-1,2}x_2 + \cdots + a_{2n-1,n}x_n + a_{2n-1,n}x_{n+1} + \cdots \\
&\qquad + a_{2n-1,2}x_{2n-1} + a_{2n-1,1}x_{2n} = A_{2n-1}\,, \\
&a_{2n,1}x_1 + a_{2n,2}x_2 + \cdots + a_{2n,n}x_n - a_{2n,n}x_{n+1} - \cdots \\
&\qquad - a_{2n,2}x_{2n-1} - a_{2n,1}x_{2n} = A_{2n}\,.
\end{aligned}$$

Lässt sich auch keine explicite Auflösung dieses Systemes erbringen, so gelingt es doch, die resultirenden Determinanten erheblich zu vereinfachen, und indentificirt man die erhaltenen Relationen mit den von Lagrange erhaltenen Werthen, so ergeben sich gewisse interessante Relationen für Determinanten, deren Elemente gewisse goniometrische Ausdrücke darstellen.

München. S. Günther.

S. Günther: Das independente Bildungsgesetz der Kettenbrüche. (Denkschriften der math.-phys. Klasse der k. k. Academie der Wissenschaften zu Wien. Oct. 1875.)

In der geschichtlichen Einleitung zu diesem Aufsatze werden die Bemühungen aufgezählt, das independente Bildungsgesetz der Näherungs-Zähler und Näherungs-Nenner eines Kettenbruches auszumitteln. Dieselben zerfallen in drei Kategorieen, je nachdem man nämlich direct auf combinatorischem Wege oder aber, wie dies Binet und Zehfuss thaten, durch Auflösung einer trinomischen linearen Differenzengleichung zum Ziele zu gelangen suchte; an dritter Stelle endlich erscheint die eigentliche Determinanten-Darstellung. Da jedoch auch diese keinen Einblick in die Bildungsweise der betreffenden Ausdrücke verstattet, so wird sie hier lediglich zur Basis für eine weitere Entwicklung genommen. Sobald man, was sehr einfach geschehen kann, den Kettenbruch auf die reducirte Form (vom durchgehenden Partialzähler 1) gebracht hat, handelt es sich offenbar noch darum, die allgemeinere symmetrale (gauche) Determinante von voller Diagonale

$$\begin{vmatrix} z & -\alpha_1 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & z & -\alpha_2 \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & z \ldots 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 \ldots z & -\alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots \alpha_{n-1} & z & -\alpha_n \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & \alpha_n & z \end{vmatrix}$$

in eine nach Potenzen von z fortlaufende Reihe zu entwickeln, so zwar, dass der Coefficient jeder einzelnen Potenz in geschlossener Summenform sich darstelle. Mit Hülfe eines neuen Lehrsatzes wird diese independente Darstellung erbracht und auf dieselbe dann ein Schema zur praktischen Berechnung gegründet. Dass dasselbe mit den anderen bekannten Verfahrungsweisen in Ansehung der praktischen Verwendbarkeit zum mindesten concurriren könne, wird an einem complicirteren Beispiele direct nachgewiesen.

München. S. Günther.

S. Günther: Lehrbuch der Determinantentheorie für Studirende.
(Erlangen 1875. Verlag von Eduard Besold.)

Dieses Buch ist bestimmt, zwischen den zahlreichen guten Elementardarstellungen, welche unsere Literatur besitzt, und dem grossen Handbuch von Baltzer ein Mittelglied zu bilden, auf welches hauptsächlich der akademische Unterricht des ersten Jahres sich stützen kann. Dasselbe zerfällt in 9 Kapitel. Das erste sucht von der historischen Entwickelung des Determinantencalculs in dem durch die Namen Leibnitz und Cauchy fixirten Zeitraume Rechenschaft zu geben, und zwar werden hiebei einige bisher unbekannte Leistungen der Hindenburg'schen Schule ihrem wahren Werthe nach gewürdigt. Das zweite Kapitel enthält eine ausführliche Darstellung der eigentlichen Elemente; das dritte unter dem Titel „Determinanten von besondrer Form“ die Lehre vom Differenzenproduct, den adjungirten, symmetrischen und symmetralen Determinanten, wobei auf die Behandlung der sogenannten orthosymmetrischen Determinanten ein besonderes Gewicht gelegt wird. Das vierte Kapitel bietet einen kurzen Abriss der Theorie der Determinanten vom dritten und höheren „Rang“ in einer gegen die bahnbrechenden Arbeiten italienischer Mathematiker der Bezeichnung nach verbesserten Form. An fünfter Stelle wird die Lehre von der Elimination im weitesten Sinne mit Anwendungen auf die Fürstenau'sche Methode, die independente Darstellung der Bernoulli'schen Zahlen, recurrirende Reihen, Discriminanten etc., vorgetragen. Das sechste Kapitel enthält eine umfassende Theorie der Kettenbruchdeterminanten, das siebente eine Anzahl geometrischer Beispiele: Dreiecksinhalt, Tetraëdervolumen, Hauptaxenproblem. Dann folgt die Theorie der Functionaldeterminanten, welche nach Begründung der Hauptsätze die Transformation der bestimmten Integrale, das Krümmungsmass und die Lehre von der Hesse'schen Determinante erledigt. Das neunte Kapitel endlich behandelt „lineare Substitutionen“ und schliesst mit der Darstellung der Untersuchungen von Weierstrass über bilineare Functionen.

München. S. Günther.

A. Pringsheim: Zur Transformation zweiten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. (Math. Annalen Bd. IX.)

Wie Herr Professor Koenigsberger im 67. Bande des Crelle'schen Journals gezeigt hat, geht eine hyperelliptische Thetafunction mit zwei Variablen durch eine Transformation zweiten Grades in ein Aggregat von vier Theta-Quadraten oder von zwei Theta-Producten über, je nachdem gewisse mit $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ bezeichnete, für die Transformation charakteristische ganze Zahlen, die aus den Charakteristiken m_1^λ, m_2^λ, n_1^λ, n_2^λ des zu transformirenden $\vartheta_\lambda(v_1', v_2')$ und den Transformations-Zahlen des Schemas

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11}' & \sigma_{12}' & -\sigma_{12} & -\sigma_{11} \\ \sigma_{21}' & \sigma_{22}' & -\sigma_{22} & -\sigma_{21} \\ -\varrho_{21}' & \varrho_{22}' & \varrho_{22} & \varrho_{21} \\ -\varrho_{11}' & \varrho_{12}' & \varrho_{12} & \varrho_{11} \end{vmatrix}$$

zusammengesetzt sind, *sämmtlich* gerade sind oder nicht. Ich befasse mich hier speciell mit der ersten Klasse von Transformationen, also mit Transformations-Gleichungen von der Form

$$\text{(I)}\quad E\,.\,\vartheta_\lambda(v_1', v_2') = (\alpha)\vartheta_\alpha^2(v_1, v_2) + (\beta)\vartheta_\beta^2(v_1, v_2) + (\gamma)\vartheta_\gamma^2(v_1, v_2) + (\delta)\vartheta_\delta^2(v_1, v_2)$$

und leite zunächst aus deren Betrachtung einen Beweis des für *alle* Transformationen zweiten Grades gültigen Satzes her, dass —

> bei jeder Transformation zweiten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung aus dem Ausdrucke für *eine* transformirte ϑ-Function sich *drei und immer nur drei* weitere transformirte ϑ-Functionen durch Substitution von halben Perioden ableiten lassen.

Die Untersuchung der Grössen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ für alle 15 Hermite'schen Repräsentanten der nicht aequivalenten Transformations-Klassen lehrt nämlich, dass es für jede Transformation zweiten Grades gerade 4 Indices λ von der Beschaffenheit gibt, dass $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sämmtlich gerade Zahlen werden, dass mithin 4 transformirte ϑ-Functionen in der Form (I) erscheinen. Daraus folgt zunächst, dass aus einem Transformations-Ausdrucke von der Form (I) sich *höchstens* noch drei weitere durch Substitutionen halber Perioden herleiten lassen; und da diese Eigenschaft offenbar unabhängig vom Index λ und dieser besonderen Gestalt der Transformations-Gleichung ist, vielmehr lediglich auf der Beziehung der Argumente

v_1, v_2 und v_1', v_2' beruht, so gilt dieselbe für jede beliebige Transformation 2. Grades. Andererseits lässt sich zeigen, dass die Anwendung aller 15 möglichen Substitutionen halber Perioden auch *nicht weniger* als drei Veränderungen auf den Index λ hervorbringen kann, woraus dann unmittelbar der obige Satz in seiner ganzen Allgemeinheit folgt. Derselbe lässt schliesslich noch eine Erweiterung auf Transformationen von beliebigem paaren Grade zu, sofern man nur diejenigen Transformationen ausschliesst, bei denen alle Transformations-Zahlen durch 2 oder eine Potenz von 2 theilbar sind (was bei Transformationen zweiten Grades vermöge der Bedingungsgleichung $\Sigma_\alpha(\varrho_{1\alpha}\sigma'_{1\alpha} - \sigma_{1\alpha}\varrho'_{1\alpha}) = 2$ nicht stattfinden kann).

Eine weitere Betrachtung, die sich unmittelbar an die Transformations-Gleichungen von der Form (I) anknüpfen lässt, bezieht sich auf die linearen homogenen Relationen, wie sie zwischen gewissen Combinationen von 4 Theta-Quadraten stattfinden. — Da die Wahl der Indices α, β, γ, δ in (I) einzig und allein durch die Bedingung beschränkt ist, dass zwischen den betreffenden 4 Theta-Quadraten keine lineare Relation stattfindet, so folgt aus der Unmöglichkeit, für α, β, γ, δ vier Indices ungerader ϑ-Functionen zu wählen, dass zwischen den Quadraten von je vier ungeraden ϑ-Functionen eine solche Relation stattfinden muss. Combinirt man nun die 6 ungeraden ϑ-Functionen sechsmal zu je 4, in der Weise, dass man die Indices cyclisch vorrücken lässt, bestimmt alsdann die Coefficienten der Gleichungen von der Form:

$$(\alpha)\,\vartheta_\alpha^2(v_1, v_2) + (\beta)\,\vartheta_\beta^2(v_1, v_2) + (\gamma)\,\vartheta_\gamma^2(v_1, v_2) + (\delta)\,\vartheta_\delta^2(v_1, v_2) = 0$$

durch Substitution halber Perioden und Nullsetzen der Argumente, wendet alsdann auf jede der resultirenden 6 Gleichungen alle 15 möglichen Substitutionen halber Perioden an, so erhält man im Ganzen 96 homogene lineare Relationen von je 4 ϑ-Quadraten in einer sehr übersichtlichen Zusammenstellung. Dieselben sind den von Rosenhain in seinem „Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre periodes etc." S. 425 erwähnten aequivalent; behufs der Vergleichung hat man nur festzuhalten, dass den von Rosenhain für seine φ-Functionen gewählten Indices

0,0 0,1 0,2 0,3 1,0 1,1 1,2 1,3 2,0 2,1 2,2 2,3 3,0 3,1 3,2 3,3

der Reihe nach die ϑ-Indices

0 01 03 12 i.1 $-$14 i.13 i.02 2 i.24 23 01 34 i.3 4 5

entsprechen (wobei der Factor i oder das Zeichen — sich selbstverständlich auf die betreffende ϑ-Function, nicht auf den Index bezieht).

Ich betrachte schliesslich noch den speciellen Fall von Transformationen zweiten Grades, welcher die transformirte hyperelliptische ϑ-Function als ein Product zweier elliptischen ϑ-Functionen und somit die von Jacobi (in Crelle's Journal Bd. 8) auf rein algebraischem Wege hergestellte Reduction gewisser hyperelliptischer Integrale auf elliptische liefert. Die nothwendige und hinreichende Bedingung für dieses Zerfallen der transformirten hyperelliptischen Functionen in Producte von elliptischen Functionen ist die, dass der transformirte Modul $\tau_{12}' = 0$ ist und dass mithin $\vartheta_{14}(v_1', v_2')$ vermöge der Gleichung

$$\vartheta_{14}(v_1', v_2', \tau_{11}', 0, \tau_{22}') = \vartheta_1(v_1', \tau_{11}') \cdot \vartheta_1(v_2', \tau_{22}')$$

für die Nullwerthe der Argumente verschwindet. Da aber, wie Herr Koenigsberger gezeigt hat, ein gerades transformirtes ϑ für die Nullwerthe der Argumente nur dann verschwinden kann, wenn es sich in der Form (I) darstellt, und ausserdem für keine der 15 Repräsentanten-Transformationen $\vartheta_{14}(v_1', v_2')$ in der Form (I) erscheint, so folgt, dass man, um Transformationen von der gewünschten Beschaffenheit zu erhalten, jene Repräsentanten-Transformationen noch mit solchen Linear-Transformationen combiniren muss, dass $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ für den Index 14 sämmtlich gerade Zahlen werden. Ich zeige nun, dass man hierbei leicht auf die folgenden 4 Linear-Systeme geführt wird:

$$\begin{vmatrix} 1&0&1&0 \\ 0&1&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1&1&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&-1 \\ 0&0&0&1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1&0&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&1&1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&1&0 \\ 0&1&0&1 \end{vmatrix}$$

welche der Reihe nach mit den vier Grundformen der 15 Repräsentanten combinirt, 15 neue Transformations-Systeme zweiten Grades liefern, die der obigen Bedingung genügen. Die Festsetzung

$$\vartheta_{14}(v_1', v_2')_{v_1' = v_2' = 0} = (\alpha)\,\vartheta_\alpha^{\,2} + (\beta)\,\vartheta_\beta^{\,2} + (\gamma)\,\vartheta_\gamma^{\,2} + (\delta)\,\vartheta_\delta^{\,2} = 0$$

liefert dann für diese 15 Transformationen 15 verschiedene Bedingungsgleichungen von der Form

$\varphi(\varkappa^2, \lambda^2, \mu^2, \varkappa^2\lambda^2, \varkappa^2\mu^2, \lambda^2\mu^2) = 0$ (wo φ eine Linearfunction bedeutet), unter denen sich auch die von Jacobi behandelte Bedingung

$$\mu^2 = \varkappa^2\lambda^2$$

befindet. Diesen einen Fall führe ich nun vollständig durch, bediene mich jedoch hierbei nicht der betreffenden unter den eben er-

wähnten Transformationen, sondern — um schliesslich genau das Jacobi'sche Resultat zu erhalten — einer daraus durch ein neues Linear-System abgeleiteten, nämlich der Transformation

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

welche ebenfalls $\vartheta_{14}(v_1', v_2')$ in der Form (I) liefert und für $\vartheta_{14}(0, 0) = 0$ die Bedingung $\mu^2 = \varkappa^2\lambda^2$ gibt. Ich berechne nun die Ausdrücke der transformirten Theta's mit den Indices 23, 5, 0, führe darauf die Integrale ein, und drücke die ϑ-Functionen mit den Argumenten v_1, v_2 und v_1', v_2' durch die oberen Integralgrenzen, die mit Null-Argumenten durch die Integralmoduln aus. Die auf diese Weise resultirenden, ziemlich complicirten algebraischen Beziehungen geben die Reduction einer Summe von zwei hyperelliptischen Integralen von der Form:

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_1^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

(wo $R(x) = x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\varkappa^2\lambda^2 x)$),

und ebenso

$$\int_0^{x_1} \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_1^{x_2} \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

auf je eine Summe von zwei elliptischen Integralen von der Form:

$$A\int_0^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}} + B\int_0^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}};$$

Jacobi gibt die Reduction *eines* solchen hyperelliptischen Integrals. Um diese zu erhalten, hat man nur $x_2 = 1$ zu setzen, wodurch $y_2 = -y_1$ wird: alsdann gehen die erwähnten algebraischen Beziehungen genau in die von Jacobi gegebenen über, sobald man die Jacobi'schen Bezeichnungen in der richtigen Weise einführt. — Endlich wird noch erwähnt, dass die auf zwiefache Weise zu ermöglichende Bestimmung der Constanten A, B — einmal durch Einsetzen der algebraischen Transformations-Ausdrücke, dann auch vermöge der Beziehung zwischen v_1, v_2 und v_1', v_2' — eine Beziehung für die Periodicitäts-Moduln der hyperelliptischen Integrale von der Eigenschaft $\mu^2 = \varkappa^2\lambda^2$ liefert. Dieselbe lautet

$$\frac{K_{11}}{K_{21}} = -\frac{K_{11}+2K_{12}}{K_{21}+2K_{22}} = -\varkappa\lambda$$

wo K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22} die bekannten, sog. reellen Periodicitäts-Moduln des betreffenden hyperelliptischen Integrales bedeuten.

Berlin. A. Pringsheim.

Hamburger: Zur Theorie der Integration eines Systems von n linearen partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung mit 2 unabhängigen und n abhängigen Veränderlichen. (Borch. J. Bd. 81. S. 243—280.)

Hinsichtlich der Systeme simultaner partieller Differenzialgleichungen, in welchen die Zahl der Gleichungen mit der Anzahl der abhängigen Variablen übereinstimmt, sind dem Verf. ausser der von Jacobi (Crelles J. Bd. II. S. 321) ausgeführten Integration einer besonderen Klasse derselben, nämlich der s simultanen Gleichungen:

$$A_1\frac{\partial z_1}{\partial x_1}+\cdots+A_n\frac{\partial z_1}{\partial x_n}=B_1,\ \cdots\ A_1\frac{\partial z_s}{\partial x_1}+\cdots+A_n\frac{\partial z_s}{\partial x_n}=B_s$$

($A_1 \,..\, A_n$, $B_1 \,..\, B_s$ Functionen von $x_1 \,..\, x_n$, $z_1 \,..\, z_s$)

keine allgemeineren Untersuchungen bekannt geworden. Man kann indess die Methoden von Monge und Ampère zur Integration partieller Differenzialgleichungen zweiter Ordnung mit 2 Veränderlichen und namentlich die Erweiterung derselben durch Herrn Natani (Die höhere Analysis in 4 Abtheilungen. Berlin 1866, p. 365—390) auf Gleichungen höherer Ordnung und mit mehr unabhängigen Variablen als Beiträge zur Theorie der simultanen partiellen Differenzialgleichungen bezeichnen.

In der vorliegenden Abhandlung, welche durch die erwähnten Natani'schen Untersuchungen veranlasst ist, wird zunächst folgendes System von n linearen partiellen Differenzialgleichungen mit x und y als unabhängigen und $z_1 \,..\, z_n$ als abhängigen Variablen betrachtet:

$$(1)\quad \begin{cases} a_1^1 p_1+\cdots+a_n^1 p_n+\alpha_1^1 q_1+\cdots+\alpha_n^1 q_n=e_1\\ \vdots\\ a_1^n p_1+\cdots+a_n^n p_n+\alpha_1^n q_1+\cdots+\alpha_n^n q_n=e_n\,,\end{cases}$$

wo $p_\varkappa = \frac{\partial z_\varkappa}{\partial x}$, $q_\varkappa = \frac{\partial z_\varkappa}{\partial y}$, und die Coefficienten a, α, e Functionen

von $xyz_1 \dots z_n$ bedeuten. Die Aufgabe ist, die Integration des Systems (1), wenn möglich, auf die Integration von Systemen totaler Differenzialgleichungen zurückzuführen. Zu dem Ende addirt man die mit $l_1 \dots l_n$ multiplicirten Gleichungen (1) zu einander und setzt die Coefficienten der p und q in der resultirenden Gleichung den entsprechenden Coefficienten in der identischen Gleichung

$$\lambda_1 dz_1 + \lambda_2 dz_2 + \cdots + \lambda_n dz_n = p_1 \lambda_1 dx + \cdots + p_n \lambda_n dx + q_1 \lambda_1 dy + \cdots + q_n \lambda_n dy$$

proportional. Hierdurch ergeben sich zur Bestimmung der Verhältnisse der Grössen l die n Gleichungen

$$l_1(\alpha_s^1 - a_s^1 \mu) + \cdots + l_n(\alpha_s^n - a_s^n \mu) = 0 \qquad (s = 1, 2 \dots n),$$

wo μ bestimmt ist durch die Gleichung $n$ten Grades

$$f(\mu) = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 - a_1^1 \mu \cdots \alpha_1^n - a_1^n \mu \\ \vdots \\ \alpha_n^1 - a_n^1 \mu \cdots \alpha_n^n - a_n^n \mu \end{vmatrix} = 0,$$

und für die Verhältnisse der Grössen λ wird erhalten:

$$\lambda_1 : \cdots : \lambda_n = l_1 a_1^1 + \cdots + l_n a_1^n : \cdots : l_1 a_n^1 + \cdots + l_n a_n^n$$
$$= l_1 \alpha_1^1 + \cdots + l_n \alpha_1^n : \cdots : l_1 \alpha_n^1 + \cdots + l_n \alpha_n^n .$$

Führt man noch ein $v = \frac{l_1 e_1 + \cdots + l_n e_n}{l_1 a_1^1 + \cdots + l_n a_1^n}$, so lauten die zu integrirenden Systeme totaler Differenzialgleichungen

(2) $$dy = \mu dx, \qquad \lambda_1 dz_1 + \cdots + \lambda_n dz_n = \lambda_1 v dx .$$

Die Anzahl derselben ist gleich der Zahl der verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f(\mu) = 0$, also im Allgemeinen gleich n, der Fall gleicher Wurzeln macht besondere Erörterungen erforderlich, die wir hier übergehen; nur sei im Allgemeinen bemerkt, dass die Anzahl der Systeme (2) verringert wird und zwar für jede k-fache Wurzel μ um $k - 1$, dass aber in den Fällen, wo das System der zugehörigen Verhältnisse der Grössen l unbestimmt wird, indem die l sich als lineare homogene Functionen von s derselben ($1 < s \leqq k$) sich ausdrücken, die Anzahl der Gleichungen des entsprechenden Systems (2) sich um $s - 1$ vermehrt. In dem besonderen Falle, dass das Verhältniss $a_k^i : \alpha_k^i$ für alle i und k constant ist, werden alle Grössen l und also auch λ willkürlich und man erhält statt der n Systeme (2) ein einziges System von $n + 1$ totalen Differenzialgleichungen zwischen den $n + 2$ Variablen $xyz_1 \dots z_n$, also ein

System gewöhnlicher Differenzialgleichungen. Dieser Fall tritt nur ein bei dem oben erwähnten Jacobi'schen System simultaner partieller Differenzialgleichungen mit 2 unabhängigen Veränderlichen.

Betreffs des Zusammenhangs der Integrale der Systeme (2), ihre Integrabilität vorausgesetzt, mit den Integralen des Systems (1) wird ein alle in Betracht kommenden Fälle umfassender Satz bewiesen, welcher für den Fall lauter ungleicher Wurzeln der Gleichung $f(\mu) = 0$ folgendermassen lautet:

Sind die beiden Integrale des der Wurzel μ_k entsprechenden Systems (2)

$$u_1^k = \text{const.}, \qquad u_2^k = \text{const.},$$

dann stellen

$$\varphi_1(u_1^1, u_2^1) = 0, \qquad \varphi_2(u_1^2, u_2^2) = 0 \cdots \varphi_n(u_1^n, u_2^n) = 0$$

wo $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ willkürliche Functionen bezeichnen, die allgemeinen Lösungen des Systems (1) dar. Es folgt alsdann die Angabe der Bedingungen, welche die Coefficienten des Systems (1) erfüllen müssen, wenn die Systeme (2) unbeschränkt integrabel sein sollen, wobei nur der Fall lauter ungleicher Wurzeln der Gleichung $f(\mu) = 0$ in Betracht gezogen ist. Die Zahl der Bedingungen reducirt sich bedeutend, wenn die Coefficienten des Systems (1) die Functionen $z_1 \ldots z_n$ selbst nicht enthalten und in dem besonderen Falle, wo die Coefficienten a und α sämmtlich constant und die c blosse Functionen von x und y sind, lässt sich die Integration durch blosse Quadraturen bewerkstelligen.

Eine directe Bestätigung und zugleich Erweiterung der im Vorhergehenden erlangten Ergebnisse wird dadurch gewonnen, dass nunmehr die Form

$$(3) \qquad \varphi\big(F(xyz_1 \ldots z_n), f(xyz_1 \ldots z_n)\big) = 0,$$

in welcher die allgemeinen Lösungen des Systems (1) erscheinen, selbst zum Ausgangspunkt der Untersuchung genommen wird. Durch partielle Differenziation der Gleichung (3) nach x und y und Elimination der willkürlichen Function φ gelangt man zu einer partiellen Differenzialgleichung, in welcher die partiellen Derivirten p, q theils linear, theils in den Verbindungen $p_r q_s - q_r p_s$ auftreten, während die aus der Form (3) resultirende partielle Differenzialgleichung in dem Falle einer einzigen abhängigen Variablen $z (n = 1)$ bekanntlich stets linear ist. Andererseits bestehen zwischen den Coefficienten gewisse Relationen, deren Zahl $\frac{n(n-1)}{2}$ ist. Stellt man nun die Bedingung, dass die in Rede

stehende partielle Differenzialgleichung linear sein soll, so erhält man zwischen den Coefficienten der p und q in derselben eine Anzahl Relationen, identisch mit denen, welche von den entsprechenden Coefficienten der aus (1) durch Multiplication mit den Grössen l und Addition entstandenen Gleichung vermöge der Wahl der l erfüllt werden. Von diesem Gesichtspunkte erhellt die eigentliche Bedeutung der oben angewandten Multiplicatoren l. Die Gleichungen $F =$ const., $f =$ const. erweisen sich als die Integrale eines Systems zweier totaler Differenzialgleichungen, welches dem System (2) aequivalent ist. Auch die Nothwendigkeit des Auftretens von Integrabilitätsbedingungen in dem Falle $n > 1$ ergibt sich als eine unmittelbare Folge der Integralform (3). In dem allgemeinen Falle, in welchem die Coefficienten der Verbindungen $p_r q_s - q_r p_s$ in der aus (3) resultirenden partiellen Differenzialgleichung nicht verschwinden, lässt sich ebenfalls leicht ein System zweier totaler Differenzialgleichungen aufstellen, dessen Integrale $F =$ const., $f =$ const. sind. Hierdurch ist ein Weg für die Integration eines Systems von n partiellen Differenzialgleichungen gegeben, von denen die $k$te die Form hat:

$$(4)\quad a_1^k p_1 + \cdots + a_n^k p_n + \alpha_1^k q_1 + \cdots + \alpha_n^k q_n + \sum_{r,s} \beta_{r,s}^k (p_r q_s - q_r p_s) = 0$$
$$(r, s = 1, 2 \,.\,.\, n)$$

Die allgemeinen Lösungen haben wieder die Form (3). Da von den oben erwähnten $\frac{n(n-1)}{2}$ Relationen zwischen den Coefficienten der aus (3) abgeleiteten partiellen Differenzialgleichung durch die Wahl der auch hier angewandten Multiplicatoren l nur n befriedigt werden können, so bleiben von den Coefficienten in (4) selbst noch $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Relationen zu erfüllen, abgesehen von den Integrabilitätsbedingungen, welche von den Systemen totaler Differenzialgleichungen, auf deren Integration die Integration von (4) zurückgeführt wird, befriedigt werden müssen.

Es folgt eine Anwendung dieses Integrationsverfahrens auf die Integration einer partiellen Differenzialgleichung $n$ter Ordnung, deren Form, als eine Verallgemeinerung der Ampère'schen Gleichung, von Herrn Natani herrührt, und für deren Integration er zugleich einen Weg angegeben hat. Für die lineare partielle Differenzialgleichung $n$ter Ordnung (verallgemeinerte Monge'sche), die in der ersteren als specieller Fall enthalten ist, hat Herr Natani

die Rechnung ausgeführt und die in der vorliegenden Abhandlung auf anderem Wege erhaltenen Resultate stimmen mit den Natani'schen überein.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die in den allgemeinen Entwicklungen angewandten Principien in ihrer Geltung keineswegs auf die Zahl von 2 unabhängigen Variablen beschränkt sind, dass jedoch die Zahl der von den Coefficienten zu erfüllenden Bedingungen mit der Zahl der unabhängigen Variablen in progressiver Weise wächst und so der Bereich der Anwendbarkeit dieses Integrationsverfahrens immer mehr verengt wird. Indem ferner nach der Lagrange'schen Methode ein System nicht linearer partieller Differenzialgleichungen leicht auf ein System linearer zurückgeführt wird, liegt auch die Integration des ersteren Systems unter gewissen Integrabilitätsbedingungen in unserer Hand — ein Gegenstand, dessen Erörterung für eine andere Gelegenheit vorbehalten bleibt.

Berlin. Hamburger.

A. Mayer: Ueber die Weiler'sche Integrationsmethode der partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung. (Mathem. Ann. Bd. IX. S. 347—370.)

Im 20. Bande der Zeitschrift für Mathematik und Physik hat Herr Weiler eine neue, veränderte Darstellung seiner bereits 1863 in demselben Journale veröffentlichten Integrationsmethode der partiellen Differenzialgleichungen 1. Ordnung gegeben. Diese Methode, die es zum ersten Male aussprach, dass man zur vollständigen Lösung einer gegebenen partiellen Differenzialgleichung 1. Ordnung mit weit weniger Integrationen auskommen könne, als nach der Methode von Jacobi nöthig sind, war früher ganz unverständlich geblieben und würde daher kaum dauernde Beachtung gefunden haben, wenn nicht Clebsch (Borchardt's Journal 65) gezeigt hätte, dass sich entsprechende Integrationsvereinfachungen auch durch geschickte Modification der Jacobi'schen Methode erzielen lassen. Neuere Arbeiten haben gelehrt, dass sich die Anzahl der zur vollständigen Lösung einer partiellen Differenzialgleichung 1. Ordnung erforderlichen Integrationen noch weiter erniedrigen lässt. Da es aber nicht nur auf die Anzahl, sondern auch auf die Ordnung dieser Integrationen ankommt und letztere bei der Methode von

Weiler, wie bei der von Clebsch zwischen bestimmten Grenzen variiren kann, so besitzen diese Methoden auch jetzt noch nicht bloss historischen Werth. Die Weiler'sche Methode zeichnet sich überdies vor allen anderen Methoden noch besonders dadurch aus, dass sie zum grössten Theile auf ganz anderer Grundlage beruht. Aus diesen Gründen schien es wünschenswerth, die Weiler'sche Methode von den Unklarheiten und zum Theil auch Unrichtigkeiten zu befreien, die auch in der neuen Weiler'schen Bearbeitung das Verständniss noch ausserordentlich erschweren, und den Versuch zu machen, den eigenthümlichen Weg, den diese Methode einschlägt, in möglichst klarer und präciser Weise auseinanderzusetzen.

Leipzig. A. Mayer.

H. Durège: Ueber die nichtpolaren Discontinuitäten. (Sitz.-Ber. der Wiener Acad. Bd. 73. Februar 1876.)

Es wird bei der speciellen Function

$$\frac{c^2}{c - e^{\frac{1}{z}}},$$

in welcher c eine beliebige Constante bedeutet, untersucht, welcher Art die Annäherung der Variablen z an den Nullpunkt sein muss, damit diese Function unendlich gross werde, $e^{\frac{1}{z}}$ also den willkürlich vorgeschriebenen Werth c annehme. Dies tritt ein, wenn z eine die Ordinatenaxe im Nullpunkte berührende archimedische Spirale durchläuft und sich auf dieser sprungweise dem Nullpunkte nähert. Die Gestalt der Spirale und die auf ihr zu machenden Sprünge sind in bestimmter Weise von dem vorgeschriebenen Werthe c abhängig.

Prag. H. Durège.

M. Krause: Ueber die Discriminante der Modulargleichungen der elliptischen Functionen (Fortsetzung). (Math. Annalen. Bd. IX.)

Diese Arbeit schliesst sich aufs engste an eine frühere des Verfassers an (Math. Ann. Bd. VIII).

Zunächst wird der in der letzteren unbeachtet gebliebene Fall, dass P, Q, R mit n einen gemeinsamen Theiler haben, betrachtet. Es folgt dann eine Angabe der Methode, wie sämmtliche Gleichungen $P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$ aufgestellt werden können, zu deren Wurzeln Functionen $\varphi(\tau)$ gehören, die von einander verschiedene Lösungen der Discriminante sind. Drittens wird festgestellt, wie vielfach eine jede Wurzel der Discriminante ist und auf Grund dieser Resultate letztere in Factoren zerlegt, die lauter von einander verschiedene Wurzeln besitzen. Endlich folgen numerische Beispiele für die Transformationszahlen $n = 15, 21, 31, 33, 35$.

Es sei schliesslich bemerkt, dass die beiden zusammengehörigen Arbeiten eine Verallgemeinerung derjenigen Sätze enthalten, die Hermite (Comptes rendus 1859, tome 49) für Primzahltransformationen ohne Beweis aufgestellt hat.

Breslau. M. Krause.

F. Klein: Ueber den Zusammenhang der Flächen. (Mathematische Annalen. Bd. IX. S. 476—482.)

Die Lehre vom Zusammenhange der Flächen wurde ursprünglich von Riemann zum Zwecke functionentheoretischer Untersuchungen entwickelt und unterliegt daher, sowie sie gewöhnlich vorgetragen wird, implicite mannigfachen, durch das besondere Ziel bedingten Beschränkungen, von denen sie befreit werden muss, wenn sie auf alle die Gebilde angewandt werden soll, mit denen sich die Geometrie beschäftigt. Der Verf. wurde zu der hiermit ausgesprochenen Auffassung geführt, als er es unternahm (Math. Ann. Bd. VI), für die von ihm ebenda bestimmten, gestaltlich unterschiedenen Typen der Flächen dritter Ordnung den Zusammenhang abzuzählen. Indem er glaubte, einem analogen Versuche Schläfli's (Annali di Matematica. T. V) entgegentreten zu müssen, entwickelte er (Math. Ann. Bd. VII) eine Methode, um den Zusammenhang solcher

Flächen zu bestimmen, die sich durchs Unendliche erstrecken, und hob andererseits hervor, dass bei diesen Untersuchungen nicht sowohl von der Fläche schlechthin als von der Flächen*seite* gesprochen werden muss, so dass also solche Flächen, bei denen man von einer Seite ohne Ueberschreitung etwaiger Randcurven auf die andere Seite gelangen kann, als *Doppelflächen* zu betrachten sind. [Schläfli hat neuerdings (Annali. T. VI) die Richtigkeit der gegen seine erste Abzählung gemachten Einwände anerkannt; seine nun gegebenen Resultate sind von den bez. des Verf. nur dadurch unterschieden, dass Schläfli gewisse nach Zweckmässigkeitsrücksichten zu treffende Festsetzungen anders auswählt als der Verf.] — In der gegenwärtigen Notiz hat der Verf. zunächst selbst eine Uebereilung zu berichtigen, die ihm in dem genannten Aufsatze (Math. Ann. Bd. VII) begegnet war (eine genauere Auseinandersetzung würde hier zu weit führen); sodann erläutert er den Begriff der Doppelfläche ausführlicher, indem er für denselben eine Definition aufstellt, die ihn als unabhängig erscheinen lässt von der Art oder selbst der Existenz des die Fläche umgebenden Raumes. Er wird dadurch überhaupt verwendbar für zweifach ausgedehnte beliebige Mannigfaltigkeiten, und so verwerthet ihn der Verf. beispielsweise dazu, um die *Liniencongruenzen* erster Ordnung und Klasse, die getrennte (reelle oder imaginäre) Directricen besitzen, auf ihren Zusammenhang zu untersuchen.

München. F. Klein.

L. Schläfli: Ueber die Convergenz der Entwicklung einer arbiträren Function $f(x)$ nach den Bessel'schen Functionen

$$\overset{\alpha}{I}(\beta_1 x),\quad \overset{\alpha}{I}(\beta_2 x),\quad \overset{\alpha}{I}(\beta_3 x),\ \ldots,$$

wo $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ die positiven Wurzeln der Gleichung $\overset{\alpha}{I}(\beta) = 0$ vorstellen. (Mathem. Annalen. Band X. Heft 1.)

Die Arbeit hat in Bezug auf den gebrauchten Integrationsweg Gemeinschaft mit der Abhandlung von Hermann Hankel im 8. Bande der Annalen (S. 471. Die Fourier'schen Reihen und Integrale für Cylinderfunctionen), unterscheidet sich aber, wie mir scheint, durch einen naturgemässeren Gang und näheren Anschluss an das sichere analytische Gebiet.

Bern. L. Schläfli.

L. Koenigsberger: Ueber die allgemeinsten Beziehungen zwischen hyperelliptischen Integralen. (Journal für reine und angew. Mathematik. Band 81. Heft 3.)

Der Inhalt dieses Aufsatzes wurde einer ausführlicheren Darstellung einer allgemeinen Theorie der hyperelliptischen Integrale entnommen und musste daher mit der Angabe wenigstens derjenigen Bezeichnungen und Theoreme beginnen, welche zur Lösung des Reductionsproblems der Transformation sowie zur Aufstellung der allgemeinsten Beziehungen zwischen hyperelliptischen Integralen nöthig waren.

Die Integrale der drei Gattungen stellten sich der Definition gemäss, für *keinen* Punkt der zur Irrationalität

$$\sqrt{R(z)} = \sqrt{A(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_{2p+1})}$$

gehörigen Riemann'schen Fläche unendlich zu werden, oder für *einen* Punkt z_1 derselben algebraisch unendlich von der ersten Ordnung zu sein, oder endlich für *zwei* beliebig gewählte Punkte derselben $z_1, \varepsilon_1 \sqrt{R(z_1)}$; $z_2, \varepsilon_2 \sqrt{R(z_2)}$ so logarithmisch unendlich zu werden, dass die Coefficienten A und B der logarithmischen Glieder

$$A \log(z - z_1) \quad \text{und} \quad B \log(z - z_2)$$

sich zu Null ergänzen, in der folgenden Form dar:

$$I(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{p-1} z^{p-1}}{\sqrt{R(z)}} dz$$

$$E(z) = M \int_{z_0}^{z} \left[\frac{1}{(z-z_1)^2} + \frac{\frac{R'(z_1)}{2\varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}(z-z_1) + \varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}{(z-z_1)^2 \sqrt{R(z)}} \right] dz + I(z)$$

$$\Pi(z) = M \int_{z_0}^{z} \left[\frac{R(z)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}{z - z_1} - \frac{R(z)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_2 R(z_2)^{\frac{1}{2}}}{z - z_2} \right] \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + I(z);$$

das Hauptintegral dritter Gattung sollte als Coefficienten der logarithmischen Glieder die positive und negative Einheit haben; dieses und seine successiven Differenzialquotienten nach einem der Unstetigkeitspunkte z_1 lieferten in linearer Verbindung mit bestimmten Coefficienten versehen ein bestimmtes hyperelliptisches Integral, welches in einem Punkte z_1, der weder ein Verzweigungspunkt noch der unendliche entfernte Punkt sein sollte, wie eine vorgelegte Function algebraisch und logarithmisch unendlich, im

Punkte z_2 logarithmisch unendlich ist, abgesehen von einem Integrale erster Gattung, dessen Coefficienten unbestimmt bleiben. Diese Darstellung liefert aber ein Mittel, jedes hyperelliptische Integral, welches in den Punkten $z_1, z_2, \dots z_\nu$ unendlich wird wie resp.

$A_\alpha \log(z - z_\alpha) + B_\alpha (z - z_\alpha)^{-1} + C_\alpha (z - z_\alpha)^{-2} + \cdots + K_\alpha (z - z_\alpha)^{-k_\alpha}$

in der Form einer Summe von einzelnen hyperelliptischen Integralen darzustellen, von denen jedes in *einem* z_α-Punkte in der vorgeschriebenen Weise und in einem willkürlich angenommenen, aber für alle diese Integrale demselben Punkte logarithmisch unendlich wird; der Nachweis dass es nur *ein* solches hyperelliptisches Integral gibt und dass keine andere Function noch diesen Bedingungen genügt, liefert das Dirichlet'sche Princip für diese Klasse doppelblättriger Riemann'scher Flächen, genau wie ich es für elliptische Integrale in meinen „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen" durchgeführt habe. Das allgemeine hyperelliptische Integral muss nun auf feste Normalformen gebracht werden, und es wird die Bestimmung der Coefficienten in der Zerlegungsformel

$$\frac{F(z)dz}{\sqrt{R(z)}} = \frac{C_1 \sqrt{R(z_1)}\, dz}{(z - z_1)\sqrt{R(z)}} + \cdots\cdots\cdots + \frac{C_n \sqrt{R(z_n)}\, dz}{(z - z_n)\sqrt{R(z)}}$$

$$+ \frac{l^{(0)} z^{2p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} + \frac{l^{(1)} z^{2p-2} dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + \frac{l^{(p-1)} z^p dz}{\sqrt{R(z)}}$$

$$+ \frac{k^{(p)} z^{p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} + \frac{k^{(p+1)} z^{p-2} dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + \frac{k^{(2p-1)} dz}{\sqrt{R(z)}}$$

$$+ \frac{d}{dz}\left\{ f(z) \sqrt{R(z)} \right\} dz,$$

wenn

$$l^{(\nu)} = \sum_1^\nu {}^\varrho\, l_\varrho^{(\nu)} - l_0^{(\nu)}, \quad k^{(\nu)} = \sum_1^\nu {}^\varrho\, k_\varrho^{(\nu)} - k_0^{(\nu)}, \quad f(z) = \sum_1^\nu {}^\varrho\, f_\varrho(z) - f_0(z),$$

$$R(z) = A z^{2p+1} + B_0 z^{2p} + B_1 z^{2p-1} + \cdots\cdots + B_{2p-1} z + B_{2p},$$

$$F_r(t) = \frac{2p - 2r - 1}{2} A t^r + \frac{2p - 2r}{2} B_0 t^{r-1} + \frac{2p - 2r + 1}{2} B_1 t^{r-2}$$

$$+ \cdots\cdots + \frac{2p - r - 2}{2} B_{r-2} t + \frac{2p - r - 1}{2} B_{r-1}$$

gesetzt wird, durch die Beziehungen gegeben

$$C_\varrho = \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t - z_\varrho)^{-1}}, \quad l_\varrho^{(\nu)} = \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\varrho} \frac{F_\nu(t)\, dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t - z_\varrho)^{-1}},$$

$$l_0^{(\nu)} = \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_\infty \frac{F_\nu(t)\, dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}},$$

und ähnliche Ausdrücke für die Grössen k und $f(z)$, somit auf die Herstellung der Coefficienten der um die Unstetigkeitspunkte von $F(z)$ und den unendlich entfernten Punkt genommenen Entwicklungen gewisser Functionen zurückgeführt, wie es Herr Weierstrass in seinen Vorlesungen für die elliptischen Integrale und Herr Fuchs in seiner Arbeit über die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale in ähnlicher Form für hyperelliptische Integrale gethan haben. Nach Herstellung des allgemeinen hyperelliptischen Integrales aus gegebenen Discontinuitäten und Zerlegung desselben in feste Normalformen, mussten die Relationen ermittelt werden, welche sich mit Anwendung des bekannten Princips der Integration von

$$\int I dI_1$$

ergeben, worin I und I_1 zwei aus beliebig gegebenen Discontinuitäten construirte, zu derselben Fläche gehörige hyperelliptische Integrale bedeuten, und die geschlossene Integration über die gesammte Begrenzung der nach Ausschliessung der Unstetigkeiten in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelten Riemann'schen Fläche auszudehnen ist; das gewonnene allgemeine, in den Nachrichten der Göttinger Societät vom April v. J. veröffentlichte Resultat, über das weiter unten referirt wird, wird für die in der vorliegenden Arbeit angestellte Untersuchung nur in dem speciellen Falle gebraucht, welcher für solche Hauptintegrale, deren Periodicitätsmoduln an einem gesammten Querschnittssystem verschwinden, den bekannten in der Form

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} dH(z, z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} dH(\zeta, \zeta_1, \zeta_2)$$

enthaltenen Satz von der Umkehrung der Grenzen und Unstetigkeitspunkte lieferte. Sodann wird noch das Abel'sche Theorem, das gleich nachher für die betrachteten Hauptintegrale gebraucht wird, für das allgemeine hyperelliptische Integral in der Art entwickelt, dass man dasselbe aus einer Summe von solchen Integralen zusammensetzt, die nur in zwei Punkten logarithmisch unendlich werden.

An die Erwähnung des Additionstheorems der hyperelliptischen Integrale, welches zeigt, dass einer transcendenten Beziehung, nämlich einer additiven Verbindung gleichartiger hyperelliptischer Integrale eine algebraische Beziehung zwischen den oberen und unteren Grenzen jener Integrale entsprechen kann, knüpft sich die Frage,

allgemein die Bedingungen dafür zu untersuchen, dass für eine additive Verbindung gleichartiger und ungleichartiger hyperelliptischer Integrale verschiedener Ordnung, elliptischer Integrale, algebraischer Functionen der Integralgrenzen und Logarithmen von algebraischen Functionen dieser Grössen algebraische Beziehungen zwischen den Grenzen dieser Integrale bestehen, und es wird gezeigt, mit Hülfe von Betrachtungen, wie sie Abel für elliptische Integrale angestellt, dass das allgemeine Transformationsproblem auf die Untersuchung eines Systems von Differenzialgleichungen

$$\frac{dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} + \frac{dz_2}{\sqrt{R(z_2)}} + \cdots + \frac{dz_p}{\sqrt{R(z_p)}} = \frac{f_0(Y_1)dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{f_0(Y_2)dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{f_0(Y_p)dY_p}{\sqrt{R_1(Y_p)}}$$

$$\frac{z_1 dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} + \frac{z_2 dz_2}{\sqrt{R(z_2)}} + \cdots + \frac{z_p dz_p}{\sqrt{R(z_p)}} = \frac{f_1(Y_1)dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{f_1(Y_2)dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{f_1(Y_p)dY_p}{\sqrt{R_1(Y_p)}}$$

. . . .

$$\frac{z_1^{p-1} dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} + \frac{z_2^{p-1} dz_2}{\sqrt{R(z_2)}} + \cdots + \frac{z_p^{p-1} dz}{\sqrt{R(z_p)}} = \frac{f_{p-1}(Y_1)dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{f_{p-1}(Y_2)dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{f_{p-1}(Y_p)dY_p}{\sqrt{R_1(Y_p)}}$$

führt, worin $Y_1, Y_2, \ldots Y_p$ die Lösungen einer Gleichung $p$ten Grades sein sollen, deren Coefficienten rational und symmetrisch aus

$$z_1, z_2, \ldots z_p, \quad \sqrt{R(z_1)}, \quad \sqrt{R(z_2)}, \ldots \sqrt{R(z_p)}$$

zusammengesetzt sind, während die zugehörige Irrationalität mit Hülfe eben dieser Grössen rational von den resp. Y abhängen sollen.

An diese Reduction des allgemeinen Transformationsproblems auf das rationale, wie es wegen der Natur der Grössen $Y_1, Y_2, \ldots Y_p$ genannt werden kann, knüpft sich nun naturgemäss die Frage nach der allgemeinsten Relation zwischen hyperelliptischen Integralen. Abel hat sich in seiner berühmten Arbeit „précis d'une théorie des fonctions elliptiques“ mit der Frage beschäftigt, welches die allgemeinste Beziehung zwischen einer beliebigen Anzahl von elliptischen Integralen mit derselben Variabeln und demselben Modul sei und zeigte, dass, mit Zugrundelegung der von ihm gewählten Bezeichnungen für das elliptische Integral erster und dritter Gattung, dieselbe durch die Gleichung

$$\beta\varkappa(x) - \frac{2m_1 \Delta\alpha_1}{\alpha_1} \Pi'(\alpha_1) - \frac{2m_2 \Delta\alpha_2}{\alpha_2} \Pi'(\alpha_2) - \cdots - \frac{2m_n \Delta\alpha_n}{\alpha_n} \Pi'(\alpha_n)$$

$$= \log\left\{\frac{f(x) + \varphi(x)\Delta x}{f(x) - \varphi(x)\Delta x}\right\} + C$$

dargestellt werde, in welcher die Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ der Gleichung

$$f(x)^2 - \varphi(x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2-\alpha_1^2)^{m_1}(x^2-\alpha_2^2)^{m_2}\ldots(x^2-\alpha_n^2)^{m_n}$$

genügen müssen, worin die eine der Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$ grade, die andere ungrade ist.

Mit Hülfe des oben bewiesenen Transformationssatzes führt man die analoge Frage für hyperelliptische Integrale auf die einfachere zurück, wann ein hyperelliptisches Integral mit der oberen Integrationsgrenze z_1 und der Irrationalität $\sqrt{R(z)}$ einer algebraisch-logarithmischen Function gleich sein kann, welche selbst oder für welche das Argument der Logarithmen rational aus z_1 und $\sqrt{R(z_1)}$ zusammengesetzt ist, und man findet leicht durch Einführung solcher hyperelliptischen Hauptintegrale dritter Gattung, deren Periodicitätsmoduln an allen Querschnitten eines Systems verschwinden, vermöge des Satzes von der Vertauschung der Grenzen und Unstetigkeitspunkte als allgemeinste zwischen gleichartigen hyperelliptischen Integralen und algebraisch-logarithmischen Functionen stattfindende Relation

$$m_1\int_{\zeta_1}^{z_1}\frac{\pm\sqrt{R(a_1)}\,dz}{(z-a_1)\sqrt{R(z)}} + m_2\int_{\zeta_1}^{z_1}\frac{\pm\sqrt{R(a_2)}\,dz}{(z-a_2)\sqrt{R(z)}} + \cdots + m_r\int_{\zeta_1}^{z_1}\frac{\pm\sqrt{R(a_r)}\,dz}{(z-a_r)\sqrt{R(z)}}$$

$$+ \beta_0\int_{\zeta_1}^{z_1}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + \beta_1\int_{\zeta_1}^{z_1}\frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + \beta_{p-1}\int_{\zeta_1}^{z_1}\frac{z^{p-1}\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

$$= \log\left\{\frac{f_\varrho(z_1) - g_\varrho(z_1)\sqrt{R(z_1)}}{f_\varrho(z_1) + g_\varrho(z_1)\sqrt{R(z_1)}} \cdot \frac{f_\varrho(\zeta_1) + g_\varrho(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}}{f_\varrho(\zeta_1) - g_\varrho(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}}\right\},$$

worin $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_{p-1}$ Constanten vorstellen, deren Bedeutung mit der aufgestellten Bedingung des Verschwindens der Periodicitätsmoduln an einem gesammten Querschnittssystem zusammenhängt, und $a_1, a_2, \ldots a_r$ der Gleichung genügen

$$f_\varrho(z)^2 - g_r(z)^2 R(z) = (z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2}\ldots(z-a_r)^{m_r}.$$

Dresden. L. Koenigsberger.

L. Koenigsberger: Ueber die Entwicklung der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung in Reihen.

(Mathematische Annalen. Band IX. Heft 4.)

Herr Hermite hat in einem in den Annali di Matematica (Ser. II. a. t. II. F. II.) veröffentlichten Briefe an Herrn Brioschi zwischen den Coefficienten der im Bereiche des Nullpunktes gültigen Maclaurin'schen Entwicklung der Functionen

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}} = \sum \alpha_n x^{2n+1},$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}} = \sum \beta_n x^{2n+1}$$

und den Coefficienten der Reductionsformel des Integrals

$$\int_0^x \frac{(\varkappa^2x^2)^{n+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}$$

$$= P_n\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)} - A_n\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}} + B_n\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}$$

auf ein Integral erster und zweiter Gattung und einen algebraischen Theil die Beziehungen gefunden

$$A_n = \beta_n\,,\quad B_n = \alpha_n\,;$$

Herr Thomae hat gleichzeitig diesen Gegenstand im Journal für reine und angewandte Mathematik (Bd. 80) behandelt und ist zu demselben Resultate gelangt. Es schien mir nun nicht uninteressant, die eigentliche Quelle jener Relationen, aus der diese ohne weitere Rechnung sich unmittelbar ergeben, in den Formen der Reductionscoefficienten zu bezeichnen, wie sie Herr Weierstrass aufgestellt hat (s. Vorl. 14 meiner „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen“); da nämlich — ich habe dies in der vorliegenden Arbeit nicht weiter ausgeführt —

$$\int^x \frac{\varkappa^{2n+2}x^{2n+2}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}} = \frac{\varkappa^{2n+4}l^{(n)}}{2}\int^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}$$

$$-\frac{\varkappa^{2n+4}k^{(n)}}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}} + \frac{\varkappa^{2n+2}}{2}\,x f^{(n)}(x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}$$

ist, worin nach den obigen Bezeichnungen von Hermite

$$A_n = \frac{\varkappa^{2n+4} k^{(n)}}{2}, \quad B_n = \frac{\varkappa^{2n+4} l^{(n)}}{2}, \quad P_n = \varkappa^{2n+2} x f^{(n)}(x^2),$$

wenn

$$k^{(n)} = -k_0^{(n)} = -\left[\frac{t^{n+1}}{\sqrt{t(1-t)(1-\varkappa^2 t)}} \int_\infty^t \frac{t\,dt}{\sqrt{t(1-t)(1-\varkappa^2 t)}}\right]_{t^{-1}},$$

$$l^{(n)} = -l_0^{(n)} = -\left[\frac{t^{n+1}}{\sqrt{t(1-t)(1-\varkappa^2 t)}} \int_\infty^t \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-\varkappa^2 t)}}\right]_{t^{-1}},$$

$$f^{(n)}(x^2) = -f_0^{(n)}(x^2)$$

$$= -\left[\frac{t^{n+1}}{\sqrt{t(1-t)(1-\varkappa^2 t)}} \int_\infty^t \frac{dt}{(t-x^2)\sqrt{t(1-t)(1-\varkappa^2 t)}}\right]_{t^{-1}}$$

gesetzt wird, so wird vermöge der Substitution $t = u^2$, $u = \varkappa^{-1} v^{-1}$

$$k^{(n)} = -\left[\frac{2}{\sqrt{(1-u^2)(1-\varkappa^2 u^2)}} \int_\infty^u \frac{u^2\,du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\varkappa^2 u^2)}}\right]_{u^{-2n-3}}$$

$$= \left[\frac{2v^2}{\sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)}} \int_0^v \frac{dv}{v^2\sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)}}\right]_{\varkappa^{2n+4} v^{2n+3}}$$

also

$$A_n = \left[\frac{1}{\sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)}} \int_0^v \frac{dv}{v^2\sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)}}\right]_{v^{2n+1}}.$$

Man sieht hieraus leicht, dass

$$\int_0^v \frac{dv}{v^2\sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)}}$$

$$= -\frac{\sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)}}{v} + \sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)} \sum A_n v^{2n+1}$$

ist und mit Hülfe der Beziehung

$$\int \frac{dv}{v^2\sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)}}$$

$$= \varkappa^2 \int^v \frac{v^2\,dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)}} - \frac{\sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)}}{v}$$

folgt somit unmittelbar

$$\int_0^v \frac{\varkappa^2 v^2\,dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)}} = \sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)} \sum A_n v^{2n+1};$$

genau in derselben Weise ergibt sich die zweite Relation.

Um nun festzustellen, dass in diesen Formen der Reductionscoefficienten der eigentliche Grund jener Beziehungen liegt, entwickelte ich für hyperelliptische Integrale die in dem obenstehenden

Referate bezeichnete Reductionsformel auf die Normalform erster, zweiter, dritter Gattung und auf einen algebraischen Theil, zu der ich wegen häufig vorkommender Anwendungen der entwickelten Ausdrücke eine Discussion über das Verschwinden der einzelnen Integrale der verschiedenen Gattungen hinzufügte, und leitete nun mit Hülfe dieser Reductionsformel vermöge der Uebertragung der Reihenentwicklung aus dem Bereiche des unendlich entfernten Punktes auf den des Nullpunktes für hyperelliptische Integrale die beiden folgenden Relationen her:

Wenn

$$R(z) = Az^{2p+1} + B_0 z^{2p} + B_1 z^{2p-1} + \cdots + B_{2p-1} z$$

und die reciproke Irrationalität

$$R_1(\zeta) = B_{2p-1} \zeta^{2p+1} + B_{2p-2} \zeta^{2p} + \cdots + B_1 \zeta^3 + B_0 \zeta^2 + A\zeta,$$

so ist für $r = 0, 1, 2, \ldots p-1$

$$\int_0^{\cdot} \frac{\frac{2p-r-1}{2} B_{r-1} u^{p-1} + \frac{2p-r-2}{2} B_{r-2} u^{p-2} + \cdots + \frac{2p-2r}{2} B_0 u^{p-r} + \frac{2p-2r-1}{2} A u^{p-r-1}}{\sqrt{R_1(u)}} du$$

$$= (u^{p-r-1} + M_0 u^{p-r} + \cdots + M_{r-1} u^{p-1}) \sqrt{R_1(u)} + \sqrt{R_1(u)} \sum_0^{\infty}{}_{\nu} l^{(r)}_{2p+\nu} u^{p+\nu},$$

und für $r = p, p+1, \ldots 2p-1$

$$\int_0^{\cdot} \frac{(r-2p+\frac{1}{2}) B_{2p-1} u^{3p-r-1} + (r-2p+1) B_{2p-2} u^{3p-r-2} + \cdots + \frac{2p-r}{2} B_r u^p}{\sqrt{R_1(u)}} du$$

$$= (N_0 u^{p-r} + N_1 u^{p-r+1} + \cdots + N_{r-1} u^{p-1}) \sqrt{R_1(u)} + \sqrt{R_1(u)} \sum_0^{\infty}{}_{\nu} k^{(r)}_{2p+\nu} u^{p+\nu},$$

wenn $l^{(r)}_n$ und $k^{(r)}_n$ die Coefficienten der Integrale zweiter und erster Gattung in dem hyperelliptischen Integrale

$$\int^{\cdot} \frac{z^n dz}{\sqrt{R(z)}}$$

sind.

Dresden. L. Koenigsberger.

L. Koenigsberger: Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln zweier hyperelliptischer Integrale. (Nachrichten der Göttinger Societät. April 1875.)

Die Anwendung des bekannten Princips der Integration von

$$\int J dJ_1,$$

worin J und J_1 beliebige zu derselben Irrationalität gehörige hyperelliptische Integrale bedeuten, ausgedehnt über die gesammte Begrenzung der nach Ausschliessung der Unstetigkeitspunkte einfach zusammenhängend gemachten Riemann'schen Fläche, liefert die allgemeinsten Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln dieser beiden hyperelliptischen Integrale. Man findet, dass, wenn das zur Irrationalität

$$\sqrt{R(z)} = \sqrt{A(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots\ldots(z-\alpha_{2p+1})}$$

gehörige Integral $J(z, z_\alpha)$ auf festbestimmten Blättern in den Punkten

$$\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots\ldots \mathfrak{z}_\mu, \; z_1, z_2, \ldots\ldots z_m, \; \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{2p+1}, \; \infty$$

unendlich werden soll wie die Functionen

$$\mathfrak{B}_\varrho (z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-1} + \mathfrak{C}_\varrho (z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-2} + \cdots\cdot + \mathfrak{K}_\varrho (z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-\mathfrak{k}_\varrho}$$

$$A_\varrho \log(z-z_\varrho) + B_\varrho (z-z_\varrho)^{-1} + C_\varrho (z-z_\varrho)^{-2} + \cdots\cdot + K_\varrho (z-z_\varrho)^{-k_\varrho}$$

$$a_\varrho \log(z-\alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}} + b_\varrho (z-\alpha_\varrho)^{-\frac{1}{2}} + c_\varrho (z-\alpha_\varrho)^{-\frac{2}{2}} + \cdots\cdot + h_\varrho (z-\alpha_\varrho)^{-\frac{\lambda_\varrho}{2}}$$

$$M_0 \log z^{\frac{1}{2}} + M_1 z^{\frac{1}{2}} + M_2 z^{\frac{2}{2}} + \cdots\cdot + M_\delta z^{\frac{\delta}{2}}$$

und das zu derselben Irrationalität gehörige Integral $J(z, \zeta_\alpha)$ in den Punkten

$$\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots\ldots \mathfrak{z}_\mu, \; \zeta_1, \zeta_2, \ldots\ldots \zeta_n, \; \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{2p+1}, \; \infty$$

wie die Functionen

$$\mathfrak{A}_\varrho' \log(z-\mathfrak{z}_\varrho) + \mathfrak{B}_\varrho' (z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-1} + \mathfrak{C}_\varrho' (z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-2} + \cdots\cdot + \mathfrak{K}_\varrho' (z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-\mathfrak{k}_\varrho'}$$

$$A_\varrho' \log(z-\zeta_\varrho) + B_\varrho' (z-\zeta_\varrho)^{-1} + C_\varrho' (z-\zeta_\varrho)^{-2} + \cdots\cdot + K_\varrho' (z-\zeta_\varrho)^{-k_\varrho'}$$

$$a_\varrho' \log(z-\alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}} + b_\varrho' (z-\alpha_\varrho)^{-\frac{1}{2}} + c_\varrho' (z-\alpha_\varrho)^{-\frac{2}{2}} + \cdots\cdot + h_\varrho' (z-\alpha_\varrho)^{-\frac{\lambda_\varrho'}{2}}$$

$$M_0' \log z^{\frac{1}{2}} + M_1' z^{\frac{1}{2}} + M_2' z^{\frac{2}{2}} + \cdots\cdot + M_{\delta'}' z^{\frac{\delta'}{2}},$$

wenn ferner die Stetigkeitssprünge von

$J(z, z_\alpha)$ an dem Querschnitte a_k mit J_{a_k}, an b_k mit J_{b_k},

die von

$I(z, \zeta_\alpha)$ an dem Querschnitte a_k mit I_{a_k}, an b_k mit I_{b_k}

bezeichnet werden, der Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{1}^{p}\left(J_{a_\nu} I_{b_\nu} - J_{b_\nu} I_{a_\nu}\right)$$

von einer Summe von Integralen abgesehen, welche von einem Punkte des Querschnittssystems aus auf der einfach zusammenhängenden Fläche genommen bis zu den Punkten $z_1, z_2, \ldots z_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2p+1}, \infty$ führen, durch einfache algebraische Zusammensetzungen der Entwicklungscoefficienten der Integrale um die einzelnen singulären Punkte bis zu bestimmt angebbaren Grenzen hin genommen ausdrückbar ist. Die bekanntlich von Herrn Weierstrass für hyperelliptische Integrale entwickelte verallgemeinerte Legendre'sche Relation bildet einen speciellen Fall der in dieser Notiz angegebenen, welche ebenso die bekannte Beziehung für hyperelliptische Hauptintegrale in sich schliesst.

Dresden. L. Koenigsberger.

Gustav Zeuner: Ueber die Wirkung des Drosselns und den Einfluss des schädlichen Raumes auf die bei Dampfmaschinen verbrauchte Dampfmenge.

(Civilingenieur. Bd. XXI. 1875.)

Bei der Anwendung der mechanischen Wärmetheorie zur Beurtheilung der Vorgänge im Cylinder der Dampfmaschinen ist die Schwierigkeit noch nicht überwunden worden, mit Sicherheit die Dampfmenge zu ermitteln, welche während des Dampfeinströmens in den Cylinder, während der *Admission*, vom Kessel nach dem Cylinder strömt. Das Gewicht des Dampfes, oder sofern der Dampf nass ist, das Gewicht von Dampf und Wasser, welches pro Kolbenschub oder wenn man will, pro Sekunde dem Cylinder zugeführt wird, erscheint aber gerade in den Hauptgleichungen der auf die mechanische Wärmetheorie begründeten Dampfmaschinenlehre und daher haben diese Gleichungen zunächst nur rein theoretischen Werth und sind für den praktischen Gebrauch noch nicht genügend geeignet.

Der Dampfverbrauch einer Dampfmaschine wird wesentlich abhängen: von der Grösse des schädlichen Raumes und der Beschaffenheit des Dampfes, der dort vom vorigen Schube zurückgeblieben ist und fernerhin von der Differenz zwischen dem Druck im Kessel

und dem Druck im Cylinder während der Admission; der letztere Druck ist immer der kleinere und wird umsomehr herabgezogen, je mehr man die Widerstände im Dampfzuflussrohr, durch Verstellen einer Klappe oder eines Ventiles (das Drosseln), erhöht.

Der Einfluss des schädlichen Raumes und der bemerkten Druckdifferenz ist zuerst von Clausius (Anwendung der mech. Wärmetheorie auf die Dampfmaschine) und später von mir (Grundzüge der mech. Wärmetheorie. 2. Aufl.) auf anderm Wege dargelegt worden. Diese ältern Untersuchungen gelten aber ausdrücklich nur unter der Voraussetzung, dass der einströmende Dampf trocken gesättigt oder nass ist und dann auch nur unter der Annahme, dass sich dieser Dampf im Cylinder während der Admission nicht etwa überhitzt.

In meiner Abhandlung, über deren Resultate hier referirt werden soll, habe ich nun die Untersuchungen auch auf den zuletzt genannten Fall ausgedehnt und weiterhin noch die Aufgabe unter der Voraussetzung behandelt, dass der Kesseldampf schon im überhitzten Zustande in den Cylinder eingeführt wird. Die Grundlagen für diese Untersuchungen bildeten meine früher erschienenen Abhandlungen: „Theorie der überhitzten Wasserdämpfe" (Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure. Bd. XI. 1866) und „Ueber das Verhalten der überhitzten und gemischten Wasserdämpfe" (Civilingenieur. Bd. XIII. 1867).

Beim Einströmen des Dampfes in den Dampfmaschinen-Cylinder hat man es mit einem *nicht umkehrbaren* Prozess zu thun; man kann zwar die Wärmemenge darstellen, die während der Admission dem Kessel mitgetheilt wird und ebenso die Arbeit, welche gewonnen wird; beides, Wärme und Arbeit stehen aber nicht in der einfachen Beziehung zu einander, wie beim umkehrbaren Prozess, denn der Admissionsdruck ist nicht mit dem Drucke identisch, unter welchem im Kessel die Dampfbildung erfolgt, derselbe ist sogar veränderlich. Denkt man sich aber, am Ende der Admission die Dampfmasse im Cylinder in den Gleichgewichtszustand übergegangen, den Gleichgewichtsdruck als identisch mit dem mittlern Admissionsdruck und nun die ganze Masse auf umkehrbaren Wegen in den Anfangszustand zurückgeführt, so lässt sich die angedeutete Beziehung doch bestimmen und zwar nach dem Satze, dass bei jedem Kreisprozesse, bei welchem der vermittelnde Körper in den Anfangszustand zurückkehrt, die gewonnene (resp. aufgewandte) Arbeit in Wärme ausgedrückt gleich der gesammten mitgetheilten (resp. abgeleiteten) Wärmemenge ist, selbst auch dann, wenn in einem solchen

Kreisprozesse einzelne *nicht umkehrbare* Theile vorkommen. Mit Hülfe dieses Satzes ist nun das Problem in der in Rede stehenden Abhandlung gelöst worden.

Als gegeben ist angesehen worden: der Kesseldruck p_2 und die spez. Dampfmenge x_2 (Dampfgewicht in der Gewichtseinheit Mischung von Dampf und Wasser) oder sofern der Dampf durch einen Ueberhitzer geführt wurde, die Ueberhitzungstemperatur t_x; ferner ist bekannt der Druck p_0 und die spez. Dampfmenge x_0 der Mischung im schädlichen Raume beim Beginn des Kolbenhubes und endlich der mittlere Admissionsdruck p, sowie das Volumen V_0 des schädlichen Raumes und das Volumen V, welches der Kolben während der Admission zurücklegt. Als zu bestimmen ist anzusehen, das Gewicht G_0 des anfänglich im schädlichen Raume vorhandenen Dampfgemisches, das Gewicht G des vom Kessel gelieferten Dampfes und der Zustand des Dampfes im Cylinder am Ende der Admission und zwar die spez. Dampfmenge x oder sofern dieser Dampf überhitzt ist, seine Temperatur t_y.

Bezeichnet nun σ das spez. Volumen des Wassers, v das des Dampfes und setzt man $v - \sigma = u$; ist ferner q die Flüssigkeitswärme, ϱ die innere latente Wärme des Dampfes, r die Verdampfungswärme, A das Wärmeaequivalent der Arbeitseinheit und benutzt man die angegebene Bezeichnung für den Admissionsdampf, dieselben Buchstaben aber unter gleicher Bedeutung mit dem Index 2 versehen für den Kesseldampf und mit dem Index 0 für die Masse im schädlichen Raume, so ergibt die Rechnung, wie in der Abhandlung gezeigt wird:

$$(1) \qquad V_0 = G_0(x_0 u_0 + \sigma)$$

$$(2) \qquad V + V_0 = G(xu + \sigma)$$

$$(3^a) \qquad G[x_2 r_2 + q_2 - q] = V\frac{r}{u} + G_0\left[\left(\frac{\varrho}{u} - \frac{\varrho_0}{u_0}\right)x_0 u_0 + q - q_0\right].$$

Die erste Gleichung gibt G_0, die dritte G und die zweite gibt schliesslich x; die Gleichungen gelten aber nur, wenn sowohl der Kesseldampf, wie der Dampf im Cylinder am Ende der Admission nass oder trocken gesättigt ist.

Ist dagegen der Kesseldampf vor dem Eintritt in den Cylinder auf die Temperatur t_x überhitzt, der Admissionsdampf aber schliesslich nass, was eintreten wird, wenn im schädlichen Raume viel Wasser zurückgeblieben ist, so gelten die Gleichungen (1) und (2) auch hier, Gleichung (3^a) ist dagegen durch die folgende zu ersetzen:

$$(3^b) \qquad G[c_p(t_x - t_2) + r_2 + q_2 - q] = V\frac{r}{u} + G_0\left[\left(\frac{\varrho}{u} - \frac{\varrho_0}{u_0}\right)x_0 u_0 + q - q_0\right],$$

wobei c_p die spez. Wärme des Dampfes bei constantem Drucke darstellt.

Ist endlich nicht nur der Kesseldampf, sondern auch der Dampf im Cylinder am Ende der Admission überhitzt, was immer dadurch angedeutet wird, dass die vorstehenden Gleichungen bei numerischen Rechnungen auf den unmöglichen Werth $x > 1$ führen, so gelten die Gleichungen:

$$(1^c) \qquad V_0 = G_0 (x_0 u_0 + \sigma)$$

$$(2^c) \qquad V + V_0 = (G + G_0) v_y$$

$$(3^c) \qquad (G + G_0)(\lambda_x - \lambda_y) = G_0 [\lambda_x - q_0 - x_0 \varrho_0 - A x_0 u_0 p],$$

wo v_y das spez. Volumen des überhitzten Admissionsdampfes darstellt, und λ_y die Gesammtwärme desselben sowie λ_x die des Kesseldampfes ist. Da für überhitzte Wasserdämpfe allgemein die Gleichungen:

$$pv = B(T - \beta \sqrt[4]{p}) \quad \text{und} \quad \lambda = J_0 + 4Apv$$

gelten, in welchen B, β und J_0 bekannte constante Grössen sind, so lassen sich die Gleichungen (2^c) und (3^c) in solcher Art umformen, dass aus denselben das spez. Volumen v_y und die Temperatur t_y des überhitzten Admissionsdampfes sich schliesslich ergibt.

Ein weitererer noch möglicher vierter Fall, dass der Dampf im schädlichen Raume schon überhitzt ist, ist in der Abhandlung unberücksichtigt gelassen, weil dieser Fall bei Dampfmaschinen kaum vorkommen dürfte.

In der Abhandlung sind dann zahlreiche numerische Beispiele berechnet und tabellarisch zusammengestellt. Statt auf die Ergebnisse dieser Rechnungen hinzuweisen, mögen hier, weil nur auf diesem Wege der überaus complicirte Vorgang sich klar legen lässt, einige wenige Fälle herausgehoben werden.

Der Kesseldruck sei in allen folgenden Fällen 4 Atmosphären (10334 Kil), der Druck im schädlichen Raume 0,2 Atmosph. (Condensations-Dampfmaschine) und der Admissionsdruck 3,5 Atmosph.; es sei ferner $V_0 = 0{,}2 \,.\, V$, welche Beziehung man erhält, wenn man 4fache Expansion und wie gewöhnlich den schädlichen Raum 0,05 vom Cylinderinhalte annimmt.

1. Fall. Der Kesseldampf sei nass, die spez. Dampfmenge betrage $x_2 = 0{,}90$; der Dampf im schädlichen Raume sei trocken gesättigt, also $x_0 = 1$; hier erhält man unter Benutzung meiner Dampftabellen aus Gleichung (1), (2) und (3^a):

$$G_0 = 0{,}0265\ V \text{ Kil}; \quad G = 2{,}5550\ V \quad \text{und} \quad x = 0{,}914.$$

Demnach findet während der Admission ein theilweises Verdampfen statt.

2. Fall. Der Kesseldampf sei nass und zwar sei wieder $x_2 =$ 0,90, der im schädlichen Raume zurückgebliebene Dampf enthalte aber *sehr viel* Wasser, es sei $x_0 = 0{,}01$; hier ergeben dieselben Gleichungen:

$$G_0 = 2{,}6178\ V; \quad G = 3{,}0007\ V \quad \text{und} \quad x = 0{,}419.$$

Der Dampfverbrauch dieser Maschine wird also durch das im schädlichen Raume zurückgebliebene Wasser sehr bedeutend (gegen den vorigen Fall um 17,5 %) erhöht und es findet während der Admission eine sehr beträchtliche Condensation statt; beim Beginn der Expansion befindet sich sogar mehr Wasser als Dampf im Cylinder! —

Die Annahme, dass anfänglich im schädlichen Raume die spez. Dampfmenge nur $x_0 = 0{,}01$ betragen könne, scheint mir keineswegs ausserhalb der Möglichkeit zu liegen, denn das Volumen dieses Dampfes vom Drucke von 0,2 Atmosph. berechnet sich zu 0,987 V_0 Cub.-Meter und das des vorhandenen Wassers zu 0,013 V_0 und der letztere Werth ist recht wohl denkbar. Uebrigens beleuchtet vorstehendes Beispiel die interessanten Untersuchungen Illeck's über den Einfluss der Cylinderwandungen auf den Dampf im Cylinder der Dampfmaschinen (Civilingenieur. Bd. XXII. 1876).

3. Fall. Der Kesseldampf sei auf $t_x = 250^0$ überhitzt, die spez. Dampfmenge im schädlichen Raume sei $x_0 = 1$; hier ergibt die Gleichung (3^b) im Verein mit (1) und (2) $x = 1{,}114$; ein Zeichen, dass die Gleichungen (1^c), (2^c), (3^c) in Anwendung kommen müssen. Man erhält durch diese:

$$G_0 = 0{,}0265\ V; \quad G = 1{,}7364\ V \quad \text{und} \quad t_y = 264^0{,}8.$$

Während der Admission findet also eine weitere Ueberhitzung um $14^0{,}8$ statt.

4. Fall. Der Kesseldampf sei wieder auf $t_x = 250^0$ überhitzt, die spez. Dampfmenge betrage aber, wie im zweiten Falle, nur $x_0 = 0{,}01$; hier ergibt Gleichung (3^b) mit (1) und (2):

$$G_0 = 2{,}6178\ V; \quad G = 2{,}4581\ V \quad \text{und} \quad x = 0{,}464.$$

Es findet also hier wieder eine sehr beträchtliche Condensation während der Admission statt, trotz der starken Ueberhitzung des Kesseldampfes; die per Schub erforderliche Dampfmenge wäre aber sogar geringer, als die Dampf- und Wassermenge, welche der frische Dampf im schädlichen Raume schon vorfindet; die Dampfmenge ist

selbst geringer, wie im Falle 1, woraus eben zum Theil schon der Vortheil der überhitzten Dämpfe sich erklärt.

Die Untersuchungen der besprochenen Abhandlung gewinnen vielleicht noch einigen Werth, wenn die Lösung der Frage über den Einfluss der Cylinderwandungen auf den im Dampfcylinder arbeitenden Dampf weiter vorgeschritten ist, eine Frage, die ganz vorzugsweise Hirn seit Langem mit schönen Erfolgen auf experimentellem Wege verfolgt hat und die in neuester Zeit von Illeck (a. a. O.) eine neue Auffassung erfahren hat.

Dresden. Gustav Zeuner.

R. Ferrini: Sulla correzione della temperatura di un liquido nel quale non si possa affondare a sufficienza il termometro. (Nota letta all' Istituto Lombardo di Scienze e lettere il 18 Febbrajo 1875.)

In questa nota considerando le condizioni di equilibrio termico della colonetta termometrica sporgente del liquido, mostro che l'andamento della temperatura lungo la medesima può esprimessi con sufficiente esattezza, con una funzione della forma $\delta_x = \delta_0 + ax + bx^2$, essendo δ_0 la temperatura al piede del filetto termometrico esterno, δ_x quella corrispondente all' altezza x sub livello del liquido esplorato, a e b due costanti da determinarsi. — Adottata questa funzione e calcolata in relazione ad essa la correzione da applicarsi all' osservazione termometrica sono condotto al seguente metodo sperimentale.

Si cominci ad immergere il termometro nel liquido fino alla divisione più bassa della sua scala e, fatta la lettura, sia l la lunghezza (espressa in gradi) del filetto termometrico sporgente. Poi si affondi il termometro quanto lo concede la profondità del vaso e si osservino l'alzamento s della sommità della colonetta die mercurio, e la lunghezza l' della parte che verrà ad emergere dal liquido. La correzione da applicarsi alla prima lettura per avere la temperatura del liquido è detta della:

$$C = s\frac{l^2}{l^2 - l'^2}.$$

Molti raffronti sperimentali mi hanno comprovato l'accordo di questa formola coi risultati di fatta.

Milano. R. Ferrini.

R. Ferrini: Tecnologia del Calore. (Milano. — Ulrico Hoepli 1876.)

In questo libro ho avuto di mira di presentare i principii che reggono la Tecnologia del Calore appoggiati alle moderne teorie. Perciò partendo della teoria di Zeuner sull' efflusso dei fluidi e semplificando il metodo tenuto da Grashof ne ho fatto l'applicazione al calcolo d'un camino, d'un ventilatore meccanico, dei condotti di distribuzione d'aria calda d'un calorifero, d'un termotifone, d'un camino di richiamo e dei condotti di ventilazione. La formola che ho ottenuta per il calcolo d'un camino mi ha permesso di dimostrare il vantaggio dei camini *divergenti* su quelli a sezione costante e più ancora sui convergenti, ed inoltre di discutere di nuovo la quistione se vi sia una temperatura di massima efficacia per il camino. Facendo sentire che del resto non interessa punto di raggiungerla, trovo che tale temperatura esiste ma non è costante, come una volta si credeva, ma diversa secondo le condizioni particolari del camino; però sempre elevatissima e tale che per ottenerla bisognerebbe sagrificarvi quasi tutto l'effetto utile del combustibile.

Considerando più innanzi il problema della potenza da darsi agli apparecchi di scaldamento per gli ambienti ho cominciato a porre la quistione se possa sempre ammettersi raggiunta la fase di regime nel disperdimento del calore traverso le pareti. Ho segnato nei due casi che durante gli intervalli di inazione l'ambicule non riceva più calore o che ne continui a ricevere per alcun tempo in quantità decrescente, il metodo per calcolare l'abbassamento di temperatura che ne conseguirà, quindi per decidere se dopo alcune riprese di attività le pareti saranno o no condotte allo stato di trasmissione permanente e nel caso affermativo per calcolare la perdita di regime che si avrà in uno dei periodi di riposo. Quindi ho dato la maniera di assegnare la potenza degli apparecchi pel caso in cui non vi sia una tal perdita di regime, pel caso in cui vi sia e pel caso infine che non si possa mai ritenere raggiunto lo stadio di regime nella trasmissione.

Da ultimo ho applicato i principii della termodinamica al calcolo degli essiccatoi tanto ad aria fredda che ad aria calda.

Milano. R. Ferrini.

R. Ferrini: Sulla temperatura delle flamme. (Nota critica letta all' Istituto Lombardo di Scienze e lettere il 10 Febbrajo 1876.)

In questa nota presi ad esaminare il metodo proposto del Sig. Professore H. Valerius nel Moniteur Industriel Belge del 1 Settembre 1875 per il calcolo delle temperature di combustione, mostrando ch' esso non è attendibile e che i fatti della dissociazione sono ancora troppo poco conosciuti per potervisi basare con sicurezza il calcolo di quelle temperature.

Milano. R. Ferrini.

V. Liguine: Sur les systèmes de tiges articulées. (Nouvelles Annales de Mathématiques. T. XIV. P. 529—560.)

L'étude récente des divers systèmes de tiges articulées, à liaison complète, a commencé par celle des systèmes à six tiges, et même parmi toutes les dispositions connues actuellement, la plupart ne sont encore que des systèmes de ce genre particulier ou des combinaisons simples de ces systèmes.

Ces divers systèmes à six tiges ont été inventés, pour la plupart, indépendamment l'un de l'autre et figurent ainsi dans la question comme des dispositions isolées et distinctes, dont rien ne paraît indiquer une liaison mutuelle. Je me suis proposé, dans ma Note, de les étudier sous un point de vue complètement général, ce qui m'a permis: 1° d'indiquer les conditions caractéristiques qui distinguent le genre de systèmes à six tiges, étudié jusqu'à présent, de toutes les autres dispositions possibles du même nombre de tiges, et qui assignent certaines limites aux recherches de nouvelles combinaisons utiles du même genre; 2° de décrire un système dont les dispositions connues à six tiges*) ne sont que de simples cas particuliers; 3° de passer brièvement en revue, en discutant ce système général, tous les systèmes connus à six tiges, et d'exposer à cette occasion quelques observations nouvelles relatives à ces derniers.

*) Le système proposé récemment par M. Kempe, que j'ai décrit dans le n° 7 de ma Note, ne doit pas compter dans ce nombre, car il présente un type tout à fait exceptionnel, qui ne se rattache pas du tout à tous les autres systèmes connus à six tiges, puisqu'il ne jouit pas de la propriété fondamentale, commune à ces derniers, d'avoir constamment trois articulations en ligne droite pendant le mouvement.

Pour abréger le langage, je nomme tout système articulé à six tiges et à liaison complète *élément articulé.*

Chaque élément articulé se compose nécessairement de six tiges et de sept articulations, en comptant les points où sont réunies trois tiges pour deux articulations. Comme l'a déjà fait observer M. Sylvester, tous les éléments et systèmes articulés auxquels on a été conduit par la découverte de M. Peaucellier peuvent, en dernière analyse, être considérés comme des assemblages de *couples* de tiges ou de *dyades*, c'est à dire de systèmes de deux tiges réunies par une articulation, systèmes dont le compas ordinaire fournit un exemple très-connu; et c'est en vertu de cette propriété que M. Sylvester avait même proposé de donner à ces dispositions le nom de *dyadismes.* En se plaçant à ce point de vue, on obtient pour les éléments en question le mode de génération général suivant.

Prenons une dyade ou un couple de tiges, et imaginons que l'on rend fixe son articulation; nommons cette articulation fixe le *point d'appui* et les deux tiges qui y sont réunies les *connecteurs.* Prenons ensuite un second couple et joignons, au moyen de deux articulations, ses deux tiges aux deux tiges du premier couple, en articulant les extrémités libres des tiges de l'un des deux couples à deux points quelconques des deux tiges de l'autre couple ou aux extrémités libres de ces dernières tiges; nommons les deux tiges de ce nouveau couple les *premiers guides*, et l'articulation qui les réunit le *premier pôle;* nous aurons formé ainsi un quadrilatère articulé qui a pour côtés les deux connecteurs et les deux guides, ou certaines parties de ces tiges. Prenons enfin un troisième couple et adaptons ses extrémités libres, au moyen d'articulations, à deux points de deux côtés adjacents*) du quadrilatère mentionné, ou aux extrémités des prolongements de deux côtés adjacents, si ces prolongements existent; donnons aux tiges de ce troisième couple et à l'articulation qui les joint les noms de *deuxièmes guides* et de *deuxième pôle*; nous aurons formé par là un second quadrilatère

*) Cette dernière restriction est inutile pour les éléments que je nomme plus loin de la première espèce et qui, comme on verra, sont de beaucoup les plus importants, puisqu'elle y est remplie d'elle-même; mais, pour ceux de la deuxième espèce, il y a lieu de la faire, car dans ces derniers, parmi les quatre modes possibles de jonction du troisième couple, il y a deux dispositions où les extrémités libres des deuxièmes guides s'articulent à deux côtés opposés du premier quadrilatère, et dans ces deux cas on obtiendrait, au lieu du second quadrilatère, un pentagone articulé, ce qui compliquerait beaucoup les raisonnements.

articulé, ayant un sommet et un angle communs avec le premier; mais les droites qui forment ce nouveau quadricatère peuvent être différentes. Il est clair, en effet, que la jonction du troisième couple à l'assemblage des deux premiers peut s'effectuer de trois manières distinctes: les extrémités libres de ce troisième couple peuvent être jointes ou aux deux premiers guides, ou aux deux connecteurs, ou à l'un des premiers guides et à un connecteur adjacent; dans le premier cas le nouveau quadrilatère sera formé par les quatre guides, dans le second par les deux connecteurs et les deux deuxièmes guides, dans le troisième par trois des quatre guides et l'un des connecteurs. Dans tous les cas, la réunion consideré de trois couples formera un élément à six tiges et à sept articulations, et l'on remarquera que cet élément est toujours composé de deux quadrilatères articulés. Nous dirons que l'élément est de la *première espèce*, quand le mode de jonction du troisième couple rentre dans les deux premiers des trois cas cités, et qu'il est de la *deuxième espèce*, lorsque ce mode de jonction rentre dans le dernier de ces cas. Une autre distinction qu'il est encore utile de faire dans le cas où le troisième couple est adapté aux deux premiers guides est relative à la position du point d'appui par rapport au second quadilatère articulé; le point d'appui peut être situé à l'extérieur ou à l'intérieur de ce quadrilatère: dans le premier cas, l'élément sera dit *positif*, dans le second, *négatif*.

D'après ce qui vient d'être dit, parmi les six tiges de chaque élément, il y a à distinguer les deux connecteurs, les deux premiers et les deux deuxièmes guides, et parmi ses sept articulations on distingue le point d'appui et les deux pôles. Les distances du point d'appui aux deux pôles seront dites les *bras* de l'élément; en considérant ces bras comme des rayons vecteurs partant d'une même origine fixe, le but de chaque élément consiste à établir une relation constante entre ces rayons vecteurs, qui permette d'apérer une certaine transformation sur les coordonnées polaires, de manière que, l'un des pôles décrivant une ligne donnée, l'autre décrive une seconde ligne, liée à la première par la loi de transformation qui convient à l'élément considéré.

Si maintenant on compare l'élément général que nous venons d'obtenir par la voie de composition de trois couples de tiges avec les éléments qui ont été proposés depuis la découverte de M. Peaucellier, on voit immédiatement que ces derniers ne sont tous que des variétés du premier, caractérisées par les deux propriétés particulières que voici: 1° ils sont tous de la première espèce; 2° quel

que soit le mouvement de l'élément, trois des sept articulations, le point d'appui et les deux pôles, restent constamment en ligne droite pendant ce mouvement.

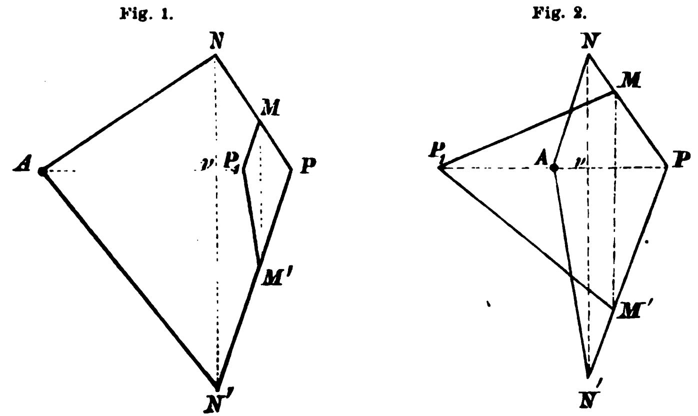
D'autre part, si l'on examine attentivement et d'une manière générale les conditions suffisantes pour que le point d'appui et les deux pôles d'un élément de la première espèce restent constamment en ligne droite, on reconnaît qu'il suffit pour cela: 1° ou que dans une seule position de l'appareil les deux quadrilatères articulés, dont l'élément est toujours composé, soient semblables et semblablement placés; 2° ou que dans une seule position de l'appareil les tois sommets des deux quadrilatères, qui représentent le point d'appui et les deux pôles, soient en ligne droite, et les deux diagonales de chaque quadrilatère se coupent à angle droit. On parvient à ces conditions par des considérations très simples de la géométrie élémentaire et en s'appuyant sur la propriété suivante: de quelque manière que l'on déforme un quadrilatère dont les diagonales se coupent à angle droit et dont les côtés ont des longueurs invariables, ses diagonales resteront toujours perpendiculaires eutre elles.

Cela posé, on voit que l'on peut former un élément de la première espèce, dont le point d'appui et les deux pôles restent constamment en ligne droite, de deux manières distinctes: ou en construisant un quadrilatère quelconque et en menant par un point de l'une de ses diagonales deux droites parallèles à deux côtés aboutissant à l'une des extrémités de cette diagonale jusqu'à la rencontre avec les deux autres côtés, ou en construisant un quadrilatère à diagonales rectangulaires et en joignant un point de l'une de ces diagonales à deux points situés à la fois sur deux côtés aboutissant à l'une des extrémités de cette diagonale et sur une même perpendiculaire à cette dernière droite. C'est dans le dernier de ces deux modes de génération que rentrent les éléments qui ont été étudiés depuis la découverte de M. Peaucellier; par conséquent, le type le plus général de ce genre sera l'élément représenté sur les fig. 1 ou 2 et que je nomme par cette raison élément généralisé; dans ces figures, A désigne le point d'appui, P le premier, P_1 le deuxième pôle, AN, AN' représentent les connecteurs, PN, PN' les premiers, P_1M, P_1M' les deuxièmes guides. La loi de la transformation effectuée par cet élément sur les bras ou rayons vecteurs $AP = \varrho$, $AP_1 = \varrho_1$ consiste en ce que, pendant toute la durée d'un mouvement quelconque de l'appareil, il existe entre ces

bras la relation

$$\frac{\varrho[(\varrho \mp \varrho_1)^2 + m_1^2 - m^2]}{(\varrho \mp \varrho_1)(\varrho^2 + n^2 - c^2)} = \frac{m_1}{n},$$

où $m = P_1M$, $m_1 = PM$, $n = PN$, $c = AN$ et où il faut prendre les signes supérieurs quand l'élément est positif (fig. 1), et les



signes inférieurs quand il est négatif (fig. 2). Il est digne de remarque que la relation (1) est tout à fait indépendante des grandeurs des tiges P_1M', PM', PN', AN' situées de l'autre côté de la diagonale AP, et que, par conséquent, cette relation reste identiquement la même pour tous les éléments de différents paramètres que l'on obtient en changeant arbitrairement le lieu du point N' sur la droite Nv indéfininiment prolongée.

Je fais voir ensuite comment les différents éléments connus (élément de M. Peaucellier généralisé, indiqué par M. Sylvester; élément proposé par M. Mannheim pour décrire une anallagmatique du quatrième ordre; inverseur de M. Peaucellier; élément de M. Sylvester servant à réaliser un système circulo-circulaire c'est à dire une disposition propre à transformer un mouvement circulaire en un autre mouvement circulaire; extracteur binôme quadratique de M. Sylvester; élément pantographique) se déduisent de *l'élément généralisé*, et j'ajoute à cette occasion quelques observations sur plusieurs propriétés de ces variétés.

Mais, comme il a été déjà dit plus haut, tous ces éléments connus sont de la première espèce, c'est à dire que, dans tous ces appareils, les deuxièmes guides sont toujours adaptés par leurs extrémités libres, ou aux deux connecteurs ou aux deux premiers guides. Après avoir examiné les appareils de ce genre, il est naturel de se demander si l'on ne pourrait pas obtenir d'autres dispositions nou-

velles et utiles parmi les éléments de la deuxième espèce, où les extrémités libres des deuxièmes guides s'appuient sur un connecteur et un premier guide adjacent. L'analyse de cette question nous apprend qu'en se bornant au même degré de simplicité que pour le cas des éléments de la première espèce, c'est à dire en ne considérant que les éléments de la deuxième espèce, jouissant de la propriété que leur point d'appui et leurs deux pôles restent constamment en ligne droite pendant le mouvement de l'appareil, les seuls éléments auxquels on se trouve conduit sont l'extracteur binôme quadratique de M. Sylvester et l'élément pontographique sous une forme particulière servant à doubler les rayons vecteurs, ce qui nous indique une propriété curieuse de ces deux éléments, de pouvoir servir en même temps d'éléments de la première et de la deuxième espèce. On ne retrouve ainsi, parmi les éléments de la deuxième espèce, que des variétés déjà connues, ce qui montre que cette seconde solution possible du problème est stérile, et que, autant que l'on se borne à cette classe simple d'éléments, dont le point d'appui et les deux pôles sont assujettis à rester constamment en ligne droite, de nouvelles dispositions ne peuvent être cherchées que parmi les éléments de la première espèce.

Les systèmes à six tiges formant, comme je l'ai déjà observé, la grande majorité de tous les types proposés des systèmes articulés en général, il ne me restait à decrire qu'un très-petit nombre de dispositions à huit tiges (protracteur de M. Peaucellier; système de M. Sylvester) et à quatre tiges (systèmes de M. M. Roberts et Hart), pour donner en même temps, par mon travail, une énumération complète des types des systèmes articulés actuellement connus, énumération qui peut être utile aux personnes s'occupant de la question; c'est ce que j'ai fait dans un appendice placé à la fin de ma Note. En discutant à cette occasion le système à quatre tiges de M. Hart je fais observer que, parmi tous les systèmes imaginables de tiges articulées propres à résoudre rigoureusement la question de la transformation d'un mouvement circulaire en mouvement rectiligne, celui de M. Hart est formé du plus petit nombre possible de tiges.

Les divers systèmes à quatre, six et huit tiges, décrits dans ce travail, épuisent, je crois le nombre total des *types* connus de systèmes articulés, c'est à dire des systèmes *simples* et essentiellement distincts qui ont été proposés; tous les autres systèmes connus n'en présentent que des combinaisons plus ou moins compliquées. C'est à

cette seconde classe de systèmes combinés ou *multiples* qu'appartiennent, par exemple, les divers *conicographes* de M. M. Peaucellier, Sylvester, Hart, etc. à 15, 13, 11, 9, 7 tiges; le *paradoxe cinématique* de M. Sylvester à 73 tiges obligeant deux points non liés entre eux à rester à une distance invariable et servant à réaliser le mouvement d'un ou de plusieurs points suivant la ligne des centres; les systèmes de M. Sylvester à 25 tiges, pour produire un mouvement suivant une parallèle à la ligne des centres, et à 43 tiges pour produire un mouvement suivant une droite formant un angle donné avec la ligne des centres; les divers systèmes servant à l'extraction des racines, etc. Il est évident que la théorie de ces systèmes multiples ne présente aucune difficulté dès que l'on connaît les propriétés des systèmes simples qui les constituent.

Odessa. V. Liguine.

A. Fliegner: Der Einfluss von Erweiterungen in Rohrleitungen.
(Civilingenieur 1875. Bd. XXI. S. 97.)

Die Arbeit enthält die Ergebnisse einer längeren, zunächst nur mit Wasser angestellten Versuchsreihe, welche den Einfluss plötzlicher und allmähliger Erweiterungen in Rohrleitungen genauer feststellen sollte.

Vorausgeschickt ist eine Beschreibung und Abbildung des neuen hydraulischen Apparates in der mechanischen Sammlung des Zürcher Polytechnikums, nebst Erläuterung über die Art seiner Benutzung. Mit demselben geht ein Ueberdruck von rund 40^m Wassersäulen zu erreichen.

Für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung war an diesem Apparate zunächst ein Messingrohr von $10_{,11}^{mm}$ Durchmesser befestigt. An dasselbe münden allmählige Verengungen auf $2_{,22}$, $5_{,15}$, $7_{,72}^{mm}$ geschraubt, und davon allmählige Erweiterungen auf den Durchmesser eines darüber gesteckten weiteren Rohres von $15_{,08}^{mm}$. Liess man die allmähligen Erweiterungen fort, so hatte man Ausfluss durch eine plötzliche Erweiterung.

Um bei Bestimmung des zugehörigen Widerstandscoefficienten von allen Widerständen innerhalb der engsten Stelle unabhängig zu sein, wurde der an jener Stelle disponible Gesammtdruck direct durch Beobachtung von Druck und Geschwindigkeit ermittelt. Der

Rohrreibungswiderstand im vorderen Rohre wurde auch in Abzug gebracht.

Für die *plötzliche* Erweiterung nimmt mit zunehmendem disponiblem Drucke der Widerstandscoefficient ζ zunächst aus dem Unendlichen kommend ab, bis angenähert auf den gewöhnlich dafür angegebenen Werth $\zeta_0 = (m - 1)^2$, worin m den Quotienten des weiteren Querschnittes durch den engeren bedeutet. Nachher steigt ζ wieder, eine Folge der im Wasser stets absorbirten *Luft*. Bei dem mit zunehmendem disponiblem Drucke auch zunehmenden Vacuum in der Erweiterung wird nämlich schliesslich so viel Luft frei, dass sie nicht mehr vollständig absorbirt werden kann, und dass im äussersten Querschnitte dem Wasser viel kleine, fein vertheilte Luftbläschen beigemischt sind. Dadurch vergrössert sich sein Volumen, und die unter Annahme constanten Volumens angestellte Rechnung ergibt ζ zu gross.

Die Ungleichheit von ζ und ζ_0, und zwar stets in dem Sinne $\zeta > \zeta_0$ einige beobachtete geringe Abweichungen lassen sich leicht anderweitig erklären) ist dann nachgewiesen als Folge davon, dass jedenfalls stets, *wenn eine Flüssigkeit in einen mit gleichartiger Flüssigkeit gefüllten Raum ausströmt, der Druck im bewegten Strahle in der Mündungsebene grösser ist als in der umgebenden ruhenden Flüssigkeit.* Die Richtigkeit dieser Behauptung ist zunächst durch einige wenige directe Druckmessungen gezeigt*); dann durch einige Beobachtungen über das Aussehen des Strahles in der Erweiterung, welches durch einige Figuren veranschaulicht ist. Bei einigen Versuchen zeigte sich um den austretenden Strahl ein *wasserfreier* Raum, der aber mit Wasserdämpfen und freigewordener Luft angefüllt ist, so dass in ihm der absolute Nulldruck noch nicht erreicht war.

Bei *allmähligen* Erweiterungen legt sich die Curve ζ als Function der disponiblen Druckhöhe auch asymptotisch an die verticale Axe, sinkt jedoch schneller und unter den Werth von ζ_0, und zwar um so tiefer, je allmähliger die Erweiterung ist. Nachher steigt sie aber wieder und ist bald identisch mit der für die gleiche plötzliche Erweiterung gefundenen Curve. Das Letztere rührt daher, dass sich bei grösseren Druckhöhen der Strahl nicht mehr an die

---

*) Eine inzwischen mit Wasser angestellte, vielleicht später einmal zu veröffentlichende Versuchsreihe, hat obigen Satz für alle erreichten inneren und äusseren Pressungen bestätigt.

Wandungen der allmähligen Erweiterung anlegt, sondern frei durchströmt, wie bei einer plötzlichen.

Eine Verringerung der Länge des äusseren Rohres vergrösserte bei allen Erweiterungen den Widerstandscoefficienten, weil die freigewordene Luft in einem kürzeren Rohre nicht mehr so vollständig wieder absorbirt werden kann.

Bei praktischen Rechnungen darf man doch unbedenklich den alten Werth des Widerstandscoefficienten für plötzliche Erweiterungen benutzen, da er nur bei ganz kleinen, kaum je vorkommenden Pressungen erheblich grösser ist. Dieselben Coefficienten empfehle ich auch zur Sicherheit bis auf Weiteres für die allmählige Erweiterung. Im Uebrigen ist es aber rathsam, in einer Rohrleitung jede Erweiterung zu vermeiden.

Zürich. A. Fliegner.

W. Fränkel: Anwendung der Theorie des augenblicklichen Drehpunktes auf die Bestimmung der Formänderung von Fachwerken. — Theorie des Bogenfachwerks mit zwei Gelenken. (Civilingenieur 1875. Bd. XXI. S. 515 mit 1 Tafel.)

Kennt man die äusseren Kräfte, welche auf ein aus aneinander gereihten Dreiecken bestehendes, also statisch bestimmtes Fachwerk wirken, so lassen sich die inneren Kräfte, d. h. die Züge oder Drücke in den einzelnen Fachwerkstäben finden. Sind auch die Querschnitte der Constructionstheile bekannt, so berechnen sich leicht die Längenänderungen der letzteren.

Durch die Längenänderung der einzelnen Stäbe entstehen Deformationen des Fachwerkes, wobei jeder Knotenpunkt desselben einen gewissen Weg beschreibt. Es ist einleuchtend, dass man diese Wege bestimmen kann, indem man zunächst nur einen der das Fachwerk bildenden Stäbe als elastisch, die übrigen dagegen als absolut starr ansieht, und die durch die Längenänderung dieses einen Stabes hervorgerufenen partiellen Deformationen bestimmt. Die wirklichen Deformationen des Fachwerkes, d. h. die wirklichen Wege seiner Knotenpunkte, ergeben sich durch geometrische Summirung der so gefundenen Partialresultate.

Bei nur kleinen Formenänderungen des Fachwerkes, wie sie in der Praxis vorkommen, kann man den Weg, welchen irgend ein

Knotenpunkt bei der Längenänderung nur eines Stabes beschreibt, als kleinen Kreisbogen ansehen, dessen Mittelpunkt nach dem Satze von dem augenblicklichen Drehpunkte leicht zu finden ist. Zu diesem Zwecke denke man sich durch den elastischen Stab einen geraden Schnitt geführt, welcher ausser diesem nur noch zwei andere Stäbe trifft, und fixire ferner das Fachwerk in seiner Ebene durch Festhalten der beiden Enden irgend eines seiner starren Stäbe. Dann *ist der der Längenänderung irgend eines Stabes entsprechende augenblickliche Drehpunkt für die sich bewegenden Knotenpunkte des Fachwerkes identisch mit dem Durchschnitte der beiden übrigen vom Schnitt getroffenen Stäbe* (also auch identisch mit dem bei der bekannten Ritter'schen Momentenmethode zu wählenden Drehpunkte.

Die Grösse des Drehungswinkels ergibt sich aus dem Quotienten der Stablängenänderung durch die Länge der Senkrechten von dem augenblicklichen Drehpunkt auf die Richtung des Stabes. Die Grösse des Weges ist hiernach ebenfalls bestimmt.

Der genannte Satz lässt sich mit Nutzen in allen den Fällen anwenden, wo es sich um Bestimmung von Formänderungen von Fachwerken handelt, sei es um z. B. bei bekannten äusseren Kräften die Durchbiegungen von Trägern zu finden, oder auch um, bei gegebenen Bedingungen für die möglichen Deformationen, einzelne etwa noch unbekannte äussere Kräfte zu bestimmen. Letzteres kommt z. B. bei der Untersuchung von Bogenfachwerken vor, für deren Kämpfer die Bedingung gilt, dass die Länge der sie verbindenden Bogensehne unverändert bleibe.

Für derartige Bogenfachwerkuntersuchungen, wie solche am Dresdner Polytechnikum bereits im Wintersemester 1874 mehrfach durchgeführt worden sind, wird ein ausführliches Beispiel gegeben und zum Schlusse noch ein graphisches Verfahren auseinandergesetzt, welches in bequemer Weise gebraucht werden kann, wenn es sich darum handelt, die Resultante der äussern Kräfte nach den Richtungen dreier durchschnittenen Stäbe zu zerlegen, und hierbei entweder zwischen der Resultante und den betreffenden Stäben oder zwischen den Stäben unter sich spitze Schnitte entstehen.

Dresden. W. Fränkel.

W. Fränkel: Ueber die ungünstigste Belastung von Bogenträgern mit zwei Gelenken. (Civilingenieur 1875. Bd. XXI. S. 585 mit 2 Tafeln.)

Bei der Berechnung von Bogenträgern mit zwei Gelenken hat man sich gewöhnlich mit der Annahme einer gleichförmigen Betriebsbelastung begnügt. Die Resultate, zu welchen man auf diese Weise gelangt, können jedoch bedeutend von denjenigen abweichen, welche man erhalten würde, wenn man als zufällige Last den wirklichen Eisenbahnzug zu Grunde gelegt hätte. Und selbst wenn man sich mit der Voraussetzung einer gleichförmigen Belastung zufrieden stellen wollte, bliebe immer noch die Frage offen, wie gross dieselbe anzunehmen sei, damit sie für die Berechnung aller Constructionstheile genüge.

Der vorliegende Aufsatz verschafft hierüber einige Aufklärung. Die Untersuchung beschränkt sich jedoch nur auf flache Bogenträger, wie solche meist Anwendung gefunden haben. Ferner wird der Querschnitt constant vorausgesetzt und die vertheilende Wirkung etwaiger Zwischenträger (z. B. Schwellenträger bei Eisenbahnbrücken) nicht in Betracht gezogen.

Unter Zugrundelegung eines vereinfachten, angenäherten Ausdruckes für den Horizontalschub des Bogens werden zunächst Regeln und einfache geometrische Constructionen entwickelt zur Einstellung eines Systems von Einzellasten, wenn dieselben die stärksten Pressungen beziehentlich Spannungen in den einzelnen Gurtfeldern oder den Füllungsgliedern des Bogenträgers hervorrufen sollen. Diese Maximal-Inanspruchnahmen werden dann mit denjenigen grössten Pressungen bez. Spannungen verglichen, welche in denselben Constructionstheilen bei einer am ungünstigsten vertheilten *gleichförmigen* Belastung entstehen. Durch Gleichsetzung der beiden Resultate ist es dann möglich, diejenige gleichförmige Belastung zu berechnen, welche bezüglich der ungünstigsten Wirkung auf den Bogenträger aequivalent mit dem gegebenen System von Einzellasten ist.

In zwei mitgetheilten Beispielen ist als Betriebslast ein aus schweren Lokomotiven und Tendern bestehender Eisenbahnzug zu Grunde gelegt, und die Rechnung für die Querschnitte im Scheitel, im Kämpfer und in einem Abstande $x = 0{,}5a$ beziehentlich $0{,}6a$ (worin a die Helbsehne des Bogens bedeutet) vom Scheitel durchgeführt. In diesen beiden letztern Querschnitten entstehen nämlich die Maxima maximorum der Gurtpressungen.

Die Zahlenresultate sind folgende:

Beispiel I. Spannweite $2a=20^m$, Pfeil $b=2^m$, Trägerhöhe $h=\frac{2^m}{3}$;

Querschnittslage $m=\frac{x}{a}$	Aequivalente gleichförmige Betriebslast k in Tonnen pro laufenden Meter Gleis, welche im Bogenträger dieselbe grösste Pressung wie der Lokomotivzug erzeugt.		Entsprechendes k in Tonnen pro laufenden Meter Gleis für einen *geraden* Balken.
	Im Obergurte	Im Untergurte	
$m=0$	6,070	6,220	5,436
$m=0,5$	6,275	6,348	5,760
$m=0,6$	—	6,341	—
$m=1$	5,370	5,370	6,500

Querschnittslage $m=\frac{x}{a}$	Aequivalente gleichförmige Betriebslast k in Tonnen pro lfdn. Mt. Gleis, welche im Bogenträger dieselbe grösste Transversalkraft Q wie der Lokomotivzug erzeugt.		Entsprechendes k in Tonnen pro laufenden Meter Gleis für einen *geraden* Balken.	
	für max $(+Q)$	für max $(-Q)$	für max $(+Q)$	für max $(-Q)$
$m=0$	8,112	8,112	8,112	8,112
$m=0,5$	9,000	11,503	7,160	10,930
$m=1$	9,800	7,239	6,500	∞

Beispiel II. Spannweite $2a=50^m$, Pfeil $b=5^m$, Trägerhöhe $h=\frac{5^m}{8}$;

Querschnittslage $m=\frac{x}{a}$	Aequivalente gleichförmige Betriebslast k in Tonnen pro laufenden Meter Gleis, welche im Bogenträger dieselbe grösste Pressung wie der Lokomotivzug erzeugt.		Entsprechendes k in Tonnen pro laufenden Meter Gleis für einen *geraden* Balken.
	Im Obergurte	Im Untergurte	
$m=0$	5,098	5,460	4,970
$m=0,5$	5,278	—	—
$m=0,6$	—	5,660	—
$m=1$	4,882	4,882	5,320

Querschnittslage $m=\frac{x}{a}$	Aequivalente gleichförmige Betriebslast k in Tonnen pro lfdn. Mt. Gleis, welche im Bogenträger dieselbe grösste Transversalkraft Q wie der Lokomotivzug erzeugt.		Entsprechendes k in Tonnen pro laufenden Meter Gleis für einen *geraden* Balken.	
	für max $(+Q)$	für max $(-Q)$		
$m=0$	6,180	6,180	6,14	6,140
$m=0,5$	6,928	8,545	5,67	7,690
$m=1$	7,124	6,227	5,32	∞

Dresden. W. Fränkel.

O. Mohr: Beitrag zur Theorie des Fachwerks. (Zeitschr. des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover. Jahrgang 1874 und 1875.)

Für die Behandlung desjenigen Theils der Theorie des Fachwerks, welcher die von der Elasticität und von der Temperatur abhängigen Formveränderungen der Construction in Betrachtung zieht, also insbesondere für die Bestimmung der Spannungen in statisch unbestimmten Fachwerken fehlte es bis jetzt an einer allgemeinen Methode. Man nahm an, dass die Figur der Construction und namentlich die Art ihrer Unterstützung einen wesentlichen Einfluss auf die Form der Resultate ausüben müsse und beschränkte sich daher auf die Untersuchung besonderer Fälle. Trotzdem ist es so wenig gelungen, diesen Rechnungen eine einfache Form zu geben, dass man in der Regel von ihrer Anwendung ganz absah und mit mehr oder weniger ungenauen Annahmen sie zu umgehen suchte. In der vorliegenden Arbeit ist der Versuch gemacht worden, die bezeichnete Lücke auszufüllen und ein Verfahren zu entwickeln, welches bei allgemeiner Anwendbarkeit die für den praktischen Gebrauch erforderliche Einfachheit und Bequemlichkeit gewährt.

Jedes Fachwerk enthält eine bestimmte von der Zahl der Knotenpunkte und der Stützen abhängige Anzahl von Constructionstheilen, deren Längen zur geometrischen Bestimmung der Constructionsfigur nothwendig sind. Die *statische* Ermittelung der Spannungen des Fachwerks aus den gegebenen Belastungen ist eine bestimmte oder eine unbestimmte Aufgabe, je nachdem das Fachwerk nur die eben genannten nothwendigen Constructionstheile oder ausser diesen noch überzählige Theile enthält. Im letzteren Falle können die Spannungen der *nothwendigen* Constructionstheile ausgedrückt werden als Functionen der gegebenen Belastungen und der unbekannten Spannungen der überzähligen Theile. Die in diesen Gleichungen vorkommenden Constanten lassen sich mit den einfachsten Mitteln der angewandten Statik und in der Regel am bequemsten auf graphischem Wege bestimmen.

Die Beziehungen zwischen den Längenänderungen der überzähligen und denjenigen der nothwendigen Constructionstheile ergeben sich aus einer statischen Betrachtung, bei welcher das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten zur Anwendung kommt. Indem man in die genannten Beziehungen die Ursachen der Längenänderungen einführt, gewinnt man Gleichungen, in welchen die Spannungen der überzähligen Constructionstheile die einzigen Unbekann-

ten sind und zwar enthalten diese Gleichungen ausser den auf jene Ursachen sich beziehenden gegebenen Grössen nur die bereits oben erwähnten Constanten. Es bleibt also nur noch übrig, eine Gruppe von linearen Gleichungen aufzulösen, deren in der Regel kleine Anzahl mit derjenigen der überzähligen Constructionstheile übereinstimmt.

Die gleichförmige Anwendung dieses Verfahrens auf alle Arten von Fachwerken, also auf das Balkenfachwerk, das Bogenfachwerk und auf das continuirliche Balkenfachwerk, bietet, wie an Beispielen gezeigt wird, keine Schwierigkeit.

Im Anschluss an diese Untersuchung wird eine *graphische* Behandlung der Theorie der elastischen Linie des Balkenfachwerks entwickelt, welche nach Form und Inhalt an die im Jahrgange 1868 derselben Zeitschrift veröffentlichte Theorie der elastischen Linie des homogenen Balkens sich anschliesst.

Dresden. O. Mohr.

O. Mohr: Ueber die Zusammensetzung der Kräfte im Raume.

(Civilingenieur Band XXII. Heft 2. 1876.)

Das in dieser Arbeit dargelegte neue Verfahren zur Bestimmung der mit der Centralaxe eines gegebenen Kräftesystems zusammenfallenden resultirenden Kraft R und des zugehörigen Kräftepaares M besteht in Folgendem:

Sind A, B und C die Mittelkräfte der *Projectionen* des Kräftesystems auf die drei Ebenen XY, XZ und YZ eines rechtwinkligen Coordinatensystems; ferner D, E, F die durch die Projectionen A und B, A und C, B und C bestimmten drei Kräfte; endlich C', B', A', die *dritten* Projectionen der Kräfte D, E und F; so ist jedes der drei Kräftesysteme:

$$D,\ C,\ -C',$$
$$E,\ B,\ -B',$$
$$F,\ A,\ -A',$$

gleichwirkend mit dem gegebenen System, wenn man mit $-A'$, $-B'$, $-C'$ Kräfte bezeichnet, welche nur durch den entgegengesetzten Sinn von A', B', C' sich unterscheiden. Die Kräfte D, E und F stimmen nach Sinn, Grösse und Richtung mit der Kraft R überein, und die Centralaxe ist der Schnitt der drei Ebenen,

welche man durch die Kanten des Prismas DEF normal zu den gegenüberliegenden Seitenflächen legen kann. Endlich ergibt sich das Kräftepaar M als Projection eines jeden der drei Paare:

$$A, \ -A',$$
$$B, \ -B',$$
$$C, \ -C';$$

auf eine zu R normal gestellte Ebene.

Dieses Verfahren führt unmittelbar auf das in dem Lehrbuch der Statik von Möbius entwickelte *Nullsystem*. Denn die drei Schnittpunkte der Kräfte F, E und D beziehungsweise mit den Ebenen XY, XZ, YZ sind offenbar die *Nullpunkte* der Coordinatenebenen. Es lassen sich also die Beziehungen des Nullsystems auf die weiteren Umformungen des Kräftesystems sofort anwenden.

Dresden. O. Mohr.

Leonhard Sohncke: Die unbegrenzten regelmässigen Punktsysteme als Grundlage einer Theorie der Krystallstruktur. (83 Seiten. 2 Tafeln. Karlsruhe 1876. Braun. Separatabdruck aus dem 7. Heft der Verhandlungen des naturwissenschaftl. Vereins zu Karlsruhe. — Ein Auszug davon in Poggendorff's Annalen der Physik. Ergänzungsband 7. Seite 337.)

Die neuere Physik hat sich mit Vorliebe damit beschäftigt, die theoretischen Vorstellungen über die moleculare Beschaffenheit der Gase, und in geringerem Grade auch der Flüssigkeiten, auszubilden, während sie die der festen Körper weniger beachtet. Und doch verspricht gerade die Entwicklung einer Molekulartheorie der festen Körper, und zwar vornehmlich der Krystalle, die tiefste Einsicht in das Wesen der Molekularkräfte. — Es liegt zwar eine, in ihren Ursprüngen auf Haüy zurückgehende, aber klar zuerst von Delafosse ausgesprochene und wesentlich von Frankenheim und Bravais ausgebildete Theorie der Krystallstruktur vor, die bei den Mineralogen eine ziemliche Verbreitung gefunden hat; doch hat die Physik im Ganzen wenig Notiz von ihr genommen; und in der That lassen sich erhebliche Einwendungen gegen sie machen. Ihr zufolge liegen die Schwerpunkte der Krystallmoleküle in den Schnittpunkten dreier Züge von je äquidistanten und parallelen Ebenen,

d. h. sie bilden ein räumliches Punktnetz mit parallelepipedischen Maschen oder ein sogenanntes *Raumgitter*; die Moleküle selbst aber sind sämmtlich parallel gelagert.

Diese Grundhypothese erscheint willkürlich; ihre Berechtigung erhält sie erst nachträglich dadurch, dass die Eintheilung der Raumgitter nach dem verschiedenen Grade ihrer Symmetrie genau auf die 7, in der Mineralogie als Krystallsysteme bekannten, Abtheilungen führt. Jedoch gibt es kein Raumgitter mit solcher Symmetrie, wie sie den halbflächigen Krystallen zukommt, so dass sich Bravais bei letzteren genöthigt sieht, den halbflächigen Charakter in die einzelnen Moleküle zu verlegen, diese selbst aber nach einer vollflächigen Strukturform, d. h. nach einem Raumgitter, angeordnet zu denken.

Hiernach wird man zugeben, dass eine andere Theorie, die ebenfalls mit Nothwendigkeit auf die bekannten Krystallsysteme führen würde, als gleichberechtigt mit der Bravais'schen Theorie erachtet werden müsste; dass sie aber sogar für die wahrscheinlichere erklärt werden müsste, wenn sie ausserdem noch den Vorzug einer evidenteren Grundhypothese hätte, und wenn sie die halbflächigen Krystallgestalten ohne Hülfshypothese mit umfasste.

Diese Eigenschaften besitzt die von mir entwickelte Theorie der Krystallstruktur; sie ist viel allgemeiner als die Bravais'sche, *denn unter den aus ihr folgenden zahlreichen Strukturformen sind alle Raumgitter mit enthalten.* Der Grundgedanke der neuen Theorie ist folgender:

Dass die congruenten Grundgebilde, aus denen ein Krystall aufgebaut ist (mag man nun die chemischen Moleküle selbst, oder Complexe von solchen als diese Krystallelemente ansehn), *regelmässig angeordnet sein müssen*, darf wohl als selbstverständlich gelten. Es handelt sich nur darum, den Begriff der regelmässigen Anordnung schärfer zu fassen. Dabei sind besonders zwei Umstände zu beachten. 1) In einem Krystall existirt kein physikalisch ausgezeichneter Ort, namentlich kein Mittelpunkt von physikalischer Bedeutung. 2) Ein beliebig kleines Bruchstück eines Krystalls hat immer noch alle den Krystall charakterisirenden physikalischen Eigenschaften, auch wenn die natürlichen Krystallflächen beseitigt sind; und zwar ist es gleichgültig, an welcher Stelle das Stück aus dem Krystall herausgenommen ist. — Somit erscheint die äussere Krystallform nur als eine mit den physikalischen Eigenschaften gleichwerthige Eigenschaft, nämlich als eine Folge der *Struktur*.

Wenn man es also, wie hier, nur mit der Struktur zu thun hat, so kann man sich von der Betrachtung der Krystallbegrenzung dadurch unabhängig machen, dass man den Krystall als von unbegrenzter Ausdehnung voraussetzt; und dies ist um so gerechtfertigter, als, den Molekularabständen gegenüber, die endlichen Dimensionen des Krystalls jedenfalls für ungemein gross gelten müssen. Wenn man nun, zur Vereinfachung, jedes Krystallelement durch seinen Schwerpunkt ersetzt, so lautet — auf Grund der vorhergehenden Ueberlegungen — die *Hypothese* folgendermassen:

Krystalle — unbegrenzt gedacht — sind regelmässige, unendliche Punktsysteme, d. h. solche, bei denen um jeden Punkt herum die Anordnung der übrigen dieselbe ist, wie um jeden anderen Punkt. Hierdurch ist die Ermittelung aller für die krystallisirten Körper möglichen Strukturformen auf die Lösung der Aufgabe zurückgeführt: *Alle überhaupt möglichen regelmässigen Punktsysteme von allseitig unendlicher Ausdehnung zu finden.*

Eine hiermit nahe verwandte, wenn auch sehr fremdartig klingende, Aufgabe hat nun Herr Camille Jordan schon vor mehreren Jahren in seiner Abhandlung Sur les groupes de mouvements gelöst. Ohne auf diese Aufgabe näher einzugehn, will ich nur hervorheben, dass ihre Lösung die krystallographische Aufgabe zugleich mit löst; jedoch ist sie viel allgemeiner, so dass die für meinen Zweck brauchbaren Resultate erst aus der Gesammtheit der Jordan'schen herausgeschält werden mussten. Auch bedurften sie einer Umdeutung aus dem Bewegungsproblem in das geometrische Problem der Punktsysteme, sowie mehrfacher Zusätze und Verbesserungen. Die letzteren habe ich in einem Anhange meiner Abhandlung zusammengestellt.

Auf eine vollständige Mittheilung der Resultate muss ich an dieser Stelle verzichten, denn es ergeben sich nicht weniger als 54 unbegrenzte, regelmässige Punktsysteme, welche in 8 Abtheilungen zerfallen. Um das Eintheilungsprincip zu verstehn, denke man sich ein solches Punktsystem starr gemacht und aus seiner bisherigen Lage herausgerückt; dann bilden die zuvor von Systempunkten besetzt gewesenen Orte des Raumes ein ihm congruentes System; dieses heisse das *feste* System, gegenüber dem herausgenommenen beweglichen. In welchen Systempunkt des festen Systems man nun einen beliebigen Systempunkt des beweglichen auch legen mag: immer kann man, wegen der Regelmässigkeit, bewirken, dass beide Systeme zur Deckung kommen. Die zur Herbeiführung der Deckung

erforderlichen Bewegungen (Deckbewegungen) sind nun theils Schiebungen, theils Drehungen oder Schraubungen um gewisse, im festen System gegebene, gerade Linien als Axen. Ich bezeichne nun eine solche Gerade, um welche entweder eine Drehung allein oder eine Drehung mit gleichzeitiger Verschiebung längs dieser Geraden (d. h. eine Schraubung) um $\frac{1}{n} \cdot 360^0$ ausgeführt werden muss, damit das System mit sich selbst wieder zur Deckung gelange, als eine *n-zählige Axe* des Systems. Ein und dasselbe Punktsystem kann Axen von mehrerlei Zähligkeit zugleich enthalten; jedoch gibt es nur 2, 3, 4 und 6 zählige Axen. Kommen nun die meistzähligen Axen eines Systems nur nach *einer* Richtung verlaufend vor, so nenne ich diese Richtung die der *Hauptaxe*. Als Eintheilungsgrund dient nun das Vorhandensein oder Fehlen einer Hauptaxe, und nächstdem die Zähligkeit der Axen. Die 8 Abtheilungen sind folgende:

A) Systeme mit Hauptaxe.	1. Die Hauptaxe ist 2-zählig.
	2. „ „ „ 3 „
	3. „ „ „ 4 „
	4. „ „ „ 6 „
B) Systeme ohne Hauptaxe.	5. Es finden sich gar keine Axen.
	6. Es finden sich nur 2-zählige Axen nach 3 senkrechten Richtungen.
	7. Es finden sich 2- und 3-zählige Axen, resp. parallel den Kanten und Diagonalen eines Würfels.
	8. Es finden sich 4- und 3-zählige Axen, resp. parallel den Kanten und Diagonalen eines Würfels.

Jedes dieser Punktsysteme ist entweder ein Raumgitter, oder es besteht aus mehreren (bis 24) ineinander gestellten congruenten Raumgittern. Von obigen Abtheilungen entsprechen durch den Charakter ihrer Symmetrie die 7. und 8. dem regulären Krystallsystem, und zwar erstere ausschliesslich den halbflächigen Gestalten; die ersten 6 Abtheilungen entsprechen, der Reihe nach, dem monoklinen, rhomboedrischen, quadratischen, hexagonalen, triklinen, rhombischen Krystallsystem. Die zahlreichen Punktsysteme innerhalb der einzelnen Abtheilungen, sowie die möglichen Winkel- und Dimensionenverschiedenheiten eines und desselben Punktsystems, geben Rechenschaft von den zahlreichen verschiedenen Typen, die innerhalb

desselben Krystallsystems möglich sind. *Den hemiedrischen Krystallgestalten entsprechen zahlreiche Systeme.* Besonders wichtig ist ferner der Umstand, dass, bei nicht wenigen Punktsystemen, die Punkte eine *schraubenförmige* Anordnung besitzen. Es ist mir nämlich bereits gelungen, die an gewissen Krystallen beobachtete Drehung der Polarisationsebene mit grosser Wahrscheinlichkeit als Folge dieser schraubenförmigen Struktur nachzuweisen. (Zur Theorie des opt. Drehvermögens von Krystallen. Mathem. Annalen Bd. IX. S. 504.) — Mit besonderer Leichtigkeit erklären sich ferner die nicht selten vorkommenden Zwischenformen zwischen zwei Krystallsystemen, welche von beiden Systemen gewisse Eigenthümlichkeiten an sich tragen. *Einer solchen Zwischenform entspricht nämlich ein Punktsystem, welches weniger Axen besitzt als die congruenten Raumgitter, aus denen es aufgebaut ist.*

Die auf Krystallflächen hervorrufbaren *Aetzfiguren* müssen nothwendiger Weise in nahem Zusammenhange mit der Struktur stehn. Daher ist es nicht wunderbar, dass als Aetzfiguren gerade solche Vielecke auftreten, wie sie die regelmässigen ebenen Punktsysteme zusammensetzen, die ich früher ermittelt habe. (Die regelm. ebenen Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung. Borchardt's Journal f. Math. Bd. 77. S. 47.)

Schliesslich sei noch erwähnt, dass diese Theorie eine geometrisch scharfe Formulirung des Begriffs der *Isomorphie* an die Hand gibt: *zwei Substanzen sind isomorph, wenn sie in gleichen oder doch nahe gleichen Strukturformen krystallisiren.*

Die von mir vertretene Theorie ist vorläufig eine rein geometrische; es wäre ein grosser Schritt, wenn es gelänge, sie zu einer mechanischen zu erheben dadurch, dass man nachwiese: die regelmässigen Punktsysteme seien stabile Gleichgewichtslagen für congruente, mit gewissen (vorläufig noch unbekannten) Kräften auf einander wirkende Körperchen.

Carlsruhe. L. Sohncke.

Leonhard Sohncke: Universalmodell der Raumgitter. (Carls Repertorium für Experimentalphysik. Bd. XII. 1876. 6 Seiten.)

Wenn eine Schaar unendlich vieler Parallelebenen gleichen Abstandes geschnitten wird von zwei analogen Schaaren irgend welchen anderen je gleichen Abstandes, so bildet die Gesammtheit der Schnittpunkte ein Punktnetz mit parallelepipedischen Maschen oder ein *Raumgitter*. Bravais hat bewiesen, dass es vierzehn wesentlich verschiedene Arten von Raumgittern giebt, die sich jedoch in sieben engere Abtheilungen, genau entsprechend den sieben Krystallsystemen, zusammenfassen lassen. Die Raumgitter spielen nun aber nicht bloss in der Bravais'schen, sondern auch in der kürzlich von mir aufgestellten viel allgemeineren Theorie der Krystallstruktur eine hervorragende Rolle, indem es sich zeigt, dass alle allseitig unbegrenzten regelmässigen Punktsysteme aus ineinander gestellten congruenten Raumgittern bestehn oder sich, in speciellen Fällen, auf ein einzelnes Raumgitter reduciren. — Bei der Schwierigkeit, welche es hat, sich Schaaren von räumlich vertheilten discreten Punkten anschaulich vorzustellen, habe ich es nicht für überflüssig gehalten, ein Modell zu construiren, welches gestattet, alle vierzehn möglichen Arten von Raumgittern zur Anschauung zu bringen. Die Einrichtung dieses beweglichen Modells ist in der Abhandlung genauer beschrieben, und seine specielle Einstellung für die verschiedenen Gitterarten angegeben. Die Abhandlung ist von einer Abbildung des Modells begleitet.

Carlsruhe. L. Sohncke.

Leonhard Sohncke: Zur Theorie des optischen Drehvermögens von Krystallen. (Mathem. Annalen von C. Neumann. Bd. IX. S. 504—529. 1876.)

Diejenigen Krystalle, welche die Polarisationsebene des Lichts drehn, verrathen bekanntlich durch die Lage gewisser Krystallflächen auch äusserlich einen schraubenförmigen Bau, so dass man schon aus ihrer äusseren Betrachtung entnehmen kann, ob sie rechts oder links drehend wirken. Hiermit ist also der innigste Zusammenhang des Drehvermögens mit der Struktur bewiesen. Trotzdem ist es unter den bisherigen Versuchen einer Theorie jener Drehung nur

der Briot'sche, welcher auf jenen Zusammenhang überhaupt Rücksicht nimmt. Herr Briot findet, dass die schraubenförmige Anordnung des Aethers keinerlei Wirkung übt auf Strahlen, die der Schraubenaxe parallel sind, dass sich aber ein zur Schraubenaxe senkrechter Strahl in zwei entgegengesetzt rotirende elliptische Strahlen von verschiedener Geschwindigkeit theilt, wodurch eine Drehung der Polarisationsebene eintreten muss. In Folge dessen nimmt Briot an, im Quarz sei der Aether nach Schraubenlinien von durchweg gleichem Drehungssinn, aber verschiedener Richtung, geordnet, nämlich so, dass die Schraubenaxen mit den Radien der sechsseitigen Basis des Quarzprismas der Reihe nach zusammenfallen. Obgleich nun der hieraus sich ergebende Drehungsbetrag der Polarisationsebene mit dem beim Quarz beobachteten hinreichend übereinstimmt, so ist diese Theorie doch wenig wahrscheinlich, denn sie bleibt den Nachweis gänzlich schuldig, wie die — durch die Trapezflächen des Quarz sich verrathende — Anordnung der Massentheilchen nach Schrauben, deren Axen der Hauptaxe *parallel* sind, im Aether schraubenförmige Anordnungen *senkrecht* zur Hauptaxe erzeugen könne.

Mir ist es nun auf einem völlig anderen Wege gelungen, die Drehung der Polarisationsebene in den allernächsten Zusammenhang mit der schraubenförmigen Anordnung der Krystallelemente zu bringen, und zwar mit Hülfe einer interessanten Entdeckung, welche Herr Reusch 1869 gemacht hat. Schichtet man nämlich eine grössere Anzahl Blättchen zweiaxigen Glimmers von möglichst gleicher, sehr geringer Dicke in der Weise aufeinander, dass jedes folgende gegen das vorhergehende um 60° (oder 45°) immer in demselben Sinn gedreht ist, so zeigt dies Präparat fast dieselben optischen Erscheinungen wie eine senkrecht zur Axe geschnittene Quarzplatte, und zwar wie ein rechts- oder linksdrehender Quarz, je nach dem Sinne der wendeltreppenförmigen Aufschichtung. Nur in sofern weicht das Verhalten dieser Glimmercombination von dem des Quarz ab, als sich im Polarisationsapparat, bei Drehung der Combination in ihrer Ebene, kleine Aenderungen der Farbenerscheinung einstellen. Jedoch vermuthet Reusch, dass sich das Verhalten der Glimmercombination dem des Quarz um so mehr nähern wird, je dünner die Lamellen und je grösser die Zahl der Umgänge. — Von diesen Thatsachen gehe ich aus. Den Hauptheil meiner Abhandlung bildet die ausführliche Entwicklung der Theorie der Glimmercombination für senkrechten Durchgang der Strahlen; und zwar genügt es schon,

eine nur aus 3 Blättchen aufgeschichtete Combination (1 Triade) zu betrachten; es ist dann leicht, von ihr zu den Combinationen mit mehr Blättchen überzugehn. Die für die Drehung durch eine Glimmercombination entwickelte Formel wende ich dann auf den Fall an, dass die Blättchendicke, multiplicirt mit einer von der optischen Beschaffenheit der Blättchen abhängenden Zahl, klein gegen die Wellenlänge ist. *In diesem Fall ergibt sich für die Drehung der Polarisationsebene dasselbe Gesetz, welches beim Quarz als das, von Herrn Boltzmann vervollständigte, Biot'sche Gesetz bekannt ist.*

Ist es nun hiernach schon nicht unwahrscheinlich, dass dem Quarz eine solche Struktur, wie sie durch die Glimmercombination von Reusch im Groben verkörpert ist, zuzuschreiben sei, so erwächst dieser Hypothese über die Quarzstruktur ihre wahre Berechtigung doch erst aus der von mir entwickelten *allgemeinen Theorie der Krystallstruktur.* Diese sieht einen Krystall als endlichen Theil eines unbegrenzten regelmässigen Punktsystems an, d. h. eines solchen, in dem die Punktvertheilung um jeden Punkt herum dieselbe ist wie um jeden anderen. Unter den aus diesem Grundsatz sich ergebenden 54 verschiedenen Punktsystemen, deren Eintheilung in Gruppen auf die bekannten Krystallsysteme führt, finden sich nun nicht wenige mit einer *schraubenförmigen* Anordnung der Punkte. Legt man durch einen Punkt eines solchen Schraubensystems senkrecht zur Schraubenaxe eine Ebene, so ist sie in ihrer unendlichen Ausdehnung mit unendlich vielen Punkten besetzt; sie heisse eine *Molekularebene.* In den einfachsten Fällen besteht dann das ganze schraubenförmige Punktsystem aus lauter äquidistanten, zur Schraubenaxe senkrechten, congruent besetzten Molekularebenen, deren jede folgende gegen die vorhergehende immer um denselben Winkel (von 60° oder 90° oder 120°) in demselben Sinn gedreht ist. Solche Systeme bieten also die überraschendste Analogie zu der Glimmercombination mit unendlich dünnen Blättchen dar. Die Uebereinstimmung geht aber noch weiter. Nämlich in complicirteren Fällen treten an die Stelle jeder solchen Molekularebene *zwei* derselben, congruent und parallel besetzt, jedoch so, dass im Allgemeinen die Punkte der einen nicht vertikal über denen der anderen liegen, wenn die Schraubenaxe vertikal steht. Jetzt ist jedes Ebenen*paar* gegen das vorhergehende um stets denselben Winkel gedreht. Weil jedes einzelne Ebenenpaar den geometrischen Charakter des monoklinen Krystallsystems besitzt, so ist es nun *vollständig geeignet,* die Stelle des einzelnen doppelbrechenden Blättchens der Glimmer-

combination von Reusch zu vertreten. Der Abhandlung ist die Abbildung eines Punktsystems beigefügt, welches möglicher Weise der Quarzstruktur zu Grunde liegen könnte.

Es ist wichtig hervorzuheben, dass — abgesehen von den 2 Abtheilungen der Punktsysteme, welche dem triklinen und monoklinen Krystallsystem entsprechen — in keiner der übrigen Abtheilungen schraubenförmige Punktsysteme fehlen, selbst nicht in jener Abtheilung, die dem regulären Krystallsystem entspricht. Hiermit ist die Möglichkeit gegeben, auch bei regulär krystallisirenden Körpern, wie z. B. beim chlorsauren Natron, das Drehvermögen auf eine schraubenförmige Struktur zurückzuführen.

Carlsruhe. L. Sohncke.

M. Cantor: Die Römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst. (Eine historisch-mathematische Untersuchung. Leipzig 1875. Druck und Verlag von B. G. Teubner. 185 S. Text; 46 S. Anmerkungen; 6 S. Sachverzeichniss für den Text; 6 lithographirte Tafeln.)

„Die Römer haben für die Feldmesskunst der Griechen und für unmittelbar oder mittelbar damit Zusammenhängendes, welches ihnen seit dem Beginne der christlichen Aera zufloss, eine aufbewahrende Mittelstelle abgegeben. Sie ähneln darin den Arabern, nur dass sie weniger in sich aufnahmen, entsprechend ihrer geringen mathematischen Begabung. Hinzuerfunden haben sie so gut wie Nichts, höchstens einige Operationen wirklicher Feldmesskunst. Weggelassen haben sie von dem, was sie sich angeeignet hatten, auch nicht viel; die falschen, meistens altegyptischen Näherungsformeln vor Allen haben sie niemals ausser Uebung treten lassen. Was für die Römer gilt, bleibt wahr für ihre Schüler im Mittelalter. Einzelne hervorragende Geister ausgenommen, nimmt das Verständniss des Aufbewahrten immer mehr ab, aber die Menge des Aufbewahrten bleibt. Sie ist nicht gross, doch immerhin erheblicher, als man sonst wohl annahm. Dass überhaupt irgend etwas von Geometrie in die wissenschaftliche Barbarei des frühsten Mittelalters hinüber sich retten konnte, das ist das unschuldige Verdienst der römischen Agrimensoren.“

So lautet der letzte Absatz des oben genannten Buches, und da ich auch heute kaum wüsste, den wesentlichen Inhalt der ganzen Untersuchung deutlicher in wenigen Sätzen darzustellen, so wird man mir verzeihen müssen, wenn ich den Bericht über meine Arbeit mit diesem wörtlichen Selbstcitate beginne. Ich knüpfe daran sofort eine Bemerkung über den Gang der Untersuchung. Es galt mir, den Nachweis zu führen, wie gewisse geometrische Dinge sich von Schriftsteller zu Schriftsteller, von Volk zu Volk vererbten, und so war es in der Natur des Stoffes von selbst begründet, wenn in einem ersten Capitel die egyptischen Anfänge der geometrischen Wissenschaft und des Rechnens, soweit es hier in Betracht kam, erörtert würden; wenn ein zweites Capitel die Feldmesskunst der Griechen behandelte; wenn ein drittes, ein viertes Capitel den Römern und deren Schülern sich zuwendeten; wenn in jedem folgenden Capitel auf die früheren zurückgegriffen wurde, um die Uebereinstimmung des aller Orten Gelehrten mitunter bis auf den Wortlaut genau hervortreten zu lassen. Aeussere Gründe boten die Veranlassung, dass von diesem Gange so weit abgewichen wurde, dass jenes erste egyptische Capitel in Wegfall kam. Die auch heute noch nicht vollendete Herausgabe des mathematischen Papyrus Rhind legte mir eine zu grosse Beschränkung in der Auswahl des in jenem ersten Capitel zu verwerthenden Materials auf, als dass nicht ein unziemliches Missverhältniss der Ausdehnung sich hätte ergeben müssen, welches ich zu vermeiden wünschte, sei es auch nur, um bei flüchtigen Lesern den Argwohn nicht aufkommen zu lassen, von den Egyptern sei in der That nicht mehr zu sagen, als hier auf wenigen Seiten geboten wird. Darum zog ich es vor, das, was aus bisherigen Veröffentlichungen, insbesondere von Lepsius und Aug. Eisenlohr, zur freien Verfügung stand, in das Capitel, welches mit dem Griechenthume, sowie theilweise in das, welches mit den Römern sich beschäftigt, hineinzuverarbeiten, und somit besitzt mein Buch neben einer kurzen Einleitung, in welcher die Aufgabe gestellt, den Verdiensten eines namhaften Vorgängers, Fr. Hultsch die gerechte Würdigung ertheilt und den Vorstehern mehrerer Bibliotheken pflichtschuldiger Dank erstattet wird, nur drei Capitel:

1) Heron von Alexandrien S. 6—63.
2) Römische Feldmessung S. 63—139.
3) Die Schüler der Römer S. 139—185.

In diesem Referate, wo es auf stylistische Abrundung weniger ankommt, als auf möglich scharf hervortretenden Inhalt, will ich von

der angedeuteten Viertheilung im Gegensatze zu dem Buche selbst Gebrauch machen.

Die *Egypter* legten sich schon vor dem Jahre 1700 v. Chr. Fragen vor, welche auf Ausmessung grad- und krummlinig begrenzter Figuren und Körper sich bezogen. Unter den Figuren scheinen sie das Dreieck in erster Linie beachtet zu haben, und zwar das gleichschenklige Dreieck, dessen Seiten a, a, b heissen mögen und dessen Fläche als $\frac{a \cdot b}{2}$ berechnet wurde. Aus dem gleichschenkligen Dreieck entstand durch Abstumpfung das gleichschenklige Paralleltrapez, dessen Seiten a, a, b_1, b_2 die Fläche $\frac{a(b_1 + b_2)}{2}$ errechnen liessen. Dieselben falschen Näherungsformeln erhielten sich bis nach 100 v. Chr., wenn auch eine gewisse Aenderung sich dadurch kund zu geben scheint, dass allmälig nicht das Dreieck, sondern das Trapez als die primäre Figur aufgefasst wurde, von welcher das Dreieck nur den speciellen Fall der einen verschwindenden Parallele darstellt, dem Begriffe nach ein gewisser Fortschritt, während zugleich ein Rückschritt darin sich offenbart, dass bei dem Trapeze die Bedingung des Parallelismus zweier Seiten, der Gleichheit der anderen beiden in Wegfall kommt und allgemein aus den einander gegenüberliegenden Seiten a_1, a_2 und b_1, b_2 die Fläche des Vierecks mit $\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{b_1 + b_2}{2}$ gewonnen wird. Zusammengesetztere Figuren werden zum Zwecke der Berechnung durch Hülfslinien in Dreiecke und Vierecke zerlegt. Von Wichtigkeit ist noch, dass in der ältesten Zeit bereits ein Name, *merit*, für die oberste Linie jeder solchen gradlinigen Figur auftritt. Der Kreis wird quadrirt als $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$, wo d den Durchmesser bedeuten soll, eine Formel, welche dem Werthe $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}1604 \ldots$ entspricht. Das Rechnen der Egypter war zu derselben frühen Zeit ein bereits sehr entwickeltes. Bruchrechnungen gehörten namentlich zu dem täglichen Bedürfnisse und wurden so bewältigt, dass die vorkommenden Brüche stets in Gestalt von Summen einfacherer Brüche, welche nur die Einheit zum Zähler haben, behandelt wurden. Zu einer solchen Rechnungsweise war aber unbedingt Eines nothwendig: die Möglichkeit, jeden beliebigen Bruch in eine Summe von Partialbrüchen, oder wie ich lieber sage, von Stammbrüchen zu verwandeln. Das ist eine Aufgabe, welche Jahrtausende lang wiederkehrt, wenn auch unter den im Drucke

bekannten Schriftstellern erst Leonardo von Pisa 1202 eine Methode dazu lehrt, auf deren möglicherweise uralten Ursprung ich hingewiesen habe. Als charakteristisch für dieselbe möchte ich die Benutzung von ein für alle Mal ausgerechneten Hülfstabellen hervorheben. Setze ich noch hinzu, dass jede Aufgabe des ältesten bekannten egyptischen Uebungsbuches die Auflösung durch die Worte „Mache es so" einleitet, so dürfte in diesem Referate genug gegeben sein. Egyptisch freilich ist noch mancherlei, worauf hier nicht ausführlicher eingegangen werden kann, so auch die Einrichtung des Schaltjahres von 366 Tagen, welches alle 4 Jahre wiederkehrend die Ordnung der Jahreszeiten und des kirchlichen Jahres unverrückt feststellt, eine Einrichtung, welche am 7. März 238 v. Chr. vielleicht unter dem Einflusse des geistvollen Chronologen Eratosthenes durch das Edict von Canopus ins Leben gerufen wurde, wenn auch nur, um bald wieder ausser Uebung zu kommen.

Die *Griechen* verkörpern sich für den bei der gegenwärtigen Untersuchung vorliegenden Zweck in die eine Persönlichkeit des Heron von Alexandrien, eines Schriftstellers, der etwa um 100 v. Chr. muthmasslich ein officielles Werk über Feldmesskunst und Feldmesswissenschaft verfasste, die einzige derartige Schrift aus alexandrinischer Zeit, welche in umfangreichen Ueberresten zu uns gelangt ist. Feldmesskunst und Feldmesswissenschaft unterscheide ich dabei so, dass ich unter Ersterer die auf dem Felde selbst zu vollziehenden Operationen, als Abstecken von Geraden nach bestimmter Richtung, von rechten Winkeln, u. s. f. verstehe, unter Letzterer dagegen die Kenntniss von Formeln zur Berechnung insbesondere von Flächenräumen verschiedener, durch gradlinige Bestimmungsstücke gegebener Figuren. Heron von Alexandrien, ein vielseitiger Gelehrter, dessen sämmtliche uns erhaltenen Werke verdienter Besprechung unterzogen wurden, hat sowohl in der Feldmesskunst als in der Feldmesswissenschaft Bedeutendes geleistet. Ersterer ist seine Dioptrik gewidmet, d. h. die Lehre von der Anwendung der Dioptra, eines feldmesserischen Werkzeuges, in welchem der Uranfang unserer Theodolithen nicht zu verkennen ist. Letztere bildet den Gegenstand einer Anzahl anderer Abhandlungen, theilweise auch der Dioptrik. Die Hauptaufgabe, welche ich mir nun in dem Capitel über Heron von Alexandrien stellte, bestand darin: nachzuweisen, was er den Egyptern entnahm, vorbereitend zu ordnen, was spätere Zeiten ihm entnehmen sollten, ausser dem Zusammenhange auf Einzelheiten aufmerksam zu machen, deren Ursprung

man noch nie so weit zurück verfolgt hatte. Als egyptisch zeigte sich sofort die stylistische Form von dem einleitenden „Mache es so!“ bis zu der als *κορυφή* benannten Scheitellinie; egyptisch ist die fast durchgängige Benutzung von Summen von Stammbrüchen; egyptisch ist die Zerlegung von Figuren durch Hülfslinien in Elementarfiguren; egyptisch sind die falschen Näherungsformeln für die Fläche von Dreiecken und Vierecken. Eine Anzahl von mit dem Kreise sich beschäftigenden Aufgaben benutzen Formeln, welche auf den Werth $\pi = 3$ herauskommen. Dieser Werth ist allerdings, so viel wir wissen, nicht egyptisch, dagegen habe ich an anderer Stelle, in einer ausführlichen Recension von Oppert: L'étalon des mesures Assyriennes (Zeitschr. Math. Phys. XX., histor.-literar. Abth. S. 149—165) den Nachweis zu führen gesucht, dass hier ein babylonischer Baustein mitten unter anderartigem Gemäuer zu erkennen sei. Darf ich heute eine bisher nicht veröffentlichte Bemerkung hinzufügen, so ist es die, dass ein auffallender Unterschied zwischen egyptischer und babylonischer Kreisrechnung bestand, wofern wirklich $\pi = 3$ babylonischer Herkunft ist. Die Egypter, das habe ich in meinem Buche hervorgehoben, „dachten die Zahl π als Quadratzahl, wodurch eine förmliche Umwandlung des Kreises in ein Quadrat leichter möglich war, als unter jeder anderen Voraussetzung“, oder anders gesagt: die Egypter hatten keine andere Absicht als die der thatsächlichen Herstellung eines dem Kreise gleichflächigen Vierecks. Die Babylonier dagegen suchten die Länge des Kreisumfanges zum Durchmesser in Beziehung zu setzen. Die griechische Geometrie wechselte in ihren Auffassungen. Den Egyptern folgend, suchten um 430 v. Chr. ein Bryson, ein Antiphon, ein Hippokrates von Chios den Kreis in ein ihm gleichflächiges Quadrat zu verwandeln und nannten diese Aufgabe „Tetragonismus“ mit einem ihre Methoden überlebenden Namen; nachher gelangte die babylonische Auffassungsweise zur Geltung, und von ihr aus fand Archimed $\pi = \frac{22}{7}$ in einer Abhandlung, welcher er aber auch statt des üblichen Namens einen neuen: den der Kreismessung beilegte. Von den geometrischen Eigenthümlichkeiten des Heron, welche auf spätere Nachfolger sich vererbt haben, mögen an dieser Stelle nur einige wenige hervorgehoben werden: die Formel für die Dreiecksfläche aus den 3 Seiten des Dreiecks; eine näherungsweise ziemlich zutreffende Berechnung des gleichseitigen Dreiecks als $\frac{1}{3} + \frac{1}{10}$ des Quadrates der Seite; eine Gleichung, welche den Zusammenhang der

Seite a_8 des regelmässigen Achteckes und des Durchmessers d_8 des umschriebenen Kreises durch $\left(\frac{d_8}{2}\right)^2 = \left[\sqrt{2\left(\frac{a_8}{2}\right)^2} + \frac{a_8}{2}\right]^2 + \left(\frac{a_8}{2}\right)^2$ darstellt; eine Regel zur Construction des regelmässigen Achteckes vom Quadrate aus, indem aus jedem Eckpunkte des Quadrates mit dessen halber Diagonale im Halbmesser Kreisbögen beschrieben werden, welche auf den Quadratseiten die 8 Eckpunkte des verlangten Achteckes als Durchschnittspunkte hervorbringen. Die beiden letzten Dinge stehen zwar an verschiedenen Orten, erweisen aber ihren sachlichen Zusammenhang durch die Möglichkeit, den Beweis für Beides an einer und derselben Figur, an zwei einander symmetrisch durchsetzenden Quadraten zu führen. Endlich berichte ich allerdings wiederum in sehr zusammengeschrumpftem Auszuge über Dinge, welche man früher noch nicht bis in die vorchristliche Aera verfolgen zu können glaubte. Dazu gehören gewisse trigonometrische Kenntnisse, da man Formeln für die Fläche jedes regulären Vielecks vom Dreieck bis zum Zwölfeck aus der Seite berechnet, ferner Formeln für die Fläche von Kreisabschnitten, für die Länge von Kreisbögen, für den Rauminhalt von Kugelcalotten, mögen sie noch so sehr den Charakter ungenügender Näherung an sich tragen, nicht wohl unter einer andern Rubrik wird unterbringen können. Dazu gehört das erstmalige Vorkommen der Quadratwurzel aus der negativen Einheit, herbeigeführt durch den Mangel an richtiger Determination für die Länge gewisser Stücke, welche bei einer die Pyramide betreffenden Aufgabe in Rechnung kommen, und umgangen durch die wenn auch nicht ausdrücklich benutzte Annahme $\sqrt{-1} = 1$. Dazu gehört die Auflösung der unreinen quadratischen Gleichung, welche durchaus unentbehrlich war, um unter Voraussetzung der gegebenen Summe von Kreisfläche, Peripherie und Durchmesser den letzteren allein zu berechnen. Auch hier seien zwei ergänzende Bemerkungen erlaubt; die eine, dass die gegebene Summenzahl so recht Zeugniss davon gibt, wie hier eine vorzugsweise algebraische Aufgabe vorlag, da Flächen und Längen geometrisch nicht homogen, auch nicht addirt werden können, die andere, dass gezeigt werden kann, dass die Auflösungsmethode durchaus mit derjenigen übereinstimmt, welche Nesselmann (Algebra der Griechen S. 319) bei Diophant zu enthüllen wusste. Wichtig wäre auch die Methode der Quadratwurzelausziehung des Heron, wenn es gelänge, sie zu ermitteln. Leider war dieses bisher nicht der Fall und nur das negative Ergebniss konnte festge-

stellt werden, dass Heron's Methode eine andere gewesen sein muss als die Theon's von Alexandrien, d. h. als die moderne Methode.

Den *Römern* ist der räumliche Haupttheil des Buches gewidmet. Es galt dabei zuerst ins Klare zu kommen über den verschiedenzeitigen und nach meinem Dafürhalten auch verschiedenseitigen Ursprung der Feldmesskunst und der Feldmesswissenschaft der Römer. Für jene nehme ich eine etruskische, für diese eine alexandrinische Herkunft an; jene in das graue Alterthum urdenklicher Väterzeiten sich verlierend, diese an ein ganz bestimmtes Ereigniss, an den durch Cäsar geführten alexandrinischen Krieg anknüpfend, nach welchem, um nicht zu sagen in dessen Folge, alexandrinische Chronologie und Geodäsie nach Rom übersiedelten. Mit dem altetruskischen Ursprung der Feldmesskunst bei den Römern hängt der Name des hauptsächlichen dabei benutzten Apparates „Groma" zusammen, welches keineswegs, wie immer angenommen worden ist, mit „Gnomon" gleichbedeutend ist, sondern sachlich und lautlich durchaus von dem Sonnenzeiger zu unterscheiden, vielmehr eine Art von Winkelkreuz gewesen ist. Der alexandrinische Ursprung der Feldmesswissenschaft lässt sich noch genauer als heronischer Ursprung bezeichnen, indem es gelingt, zwischen den Schriften römischer Feldmesser und den heronischen Werken vollständige Textesgleichungen herzustellen, d. h. zu einer überwiegend grossen Anzahl römischer Stellen die griechischen Paragraphe anzugeben, aus denen sie oft in wörtlicher Uebersetzung entnommen sind, ein noch weit überraschenderes Zusammentreffen, nachdem es aus einzelnen bestimmten Angaben gelungen ist, den Beweis zu führen, dass wir nicht einmal diejenige Ausgabe heronischer Schriften besitzen, welche damals nach Rom gekommen ist. Die römischen Schriftsteller, welche zu diesem vergleichenden Endzwecke einer gründlichen Durchsicht unterzogen wurden, sind theils solche, welche zu den eigentlichen sogenannten Agrimensoren gehören und insbesondere in einer im VI. oder VII. Jahrhundert entstandenen Handschrift, dem Codex Arcerianus der Wolfenbüttler Bibliothek enthalten sind, theils andere, welche wie der Bauschriftsteller Vitruvius, der die Landwirthschaft behandelnde Columella, der Wasserbaumeister Frontinus, der vielseitig gewandte Boetius, vielleicht auch der Militärschriftsteller Hyginus sich nur nebensächlich mit geometrischen Dingen beschäftigten. Der Letztgenannte wird in meinem Buche noch für die gleiche Persönlichkeit wie ein zu Trajans Zeiten lebender Feldmesser gleichen Namens gehalten. Erst nach vollendetem Drucke meiner

Untersuchungen erschien in dem Rheinischen Museum für Philologie (Jahrgang 1875, Bd. XXX, S. 469) ein Aufsatz von H. Droysen der den Militärschriftsteller in die Zeit zwischen 240 und 267, also um anderthalb Jahrhunderte später zu verweisen sucht. Unter den bei jener Durchsicht bemerkenswerth erschienenen, vielfach noch nie beachteten Dingen zum Zwecke dieses Berichtes eine Auswahl zu treffen, fällt mir schwer. Ich muss der Hauptsache nach hier auf mein Buch selbst verweisen und möchte nicht einmal für Einiges, welches ich in mein Referat aufnehme, den Anspruch auf besondere Wichtigkeit erheben. Bei Vitruvius z. B. fand sich allein eine Kreisberechnung vor, welche von der Voraussetzung $\pi = 3\frac{1}{8}$ ausgeht. Denselben Werth $\pi = 3\frac{1}{8}$ hat, wie ich zeigte, noch Albrecht Dürer benutzt, und mir schien dieses ein Beweis von der conservativen Kraft solcher Volksschichten, welche nur übungsmässig nicht auf wissenschaftliche Gründe hin Rechnungsverfahren sich aneignen. Mochte mir auch kein Zwischenglied zwischen Vitruvius und Albrecht Dürer bekannt sein, ich zweifelte nicht an der Möglichkeit, ein solches aufzufinden. Max Curtze hat, wie er in einer Besprechung meines Buches in der Jenaer Literaturzeitung ankündigt, das Material in Händen, jene Lücke genügend auszufüllen, und ich sehe der Veröffentlichung dieses Materials in Grunert's Archiv mit Spannung entgegen. Bei Boetius konnte auf die merkwürdige Figur zweier einander durchsetzender Quadrate hingewiesen werden, deren Bedeutung aus unseren obigen Bemerkungen über Heron's Achteckconstruction einleuchtend für Boetius selbst verloren gegangen war, da er die Figur überhaupt nicht mit Geometrischen sondern mit der Darstellung eines arithmetischen Gegenstandes: der achteckigen Zahlen in Verbindung bringt. Eben bei Boetius fand sich auch der Wortlaut einer Aufgabe, welche es möglich machte, einen Schreibfehler im Codex Arcerianus zu verbessern, der an sich höchst nebensächlich dadurch zu nie geahnter Bedeutung sich erhob, dass auf die abschreibende Wiederholung desselben eine ganze Beweisführung einer historisch wichtigen Thatsache sich aufbauen liess. Der Schreibfehler findet sich in einer der Ueberschrift zufolge von Nipsus herrührenden Aufgabe und wurde dann später im Kloster Bobbio, wo der Codex am Ende des X. Jahrhunderts sich befand, von Gerbert abgeschrieben, dabei aber so wenig daran gedacht, dass hier ein Wort weggefallen sein könne, dass vielmehr aus dem an sich widersinnigen Zusammenhange eine neue selbstverständlich falsche Definition ihren Ursprung nahm. Zu den Schriftstellern des

Codex Arcerianus gehört auch Frontinus, oben als Wasserbaumeister bezeichnet. Es ist gelungen, aus einer handschriftlichen Randbemerkung zu Gerbert's Geometrie den Nachweis zu führen, dass ein von mancher Seite angezweifeltes geometrisches Werk des Frontinus thatsächlich im XII. Jahrhunderte noch vorhanden war; es ist vielleicht sogar gelungen, ein Stück desselben mitten in der praktischen Geometrie des Leonardo von Pisa wieder zu entdecken. Ein grösseres Bruchstück derselben alten Sammelhandschrift der Wolfenbüttler Bibliothek führt entstellte Autorennamen, welche von philologischer Seite als richtig Epaphroditus und Vitruvius Rufus lautend gelesen worden sind. Dieses Bruchstück habe ich zum ersten Male vollständig veröffentlicht, zum ersten Male mit Rückblick auf seine Quellen zu erläutern gesucht. Aus demselben geht mit unzweifelhafter Gewissheit hervor, dass die Verfasser 1) eine Formel kannten zur Darstellung einer Polygonalzahl aus ihrer Seite; 2) eine Formel zur Darstellung der Seite aus der Polygonalzahl; 3) eine Formel zur Auffindung der Pyramidalzahlen aus den zugehörigen Polygonalzahlen und ihren Seiten; 4) eine Summenformel für die Reihe der Kubikzahlen. Nicht minder unzweifelhaft ist es, dass alle diese Dinge ursprünglich in griechischem Texte vorgelegen haben müssen, wenn auch nicht die geringste Spur auf den Namen des eigentlichen Erfinders zurückweist. Nur dass die Griechen sich mit den figurirten Zahlen vielfach beschäftigten, steht fest, und eine dem griechischen Geiste verwandte Methode, die Kubikzahlensummen zu finden, nachträglich wiederherzustellen, ist mir, wie ich mir schmeichle, gleichfalls gelungen. In allen diesen römisch-geometrischen Schriftstücken lassen sich, wie zum Schlusse bemerkt werden mag, in Nachachmung der heronischen Schriften bestimmte Wortformen, aber auch bestimmte Hauptabschnitte erkennen. Die Scheitellinie heisst *vertex* oder *coraustus*, letzteres eine offenbare Verketzerung aus κορυστὸς (sc. γραμμή), wie Gottfried Hermann bereits 1840 bemerkt hat. Das „Mache es so" kehrt als S. Q. d. h. sic quaeres wieder. Die gemeinten Abschnitte, von denen allerdings bei dem einen Schriftsteller der Eine, bei dem anderen der Andere bevorzugt wird, sind Maassbestimmungen, geometrischen Definitionen, der Feldmesskunst, der Feldmesswissenschaft und der Lehre von den figurirten Zahlen gewidmet. Leider sind uns Stücke über Feldmesskunst nur in sehr geringfügigen Ueberresten erhalten, so fest es steht, dass dergleichen z. B. aus der Feder eines Frontinus, eines Balbus, eines Celsus vorhanden gewesen sein müssen.

Die Schüler der Römer, welche dem letzten Abschnitte meines Buches Ueberschrift und Inhalt gaben, sind der Zeit wie dem Raume nach über viele Jahrhunderte, über weite Ländergebiete zerstreut. Auch war es nicht meine Absicht jeden einzelnen Autor zu nennen, geschweige denn eingehend zu behandeln, der in diesem oder jenem Sinne Abhängigkeit von Römischer Geometrie erkennen lassen mag. Nur einzelne Vertreter wurden ausgewählt, manche wegen ihrer eigenen geistigen Bedeutung, manche ich könnte fast sagen zufällig und beispielsweise. Die sogenannten Aufgaben zur Verstandsschärfung stehen an der Spitze dieses Abschnittes. Ich durfte mich der alten ehemals Reichenauer Handschrift dieser Aufgaben bedienen, welche gegenwärtig der Staats- und Hofbibliothek in Karlsruhe angehört, und welche, wenn sie es auch unentschieden lässt, wer der Sammler jener Aufgaben war, doch dafür die Gewissheit liefert, dass jene Sammlung um das Jahr 1000 vorhanden war, denn in jener Zeit ist die Handschrift selbst entstanden. Mag es nun in vielen anderen Beziehungen von keineswegs geringer Tragweite sein, ob die Sammlung noch weiter zurück bis auf Alcuin geht, was dem inneren Gehalte wie der Form nach gar wohl möglich ist, für die Geschichte der Mathematik und für die besondere Aufgabe, welche ich mir in meinem Buche gestellt hatte, ist es ziemlich müssig auf diese Frage sehr grosses Gewicht zu legen. Dagegen ist die Entstehung der Aufgaben unter Benutzung römischer Quellen laut zu betonen. Der Nachweis einer dieser Aufgaben in einem rechtswissenschaftlichen Werke aus Trajans Zeiten war für mich selbst eine der freudigsten Ueberraschungen. Diese Aufgabe heute noch in allen Uebungsbüchern mit geringen Ausnahmen als Lehrmittel verwerthet gehört freilich nicht der Geometrie sondern der Theilungsrechnung an; sie bietet eine um so willkommenere Controle des Ursprungs auch der geometrischen Aufgaben, welche daneben stehen. Ungleich bedeutender ist die Geometrie Gerberts. Ich hatte auch hier die Annehmlichkeit einer handschriftlichen Quelle mich bedienen zu können. Das einzige vollständige Exemplar von Gerberts Geometrie entstanden in der ersten Hälfte des XII. Jahrhunderts, war mir aus der Bibliothek des Benediktinerstiftes zu St. Peter in Salzburg zur Verfügung gestellt, und so konnte ich nicht nur die Frage entscheiden, ob überhaupt eine einheitliche Geometrie Gerberts existire, sondern auch die Frage nach der Entstehungszeit jener Geometrie. Dass ich die erstere Frage bejahte bedarf keiner Rechtfertigung. Es müsste

doch komisch sein, wenn moderne Zweifelsucht über das, was ein geometrischer Schriftsteller aus dem Jahre 1000 etwa verfasst haben kann oder nicht kann, besser unterrichtet zu sein wähnte, als die in mathematischen Dingen gar nicht ungeübte, an Gerbert noch voll Pietät sich erinnernde Mitte des XII. Jahrhunderts, und dass damals die Geometrie der salzburger Handschrift als die Gerberts gedacht wurde, bezeugt ohne Möglichkeit des Widerspruchs der Anfang dieser Handschrift, deren vortrefflich facsimilirte Wiedergabe auf der letzten Figurentafel meines Buches jeden Leser in den Stand setzt sich durch eigene Anschauung von der Folgerichtigkeit meiner Schlüsse zu überzeugen. Daneben habe ich nicht versäumt auch die Bemängelungen, welche gegen die Zusammengehörigkeit so verschiedenartiger Abschnitte, als in der sogen. Geometrie des Gerbert vereinigt wären, gerichtet zu werden pflegen, zu erörtern. Die Verschiedenartigkeit ist vorhanden, aber sie ist nicht grösser als in den heronischen Schriften, als in deren römischen Nachbildungen, welche selbst wieder Gerbert als Quelle dienten. Alle jene früher genannten Theile, Maasse und Definitionen, praktische und rechnende Geometrie und Arithmetik finden sich seit langer Zeit zuerst wieder vereinigt, in meinen Augen eine zuverlässigere Unterstützung der Annahme eines einheitlichen Verfassers als der entgegengesetzten Annahme. Ist aber Gerbert der Verfasser der ihm zugeschriebenen Geometrie, so ist deren Abfassungszeit leicht und genau zu bestimmen. Textvergleichungen waren zwischen Römern und Heron auch schon von Hultsch angestellt worden, wenn auch nicht so vollständig wie von mir, Textvergleichungen Gerberts mit den Römern sind nirgend veröffentlicht gewesen. Sie beweisen aber, dass Gerbert den Codex Arcerianus mit seinem Schreibfehler innerhalb einer Aufgabe des Nipsus sich aneignete, dass er dagegen die Geometrie des Boetius, aus welcher jener Schreibfehler ihm verständlich werden musste, nicht kannte, als er seine Geometrie verfasste. In Bobbio lebte Gerbert 981 und 982, die Geometrie des Boetius fand er 985 (nach Anderen 982) in Mantua. Zwischen 981 und der Reise nach Mantua fällt demnach die Arbeitszeit, welche Gerbert auf seine Geometrie verwandte. Die Textvergleichungen bieten aber auch noch mehr. Für fast den ganzen eigentlich feldmesserischen Theil von Gerberts Geometrie fehlen uns die römischen Quellen. Werden sie auch Gerbert gefehlt haben? Ich habe zu zeigen gesucht, dass diese Annahme nicht wohl gewagt werden kann. Gerbert wird gerade

in der Feldmesskunst am wenigsten als Orginalschriftsteller zu vermuthen sein. Was von diesem Gegenstande bei ihm erhalten ist, kann uns folglich wahrscheinlich ersetzen, was in römischer Form verloren gegangen ist, und eine nicht geringe Bestätigung dieser Meinung gewährt das wiederholte Auftreten von durch Gerbert beschriebenen feldmesserischen Arbeiten bei Leonardo von Pisa. Nenne ich hier nur noch die Namen Herrmannus Contractus, Johannes Widmann von Eger, Gregorius Reysch, in deren Werken mehr oder weniger von den Römern aus übermitteltes heronisches Material nachgewiesen wird, so habe ich damit ein Gerippe auch des letzten Abschnittes meines Buches hergestellt. Einem wahren Körper kann es nicht zu gleichen den Anspruch erheben, auch wenn ich hinzufüge, dass hier zur vollen Wahrheit gelangt, was ich in den an die Spitze dieses Referates gestellten Schlussworten gesagt habe; dass es sich zeigt, dass das Alte nachgrade verständnisslos und immer verständnissloser aufbewahrt wird, dass selbst Gerbert, sonst ein Riese unter Zwergen, nicht ganz von Irrthümern frei zu sprechen ist, wie sein ängstliches Kleben an jenem Fehler des Nipsus veranschaulicht.

Heidelberg. M. Cantor.

R. Engelmann: Abhandlungen von Friedrich Wilhelm Bessel. (In drei Bänden. — Erster Band: I. Bewegungen der Körper im Sonnensystem. II. Sphärische Astronomie. — Mit dem Bildniss Bessel's und 2 lithogr. Tafeln. Leipzig, W. Engelmann. 1875.)

Die Entwickelung und der heutige Zustand der modernen Astronomie als Bewegungslehre der Gestirne beruhen wesentlich auf den Forschungen und Arbeiten von Gauss und Bessel. Wenn ersterer, der mehr abstracten und speculativen Richtung seines Geistes folgend, die allgemeinen Wahrheiten der Mathematik vorzugsweise auf die Untersuchung der Bewegungserscheinungen im Sonnensystem anwandte, die astronomischen Probleme, die sich hier bieten, gewissermassen als die lehrreichsten und fruchtbringendsten Beispiele betrachtete, an denen die Kraft der Analyse zu üben und zu erproben war, so fasste Bessel, als reiner Astronom, dem die Mathematik nur Mittel zum Zweck war, die astronomische Wissenschaft in so fern in weiterem Sinne, als er die Grundlagen

prüfte und in Vielem neu baute, die zur Erkenntniss der scheinbaren und wahren Bewegungen der Himmelskörper überhaupt führen. Zwar blieb auch er dem Gebiet nicht fremd, welches Gauss, vor allem in der *Theoria motus* schöpferisch umgestaltete; indessen beziehen sich doch seine grössten und erfolgreichsten Leistungen nicht hierauf; der mehr praktischen Natur Bessels war Bedürfniss und seine innere Entwickelung wie äusserer Lebensgang brachten es mit sich, dass er, von der Beobachtung und ihrer Kritik ausgehend, in stetiger Folge fest begründete Thatsachen an einander reihend, bemüht war die Fundamente zu legen wie die besonderen Normen aufzustellen, nach denen die cölestischen Erscheinungen im Einzelnen und bis ins Einzelne zu verfolgen und zu begreifen sind. So finden wir seine bedeutungsvollsten Thaten im Bereiche der Theorie der Instrumente, der sphärischen und Stellar-Astronomie. Auch in der reinen Mathematik, der ja manche Untersuchungen Bessel's angehören, lässt sich das Bestreben, welches die Anwendung auf eine besondere, rein astronomische Aufgabe im Sinne hat, meist nicht verkennen. Für beide Männer kehren sich gewissermassen Mathematik und Astronomie in ihrer Bedeutung und Verwerthung um: für den Einen ist häufig das Zweck, was für den Anderen Mittel; und ähnlich spricht sich die verschiedene Geistesrichtung auch in den von Beiden mit Vorliebe gepflegten nicht mathematisch-astronomischen Disciplinen aus; bei Gauss im Magnetismus, bei Bessel in der Geodäsie und Präcisions-Physik.

Das Studium der Originalarbeiten Bessel's war bisher, bei ihrer Zerstreuung in den verschiedenen zum Theil nicht leicht zugänglichen Zeitschriften und Werken, mehr erschwert, als es ihre Bedeutung und die Nöthigung des häufigen Gebrauchs wünschenswerth machte und eine ausgewählte, systematisch geordnete Sammlung erschien schon seit längerer Zeit fast als ein Desideratum der Astronomie. In der Ausgabe, deren erster Band jetzt vorliegt, hat sich der Herausgeber bemüht, den wesentlichsten Anforderungen, die an eine solche Sammlung zu stellen wären, zu genügen, und bei aller Rücksicht auf praktische Verwendbarkeit doch ein möglichst vollständiges Bild der Thätigkeit des grossen Königsberger Astronomen zu geben. Sämmtliche Werke, Abhandlungen, Beobachtungen, Bemerkungen etc. wieder abzudrucken, wie es mit der Ausgabe von Gauss' Werken die Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften gethan, konnte nicht die Absicht sein; sowohl der besondere praktische Zweck und die Natur der Bessel'schen Arbeiten,

wie die relativ beschränkten Mittel des Einzelnen verhinderten dies. Es sollte vielmehr nur das gebracht werden, was auch heute noch, 30 Jahre nach Bessel's Tode, unbestrittenen Werth besitzt; ausgeschlossen wurden sämmtliche populäre Schriften und Aufsätze, ferner alle die Resultate von Beobachtungen in der Form von Katalogen, Tafeln oder umfangreichen numerischen Rechnungen enthaltende Zahlensammlungen. Aus den selbständigen Werken wurden nur die allgemeiner gehaltenen Kapitel und theoretischen Untersuchungen genommen, das Detail der Beobachtungen, numerischen Rechnungen und Tafeln weggelassen oder thunlichst gekürzt; letzteres gilt auch von einzelnen Abhandlungen, welche auf Grund und im Anschluss an theoretische Betrachtungen einen speziellen Fall ausführlich behandeln. Der Wunsch auch die Recensionen und Anzeigen der Schriften Anderer zu bringen, konnte aus vorzugsweise räumlichen Gründen zunächst nicht zur Ausführung gelangen. Auf diese Weise wurde es möglich in 3 Quartbänden mässigen Umfanges von den nahezu 400 betragenden Drucksachen Bessel's etwa 170 Abhandlungen, Auszüge aus grösseren Werken, Briefe und kleinere Bemerkungen von Bedeutung aufzunehmen. Sie sind in die 8 Abtheilungen: I. Bewegung der Körper des Sonnensystems, II. Sphärische Astronomie (1.Band); III. Theorie der Instrumente, IV. Stellar-Astronomie, V. Mathematik (2. Band); VI. Geodäsie, VII. Physik, VIII. Verschiedenes (3. Band) vertheilt und in jeder Abtheilung die dem Gegenstande nach zusammengehörigen, in möglichst chronologischer Folge geordnet. Den einzelnen Stücken oder Gruppen sind Literaturnachweise, namentlich aus den astron. Nachr. Bd. 1—85 und dem Briefwechsel mit Olbers beigefügt.

Die grosse Zahl der verschiedenartigen und wichtigen Abhandlungen, welche der vorliegende erste Band enthält, verbietet genaueres Eingehen auf den Inhalt der einzelnen Stücke; es können im Folgenden wesentlich nur die Titel der umfangreicheren Abhandlungen angeführt werden. I. Bewegung der Körper im Sonnensystem. 1. Abh. „Berechnung der Harriot'schen und Torporley'schen Beobachtungen des Cometen von 1607; erste Arbeit Bessels vom Jahr 1804 (aus dem 10. Bd. der monatl. Corresp.) und aus diesem Grunde vollständig abgedruckt; spätere Bahnbestimmungen (z. B. der Cometen von 1769, 1807, des Olbers'schen) finden sich in vorliegender Sammlung nicht. Abhh. 2—8 enthalten Beiträge zur Berechnung parabolischer und elliptischer Cometenbahnen und die Auflösung der Kepler'schen Aufgabe. Abh. 9 „Entwickelung

einer allgemeinen Methode, die Störungen der Cometen zu berechnen" (Abschnitt 3 aus der bekannten Schrift über den grossen Cometen von 1807), nebst kurzen Nachträgen dazu (Abhh. 10 und 11); Abh. 12 „Beitrag zu den Methoden, die Störungen der Cometen zu berechnen" (Astr. Nachr. 14. Bd.). Abhh. 13 und 14 reproduciren die bekannten Abhandlungen aus dem 13. Bd. der Astr. Nachr.: „Beobachtungen über die physische Beschaffenheit des Halley'schen Cometen und dadurch veranlasste Bemerkungen" (mit 2 Tafeln), und: „Bemerkungen über mögliche Unzulänglichkeit der die Anziehungen allein berücksichtigenden Theorie der Cometen", Abh. 16 „Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht" (Abhandlungen der Berliner Academie 1824), nebst der Tafel der mit I_k^0 und I_k^1 bezeichneten Functionen. — Abhh. 17—22 behandeln den Saturn und seinen hellsten (6.) Trabanten. Die erste Abh. (17) „Untersuchungen über den Planeten Saturn, seinen Ring und seinen (vierten) älteren Trabanten" findet sich im Königsberger Archiv f. Math. und Naturwiss.; die drei folgenden: „Bestimmung der Bahn des Hugeni'schen Saturnsatelliten" nebst 2 Fortsetzungen (Astr. Nachr. Bde. 9 und 11) leiten in fortschreitender Näherung die Bahnelemente des hellsten Trabanten und die Saturn-Masse ab; welchen Abh. 21 „Bestimmung der Lage und Grösse des Saturnsringes und der Figur und Grösse des Saturn" (Astr. Nachr. Bd. 12) die Constanten der Lage und Dimensionen von Ring und Hauptkörper (wie die drei vorangehenden aus Beobachtungen am Königsberger Heliometer) hinzufügt. Abh. 22 endlich, die umfangreichste des Bandes, entwickelt die vollständige Theorie der Bewegungen des Saturnsystems (Astr. Nachr. Bd. 28). — Die Abh. (23) „Ueber den gegenwärtigen Zustand unserer Kenntniss der Sonnenbewegung und die Mittel zu ihrer Verbesserung" (Astr. Nachr. Bd. 6) beschliesst die I. Abtheilung. — Die Sphärische Astronomie (Abth. II) behandelt nach einigen kürzeren auf die Mondbewegung bezüglichen Aufsätzen, von denen Abh. 26 „Vorausberechnung der Sternbedeckungen" (Astr. Nachr. Bd. 7) hervorgehoben sei, zunächst in 8 Stücken die astronomische Refraction. „In Abh. 28 „Einige Resultate aus Bradley's Beobachtungen" (Königsberger Archiv) wird, neben andern Constanten, auf Grund der Laplace'schen Theorie die Refractionsconstante abgeleitet, während in Abh. 32, Disquisitiones de refractione institutae (Fundam. astr. Sect. IV) Bessel seine eigene Theorie entwickelt und die Constanten bestimmt, welche in

Abh. 33. Refractio astronomica (Tabb. Regiom.) durch geringe Aenderungen noch vollständiger mit den (Königsberger) Beobachtungen in Uebereinstimmung gebracht werden, die dann zur Construction der (hier weggelassenen) noch heute fast allgemein angewandten Refractionstafeln führen. Als besondere Aufgabe ist in den Abhh. 27 und 31 der Einfluss der Strahlenbrechung auf Micrometer-Beobachtungen (Mon. Corresp. XVII. und Astr. Nachr. 3. Bd.) dargestellt. — Es folgen dann (Abhh. 35—46) die Arbeiten, welche sich auf die Constanten der Aberration, Nutation und Praecession, deren theoretische Ableitung, numerische Bestimmung und Einfluss auf die Oerter der Himmelskörper beziehen und die sich hauptsächlich in den Fundamentis astr. und den Tabb. Regiomont. finden. Als wichtigste Arbeit auf diesem Gebiet mag hier nur die bekannte Preisschrift (Abh. 37): „Untersuchung der Grösse und des Einflusses des Vorrückens der Nachtgleichen" erwähnt werden. — Die letzten Stücke (47—51) der II. Abtheilung handeln über verschiedene besondre Aufgaben der sphärischen Astronomie, so Abh. 48 „Ueber die Bestimmung der Polhöhe durch das Passageninstrument" (Astr. Nachr. Bd. 3), Abh. 51 „über die scheinbare Figur einer unvollständig erleuchteten Planetenscheibe" (Astr. Untersuchungen).

Den Abhandlungen selbst geht die unvollendete Autobiographie Bessels „kurze Erinnerungen an Momente meines Lebens (Jugendzeit — erste 25 Jahre)", der sich ergänzende Worte des Herausgebers anschliessen, voran. Als mehr künstlerische Beigabe hat dieser 1. Band das Portrait Bessels in Lichtdruck, nach dem bekannten Wolf-Maudel'schen Bild, erhalten.

Leipzig. Rud. Engelmann.

H. Schröter: Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie. (II. Theil: Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projectivische Eigenschaften. Auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte Jacob Steiner's bearbeitet. Zweite Auflage. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1876.)

Während noch vor wenigen Jahrzehnten die Studirenden der Mathematik an den deutschen Universitäten und polytechnischen Hochschulen zumeist auf ausländische, insbesondere französische Lehrbücher angewiesen waren, um das in den Vorlesungen Vorgetragene zu vervollständigen oder durch Selbststudium grössere wissenschaftliche Gebiete sich zu erschliessen, besitzt gegenwärtig die deutsche mathematische Literatur eine Reihe von ausgezeichneten Werken, welche die bisherige Lücke ausfüllen und wesentlich zur Anregung und Verbreitung mathematischer Studien beitragen. Wir brauchen unter den zahlreichen und täglich sich vermehrenden literarischen Erscheinungen dieser Art nur zu erinnern an Hesse's analytische Geometrie des Raumes, Baltzer's Determinanten, Dirichlet's Zahlentheorie (hrgg. v. Dedekind) und partielle Differenzialgleichungen (hrgg. v. Hattendorff), an Durège's elementare und Königsberger's auf die neueren Principien der Integralrechnung gestützte Theorie der elliptischen Functionen, an Kirchhoff's Mechanik, Clebsch's Theorie der algebraischen Formen und analytische Geometrie (hrgg. v. Lindemann), Clebsch's und Gordan's Theorie der Abel'schen Funktionen, die inhaltreichen Lehrbücher von Salmon-Fiedler und viele andere, um die reichen Hülfsquellen anzudeuten, welche gegenwärtig den Studirenden für ihre mathematische Ausbildung zu Gebote stehen.

Verhältnissmässig am spärlichsten ist die synthetische Geometrie in dieser Hinsicht bedacht worden, wie sie auch als selbstständiger Vorlesungsgegenstand erst in jüngster Zeit auf den deutschen Hochschulen sich eingebürgert hat; und doch übt die neuere synthetische Geometrie auf die Jünger der Wissenschaft eine ganz besondere Anziehungskraft aus, indem sie fast voraussetzungslos, wie die Zahlentheorie und an die ersten Elemente anknüpfend nicht als ein fertig abgeschlossenes aber todtes Kunstwerk ihnen entgegen tritt, wie das alte Euclidische System der Geometrie, sondern als ein reiches und fruchtbares Feld lebendiger Forschung, welches lohnen-

den Gewinn verspricht von einer die Phantasie und den Verstand in gleicher Weise anregenden Arbeit.

Das oben angezeigte in zweiter Auflage erscheinende Werk ist bestimmt, einer der fruchtbarsten und wichtigsten Quellen für die synthetische Forschung einen leichteren Zugang und weitere Verbreitung zu verschaffen und aus derselben die zunächst sich darbietende Theorie der Kegelschnitte in unabhängiger und vollständiger Weise abzuleiten. Es erfüllt damit ein Versprechen, welches Steiner selbst in seiner „systematischen Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“ zwar gegeben, aber in früheren Jahren unter dem Drange neuer Entdeckungen verschoben, in späterer Zeit wohl öfters auszuführen gewünscht, aber schliesslich nicht mehr vermocht hat. Das der ersten Auflage des Buches vorausgeschickte Vorwort gibt über die Entstehung desselben und den Inhalt so ausführlichen Aufschluss, dass wir auf dasselbe verweisen können und an dieser Stelle nur die Hauptabschnitte kurz charakterisiren wollen. Entsprechend dem Sinne Steiner's und abweichend von seiner früheren Darstellung wird das Operationsfeld auf die Ebene allein beschränkt; die beiden einfachsten Grundgebilde — die gerade Punktreihe und das ebene Strahlbüschel, projectivisch auf einander bezogen — bilden das einzige Handwerkszeug, mit welchem der umfangreiche und vielgestaltige Bau einer Theorie der Kegelschnitte ausgeführt wird. Der erste Abschnitt ist daher der Betrachtung dieser beiden Grundgebilde gewidmet, denen sich die Doppelgebilde des Punkt- und Strahlsystems (der Involution) anschliessen. Die neuerdings veröffentlichten Versuche die projectivische Geometrie ohne jede Benutzung von metrischen Begriffen aufzubauen schienen dem Herausgeber weder so gelungen, noch in pädagogischer Hinsicht so empfehlenswerth, dass er ihnen vor der älteren Steiner'schen Darstellung den Vorzug zu geben geneigt gewesen wäre. In dem zweiten Abschnitt werden die Kegelschnitte selbst gewissermassen organisch erzeugt und ihre zahllosen Eigenschaften sowohl descriptiver als metrischer Art, welche früher zerstreut und isolirt dastanden, treten jetzt in einen naturgemässen und nothwendigen Zusammenhang und erscheinen oft als besondere Fälle allgemeinerer Beziehungen, welche ihr wahres Wesen aufschliessen. Die Polaritätsbeziehungen bilden den eigentlichen Kern, um welchen sich die meisten jener Eigenschaften gruppiren. Sie erklären auch die Identität der beiden Erzeugnisse, welche aus den ursprünglichen Elementen einander gegenüberstehend hervorgehen.

Der dritte Abschnitt untersucht die zu Gruppen zusammentretenden Kegelschnitte (Büschel und Schaaren), ein reiches Feld der Untersuchung, auf welchem eine geschickte Handhabung der synthetischen Methode sich als besonders erspriesslich erweist. Wiederholt bietet sich hier eine besondere gegenseitig eindeutige Abhängigkeit von Punkten der Ebene dar, welche unter dem Namen der „Steiner'schen Verwandtschaft" bei geometrischen Untersuchungen in neuerer Zeit mit Erfolg angewendet ist.

Von den Gebilden einfacher Mannigfaltigkeit wendet sich nun die Betrachtung im vierten und letzten Abschnitte zu den Gebilden doppelter Mannigfaltigkeit (Netzen) und zwar zuerst zu dem einfachsten Gebilde dieser Art, dem Polarsystem oder Involutionsnetz. Die aus den Eigenschaften von Pol und Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt sich ergebende Abhängigkeit der Punkte und Strahlen in der Ebene von einander lässt sich unabhängig vom Kegelschnitt auffassen und definirt das Polarsystem, dessen Kern auch ein imaginärer Kegelschnitt sein kann. Die wesentlichsten Eigenschaften des reellen Kegelschnitts bleiben im Polarsystem erhalten. Den Schluss bildet die Untersuchung eines Kegelschnittnetzes, welches von drei beliebig gegebenen Kegelschnitten ausgehend eine doppelt-unendliche Mannigfaltigkeit derselben hervorruft. Den Kern des Netzes bildet die Tripelcurve, eine allgemeine Curve dritten Grades, deren wesentlichste Eigenschaften aus dieser Quelle fliessen.

Die zweite Auflage des Buches unterscheidet sich von der ersten nicht hinsichtlich der Anordnung und Behandlung des Stoffes, sondern nur durch Vermehrung desselben an einzelnen Stellen und eine sorgfältige Durcharbeitung. Als nützliche Zugabe erscheinen die „Aufgaben und Sätze", welche den drei ersten Abschnitten zur Uebung und Anwendung der dargelegten Methoden und Betrachtungen hinzugefügt sind und hoffentlich manche neue Anregung zu synthetischen Untersuchungen bieten werden.

Druck und Ausstattung des Buches entsprechen den anerkannten Leistungen der berühmten Verlagshandlung.

Breslau. H. Schröter.

Ax. Harnack: Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades.

(Math. Annal. Bd. IX. S. 1—54.)

Zur Theorie der ternären cubischen Formen.

(Math. Annal. Bd. IX. S. 218—240.)

In diesen Aufsätzen behandelt der Verfasser die Geometrie der Curven dritten Grades auf Grund ihrer Darstellbarkeit durch elliptische Functionen. Die imaginären Elemente einer Klassencurve werden, wie das zuerst von Hrn. Klein (Math. Annal. Bd. VII) angegeben worden ist, durch ihre reellen Träger repräsentirt, so dass das binäre Gebiet der Curve durch ein reelles ternäres Gebiet ersetzt ist. Dem zufolge erhalten auch die complexen Werthe des Integrales ihr anschauliches Bild in einem reellen Punkte der Ebene. *Die geometrische Interpretation der allgemeinen linearen Beziehung zwischen diesen Parameterwerthen bildet den Gegenstand der Untersuchung.* Dieselbe umfasst die Theorie der ein- und mehrdeutigen algebraischen Transformationen der Curve in sich selbst und löst ein Integrationsproblem, welches mit der Theorie der ternären cubischen Form aufs engste verbunden ist. Die allgemeine algebraische Behandlung dieses letzteren Problemes ist in der zweiten Abhandlung gegeben; sie führt zugleich auf neue Relationen zwischen den Formen des cubischen Systemes.

Die einfachste Beziehung zwischen den Parametern zweier Curvenpunkte, wobei zwei einander zugeordnete Werthe um die Grösse der halben Perioden des Integrales differiren, deckt sich mit der geometrischen Eigenschaft *„correspondirender Punkte"*. Sie führt zu einer Unterscheidung der verschiedenen Gattungen involutorischer Strahlsysteme, aus denen die Curve dritter Ordnung erzeugt werden kann, und identificirt die drei Arten der quadratischen Transformation eines elliptischen Integrales mit dem Uebergange zu den drei Klassencurven (Cayley'schen Curven), welche mit einer gegebenen Ordnungscurve (Hesse'schen Curve) *„conjugirt"* sind.

Die Zuordnung zweier Curvenelemente nach dem Gesetze, dass das Element mit dem Argument u in das Element $\pm u + C$ übergeführt wird (wobei C eine beliebige Grösse innerhalb des Periodenparallelogrammes bedeutet) erschöpft die Gruppen der *eindeutigen* algebraischen Transformation der Curve in sich selbst, welche entsprechend dem positiven oder negativen Vorzeichen des Ausdruckes

$\pm u + C$ in zwei verschiedene Reihen zerfallen. Durch diese eindeutigen Transformationen können im allgemeinen die reellen Elemente in imaginäre transformirt werden, deren reelle Träger dann jedesmal auf einer algebraischen Curve *sechster Klasse* (12. Ordnung) gelegen sind, während umgekehrt die eine Gruppe derjenigen imaginären Elemente, deren Träger die Tangenten dieser Curve bilden, in das reelle Elementensystem übergeführt wird.

Die covarianten Beziehungen dieses Büschels von Curven sechster Classe zur Fundamentalcurve sind in den beiden Sätzen enthalten: 1) Unter den sechs Tangenten, welche sich von einem beliebigen Punkte der Curve dritter Ordnung an irgend eine Curve ziehen lassen, kann immer ein Quadrupel von Linien gebildet werden, für welches in allen Punkten der C_3 ein gleiches Doppelverhältniss besteht. 2) Auf jeder Geraden in der Ebene bestimmen drei tangirende Curven des Büschels drei Punkte, von denen jeder harmonisch gelegen ist zu je einem der drei auf dieser Geraden befindlichen Punkte der Fundamentalcurve in Bezug auf die beiden anderen. Zufolge der ersten Eigenschaft wird auch die algebraische Gleichung des Curvenbüschels durch ein Eliminationsverfahren gewonnen, während die zweite seine Differenzialgleichung in der Form eines zur Fundamentalcurve covarianten Connexes liefert, dessen Hauptcoincidenz demnach mit Hülfe des algebraischen Eliminationsverfahrens integrirt ist.

Die Verbindung zweier Curvenpunkte, deren Parameter u und v in der Beziehung zu einander stehen, dass $v = \varrho u + C$, führt nur in dem Falle, dass ϱ eine rationale Zahl bedeutet, zu algebraischen Curven; in allen übrigen Fällen werden die Curven *transscendent.* Für jeden Werth von ϱ ergibt sich aber eine Schaar von Curven, von denen immer je sechs eine beliebige Gerade der Ebene tangiren. Diese Gruppen von je sechs Punkten auf einer Geraden sind covariante Formen zu den drei Fundamentalpunkten. Die Differenzialgleichungen aller dieser Curvenschaaren sind folglich als Connexe im ternären cubischen Formensysteme enthalten. Man gewinnt die Gleichung dieser Connexe, deren Hauptcoincidenzen durch diese Betrachtungen integrirt sind, indem man die *cubische Gleichung* bildet, durch welche die Werthe des überall endlichen elliptischen Differenziales in den Schnittpunkten einer Geraden mit der Fundamentalcurve dargestellt werden; dabei wird die schneidende Gerade in einem beliebigen ihrer Punkte unendlich wenig gedreht. Diese Gleichung schliesst alle im Vorstehen-

den angeführten Sätze in sich und darf somit als die Grundlage der Parameterdarstellung der Curven dritten Grades betrachtet werden.

Leipzig. Ax. Harnack.

Ax. Harnack: Ueber eine Behandlungsweise der algebraischen Differenziale in homogenen Coordinaten. (Math. Annalen. Bd. IX. S. 371–424.)

Die Darstellung der zu einer Curve $n$ter Ordnung gehörigen Integrale vermittelst homogener Coordinaten ist zuerst von Aronhold (Crelle's Journal f. M. B. 61) gegeben worden. Die Methoden, welche in diesem Aufsatze zur Auswerthung der Integrale vom Geschlecht $p=0$ verwandt worden sind, habe ich in erweiterter Fassung auch der Behandlung irrationaler Integrale von beliebigem Geschlechte zu Grunde zu legen versucht. *Dieselben liefern bei der Untersuchung des Additionstheoremes einen neuen Beweis des Abel'schen Satzes.*

Die Zurückführung einer Summe von irrationalen Integralen auf eine Summe von rationalen lässt sich nämlich vermöge der homogenen Darstellung mit einer Eigenschaft algebraischer Functionen allgemeinerer Art identificiren, welche für einen speciellen Fall bereits von Jacobi (Crelle's Journ. Bd. 13 und 14) erkannt worden ist. Indem dieser Jacobi'sche Satz auf eine *reducible* algebraische Curve angewandt wird, d. h. auf eine solche, welche in das Product zweier zerfällt, gewinnt derselbe eine neue Gestalt, die sich in Bezug auf die algebraischen Differenziale in der Form aussprechen lässt:

„Jede auf die Schnittpunktsysteme der Fundamentalcurve mit „einem beliebigen Curvenpaare bezügliche Integralsumme kann direct „durch die Summe neuer Integrale dargestellt werden, welche längs „derjenigen Curve, die auf der ersten die Unendlichkeitspunkte des In„tegrales bestimmt, innerhalb der nämlichen Grenzen und auf den ent„sprechenden Integrationswegen hinerstreckt sind.“

Dieser Satz umfasst das Abel'sche Theorem, da man die Unendlichkeitspunkte eines Integrales stets durch *rationale* Curven ausschneiden kann. Die Erweiterung des Jacobi'schen Satzes gewährt ferner ein Mittel, um diese Summe von rationalen Integralen

nach logarithmischen und algebraischen Functionen zu entwickeln, wofür in der vorliegenden Arbeit die allgemeinen Formeln aufgestellt werden.

Ausser der Summe der Differenzialwerthe für ein gegebenes Schnittpunktsystem werden sodann die *symmetrischen Functionen* überhaupt gebildet, die sich aus den Differenzialwerthen zusammensetzen lassen, welche durch eine beliebige Gerade und eine zu dieser benachbarte auf der Fundamentalcurve bestimmt sind. Diese symmetrischen Functionen, enthalten in den Coefficienten der Gleichung $n$ten Grades, deren Wurzeln die n Differenzialwerthe darstellen, führen zur Integration von Differenzialgleichungen, welche als Hauptcoincidenzen von Connexen auftreten. Zur Bildung dieser Gleichung dient die für alle Resultantenbildungen sehr zweckmässige, zuerst von Battaglini (Giornale di matematiche Vol. IX) benutzte Symbolik, vermöge deren die allgemeine Curve $n$ten Grades symbolisch wie ein Product von n verschiedenen geraden Linien behandelt wird. Es folgt aus dieser Betrachtungsweise der Satz, dass die n Werthe des Differenziales, welche dadurch entstehen, dass man die Curve durch eine gerade Linie schneidet und diese Linie um einen ihrer Punkte unendlich wenig dreht, durch n Differenziale ausgedrückt werden können, welche längs geraden Linien erstreckt sind, von denen jede bezüglich durch einen der n Schnittpunkte hindurchgeht. Der Zuwachs jedes algebraischen Differenziales bei der Bewegung einer schneidenden Geraden ist also durch den Zuwachs eines rationalen Differenziales darstellbar.

Das gestellte Problem, die symmetrischen Functionen zu entwickeln, ist für den Kegelschnitt, und für die allgemeinen Curven dritter und vierter Ordnung durchgeführt. Insbesondere wird bei diesen Untersuchungen das überall endliche elliptische Integral in nahe Beziehung zu dem einfachen Integrale vom Geschlecht $p = 0$ gesetzt, wodurch auch für die algebraischen Rechnungen ein Zusammenhang zwischen den Differenzialen von verschiedenem Geschlechte hergestellt wird. Dieser Zusammenhang, welcher auch bei der Battaglini'schen Symbolik hervortritt, gründet sich, entsprechend dem Gedanken, welcher dem Beweise des Abel'schen Theorems zu Grunde gelegt wurde, auf die Ableitung von Curven höheren Grades aus dem Producte von Curven niederer Ordnung.

Leipzig. Ax. Harnack.

Jakob J. Weyrauch: Neue Theorie der überhitzten Dämpfe, nebst weiteren Beiträgen zur Theorie der Dämpfe. (Separatabdr. a. d. Ztschr. d. Vereins deutscher Ingenieure. Berlin, Commissionsverlag von Gaertner, 1876.)

In dieser Brochüre wird zunächst bewiesen, dass das Hirn'sche Gesetz, wonach die isodynamische Curve wie bei permanenten auch bei überhitzten Dämpfen eine gleichseitige Hyperbel sein soll, theoretisch unhaltbar ist. Der Beweis stützt sich darauf, 1) dass bei Annahme des Hirn'schen Gesetzes eine gewisse Grösse constant sein müsste, welche bei Pressungen zwischen 0,1 und 14 Atmosphären von 217 bis 103 variirt, 2) dass im gleichen Falle die Clausius'sche Temperaturfunction h mit der Pressung p wachsen müsste, während bekanntlich das Gegentheil richtig ist. — Beim Beweise werden auch die in der Theorie der gesättigten Dämpfe gebräuchlichen empirischen Formeln verwendet, die letzteren sind aber genau genug, und der Einfluss etwaiger Abweichungen lässt sich genügend controliren, um den Schluss unbeeinträchtigt zu lassen, dass das Hirn'sche Gesetz in der theoretischen Wärmelehre aufzugeben ist.

Die ersten Untersuchungen, überhitzte Dämpfe betreffend, nahmen das Hirn'sche Gesetz zum Ausgangspunkt, und die von Zeuner, Hirn und Schmidt entwickelten Zustandsgleichungen erkannten es an. Aus diesen und andern Gründen, welche in der Brochüre ersichtlich sind, wird es wünschenswerth, die bisherigen Ausgangspunkte für die theoretische Untersuchung der überhitzten Dämpfe durch neue zu ersetzen, umsomehr als mittelst jener die Zustandsgleichung auf ziemlich complicirte Weise erlangt werden muss, auch schliesslich gewisse Widersprüche entstehen und interessante Eigenschaften im Dunkel bleiben. Dagegen bestätigen die von mir angestellten Rechnungen, dass die Zeuner'schen Formeln für alle praktischen Zwecke unbedingt zuverlässig und empfehlenswerth sind.

Eine neue Zustandsgleichung lässt sich auf Grund folgender Erwägung einführen. Ist eine Flüssigkeit im Verdampfen begriffen, so besteht eine Zeit lang überhaupt keine Beziehung zwischen specifischem Volumen v und Temperatur T (oder zwischen v und p), es kann also solange auch kein Gesetz von der Art des Mariotte-Gay-Lussac'schen bestehen. Erst im Augenblicke, wo nur noch

reiner gesättigter Dampf vorhanden ist, beginnt eine Beziehung zwischen p, v, T. In diesem Augenblicke ist aber keineswegs $pv = RT$. Wenn nun gleich zu Anfang, in dem Punkte, von welchem an das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz denkbar wäre, dasselbe nicht zutrifft, so kann natürlich, selbst wenn die Aenderungen von nun ab in analoger Weise wie nach diesem Gesetze vor sich gehen, der Ausdruck des Letzteren nicht mehr gültig sein, und es müssen, wenn diese Ursache allein entgegen wirkt, die Abweichungen in der Nähe des Sättigungspunktes am grössten sein, was sich auch bei allen gasförmigen Körpern bestätigt hat. Nehmen wir nun an, es wirke wirklich die genannte Ursache allein entgegen, so folgt:

Das Product aus Pressung und Volumendifferenz des überhitzten und gesättigten Dampfes ist direct proportional der Ueberhitzung

$$p(v - s) = R\tau; \tag{1}$$

hierin ist R eine Constante, s das dem Drucke p entsprechende Sättigungsvolumen, τ die Ueberhitzung, das heisst die Erhebung der augenblicklichen Temperatur T über die zu p gehörige Sättigungstemperatur T'.

Wird in (1) gesetzt $\tau = T - T'$ so folgt

$$pv = R(T - T' + \frac{ps}{R}).$$

Setzt man ferner die nur von p abhängige für Wasserdampf jederzeit leicht berechenbare Abweichung gegen das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz im Sättigungspunkt

$$T' - \frac{ps}{R} = P,$$

so folgt als zweite Form der Zustandsgleichung

$$pv = R(T - P). \tag{2}$$

Die Zeuner'sche Zustandsgleichung ist ebenfalls von dieser Form, sie ergibt sich als specieller Fall von (1) und (2), wenn die Bedingung „c_p constant für alle Pressungen und Temperaturen" eingeführt wird, was Zeuner mit Recht als praktisch zulässig annimmt.

Setzt man in (1) $\frac{R}{p} = z$, so folgt als dritte Form der Zustandsgleichung

$$v = \tau z + s \tag{3}$$

ganz entsprechend der für nasse Dämpfe geltenden Formel

$$v = xu + \sigma$$

indem sowohl z, s als n, σ Functionen von p allein sind (σ constant). Auf diese Aehnlichkeit der Formeln überhitzter und nasser Dämpfe, welche fortwährend zu Tage tritt, soll unten noch kurz zurückgekommen werden.

Mittelst Formel (3) und nach den Zeuner'schen Tabellen für gesättigte Dämpfe sind die Volumina des überhitzten Wasserdampfes für solche Werthe von τ bestimmt worden, für welche Hirn v durch directe Wägungsversuche ermittelt hat. Leider sind diese Versuche nicht genügend, um aus der *sehr* befriedigenden Uebereinstimmung mit der Rechnung einen weitgehenden Schluss zu empfehlen. Ich bin der Ansicht, dass der oben ausgesprochene Satz und die darauf basirten Formeln für die überhitzten Dämpfe mit ähnlicher Annäherung gelten wie das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz für die sogenannten permanenten Gase. — Die Zusammenstellung zeigt, wie vorzüglich auch die Zeuner'sche Gleichung mit den Versuchen stimmt, in theoretischer Beziehung bleibt aber doch vorzuziehen, dass dieser Anschluss mit *einer* (R) anstatt mit *drei* verfügbaren Constanten erzielt wird.

Von der aufgestellten Zustandsgleichung wird u. A. Gebrauch gemacht, um aus den Hirn'schen Wägungsversuchen die specifischen Wärmen bei constantem Druck und bei constantem Volumen für reinen gesättigten Wasserdampf abzuleiten. Sind letztere zur Unterscheidung von den allgemeineren Grössen c_p, c_v durch c'_p, c'_v bezeichnet, so lassen sich die Resultate von 0,1 bis 14 Atmosphären auf drei bis vier Dezimalen genau durch folgende Gleichungen wiedergeben

$$c'_p = 0{,}4304 + 0{,}0003779\, t'$$
$$c'_v = 0{,}3045 + 0{,}0003308\, t'.$$

Speciell beim Druck einer Atmosphäre findet sich mit $t' = 100$ $c'_p = 0{,}4682$, während Regnault bei gleichem Druck für *überhitzten* Wasserdampf (t von 122 bis 232) in vier Versuchsreihen 0,4688, 0,4811, 0,4808, 0,4796 fand. Der früher von Kirchhoff angenommene Werth für niedrige Temperaturen $c_p = 0{,}305$ dürfte wohl zu klein sein. Da Regnault die erste der angeführten Zahlen für weniger zuverlässig hält als die übrigen, so kann man schliessen, dass auch für Wasserdampf ähnlich wie bei der Kohlensäure c_p mit der Ueberhitzung zunächst wächst. — Es zeigt sich dann, dass der Quotient $\frac{c_p}{c_v}$ von $\tau = 0$ an, wo sein Werth für p zwischen

0,1 und 14 Atmosphären von 1,3995 bis 1,3659 variirt, mit der Ueberhitzung abnimmt, was ganz gut mit der Naumann'schen Formel stimmt, nach welcher $\frac{c_p}{c_v}$ für alle dreiatomigen Dämpfe mit unendlicher Ueberhitzung den Werth $K = 1,3333..$ erreichen soll.

Im Weiteren folgt die Ableitung der Hauptgleichungen für den Wärmeverbrauch und die Energie oder innere Arbeit. Es ergeben sich hierfür mehrere Formen und werden alle Gleichungen für beide Grenzzustände (permanente Gase und gesättigte Dämpfe), in welchen sie auf die bekannten Formeln führen müssen, geprüft. Wie zu erwarten, zeigt sich, dass die isodynamische Curve nur für unendliche Ueberhitzung das Gesetz der gleichseitigen Hyperbel befolgt, während das Hirn'sche Gesetz dies allgemein verlangt. Am Schlusse des ersten Theils werden noch einige Formeln für die Gesammtwärme, Dampfwärme (Mehrbetrag an Energie in 1 Kil. Dampf vom Zustand p, v, t gegenüber 1 Kil. Wasser von $p = 1$ Atm., $t = 0^0$) sowie ein praktisches Beispiel gegeben, und das Verhältniss der aufgestellten Gleichungen zu den im Jahre 1866 von Hirn und Cuzin veröffentlichten Versuchsresultaten dargelegt.

Im zweiten Theil erweisen sich die Gleichungen für überhitzte Dämpfe als ein Bindeglied zwischen den sonst so sehr abweichenden Formen der Gleichungen für permanente Gase und nasse Dämpfe. Sie nehmen je nach der Umformung bald den einen bald den andern analoge Formen an. Die Aehnlichkeit der ganzen Verhältnisse mit denjenigen nasser Dämpfe scheint für den ersten Augenblick besonders überraschend; aber auch die Vorbedingungen sind in beiden Fällen durchaus nicht so verschieden als man gewöhnlich annimmt. Wird einer Flüssigkeit bei bestimmtem Drucke p genügend Wärme zugeführt, so tritt zuerst Verdampfung ein, es ist $\frac{T}{T'}$ (Verhältniss der augenblicklichen Temperatur T zur Temperatur in rein gesättigtem Zustand T') constant gleich 1, und das Mischungsverhältniss $\frac{x}{1}$ (Verhältniss des augenblicklichen Dampfgewichts x zum Dampfgewicht im rein gesättigten Zustand 1) variabel. Wenn alle Flüssigkeit verdampft ist, dann tritt Ueberhitzung ein, man hat $\frac{x}{1}$ constant gleich 1 und $\frac{T}{T'}$ variabel. Für reinen gesättigten Dampf ist $\frac{x}{1} = \frac{T}{T'} = 1$. Das Temperaturverhältniss $\frac{T}{T'}$ spielt bei überhitzten

Dämpfen eine ganz ähnliche Rolle wie das Mischungsverhältniss $\frac{x}{1}$ bei nassen Dämpfen.

Es werden nun die gegenseitige Lage der verschiedenen Druckcurven, sowie die Verhältnisse der Wärmeökonomie, der Verdampfung und Condensation oder Ueberhitzung, der Aenderung der innern Arbeit und Temperatur für die besonders interessirenden umkehrbaren Zustandsänderungen untersucht. Ueberall zeigt sich, dass die Ableitungen für überhitzte Dämpfe fast mit denselben Worten geführt werden können wie diejenigen für nasse Dämpfe. Von besonderem Interesse ist das Verhalten beider Dampfarten der sogenannten „Nullcurve" gegenüber. Letztere hat die Eigenschaft, dass bei ihrem Durchschreiten

auf jeder adiabatischen Curve nasser Dämpfe . . $dx = 0$
„ „ Curve constanter specifischer Dampfmenge $dQ = 0$
„ „ adiabatischen Curve überhitzter Dämpfe . $d\tau = 0$
„ „ Curve constanter Ueberhitzung . . . . $dQ = 0$
und für das p des Durchschnitts von Nullcurve und
Grenzcurve . . . . $h = 0$.

Alle diese Differenziale, sowie h, wechseln auf der Nullcurve ihr Vorzeichen.

Clausius hat bekanntlich zuerst nachgewiesen, dass bei gegebenem p das Vorzeichen von h dahin massgebend ist, ob reinem gesättigtem Dampf bei der Expansion Wärme zuzuführen oder zu entziehen ist, damit er in rein gesättigtem Zustand bleibe, und dafür, ob solcher Dampf bei der Expansion ohne Wärme-Zu- oder Abfuhr sich condensirt oder überhitzt. Man erhält nun u. A. folgenden allgemeinen Satz: Expandirt nasser oder überhitzter Dampf, so findet Verdampfung bezw. Zunahme der Ueberhitzung statt, solange der Zustandspunkt p, v den Raum links der Nullcurve durchläuft, es findet Condensation bezw. Abnahme der Ueberhitzung statt, wenn sich der Zustandspunkt rechts der Nullcurve bewegt. — Soll während der Expansion eines beliebigen Dampfes die specifische Dampfmenge bezw. die Ueberhitzung constant bleiben, so muss Wärme entzogen werden, so lange der Zustandspunkt p, v in den Raum links der Nullcurve fällt, es muss Wärme zugeführt werden, wenn der Zustandspunkt rechts der Nullcurve liegt.

Viele der im zweiten Theil abgeleiteten Sätze finden sich ohne Rücksicht auf die gegebene Theorie der überhitzten Dämpfe; so auch der folgende: Jeder überhitzte Dampf, d. h. jeder bestehende gas-

förmige Körper, kann, wenn von aussen Wärme weder zugeführt noch entzogen wird, sowohl durch genügende Compression als durch genügende Expansion in den gesättigten Zustand und zur Condensation gebracht werden.

Stuttgart. J. Weyrauch.

H. Weber: Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. (Herausgegeben unter Mitwirkung von R. Dedekind von H. Weber. Leipzig 1876, Teubner.)

Die jetzt zum ersten Mal erscheinende Gesammtausgabe von Riemann's Werken enthält in drei Abtheilungen zunächst die von Riemann selbst publicirten Abhandlungen, ferner die nach seinem Tode in verschiedenen Zeitschriften bereits abgedruckten nachgelassenen Arbeiten und endlich in der dritten Abtheilung alles was aus dem handschriftlichen Nachlass irgend zur Veröffentlichung geeignet schien.

Ueber den Inhalt der beiden ersten Abtheilungen, der seit längerer oder kürzerer Zeit Gemeingut der Mathematiker ist, ausführlicher zu reden ist wohl hier nicht erforderlich. Diese Abhandlungen sind in unveränderter Form zum Abdruck gekommen; nur einzelne kleine Ungenauigkeiten sind, sofern dieselben zur Kenntniss der Herausgeber kamen und für unzweifelhaft gehalten werden konnten, verbessert worden. Einzelne Zusätze, die sich auf handschriftliche Bemerkungen Riemann's gründen, und nothwendige Erläuterungen sind in Schlussnoten beigefügt. Von diesen Zusätzen und Erläuterungen hebe ich die zu der Dissertation (Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse) und zu der Abhandlung „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe“ hervor. Die einzige Abhandlung, welche etwas umfassendere Aenderungen erfahren hat, ist die „Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung“, für welche ein ausgeführtes Manuscript von Riemann nicht vorliegt, und welche der Herausgeber K. Hattendorff einer neuen Bearbeitung unterworfen hat.

Von erheblicherem Interesse für die Leser dieses Blattes dürfte ein kurzer Bericht über den Inhalt der hier zum ersten Male ver-

öffentlichten Abhandlungen aus dem Nachlass sein, welche die dritte Abtheilung des Werkes bilden. Es ist bekannt, dass die zusammenhängende schriftliche Darstellung seiner Untersuchungen Riemann stets grosse Mühe machte, und dass seine Forschungen der Darstellung immer weit voraus waren; ferner dass er in den letzten Jahren seines Lebens durch seinen Gesundheitszustand sehr häufig an zusammenhängendem Arbeiten gehindert war. Hieraus erklärt sich die Beschaffenheit des grössten Theils des Nachlasses, der ausser den Formeln für die Herstellung des Zusammenhangs ausserordentlich wenige Anhaltspunkte bietet. So musste Vieles, was in sehr fragmentarischer Gestalt vorlag, in die Sammlung mit aufgenommen und der Gedankengang so gut als möglich hergestellt werden, und Manches mag in den Papieren noch verborgen sein, dessen Entzifferung noch nicht gelungen ist.

Hiernach gehen wir zur Besprechung der einzelnen Abhandlungen der dritten Abtheilung über.

Die erste derselben „Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation“ ist eine Erstlingsarbeit aus Riemann's Studienzeit und geht von Anschauungen aus, die schwerlich auf Zustimmung rechnen dürfen, die auch der Verfasser selbst ohne Zweifel sehr bald fallen gelassen hat. Es schien daher anfangs zweifelhaft, ob es billig sei, diese Arbeit, die zu einer Veröffentlichung jedenfalls nicht bestimmt war, mit zum Abdruck zu bringen. Beim genaueren Studium derselben überzeugte ich mich aber doch, dass sowohl die Methoden als die Resultate ein hinlängliches Interesse bieten, um einen Abdruck mit einem Vorbehalt zu rechtfertigen, und dass die Untersuchung jedenfalls für Riemann's Entwicklungsgang charakteristisch ist. Er bedient sich, um zu einer allgemeinen Definition der derivirten Functionen zu gelangen, der Entwicklung einer Function in eine nach vorwärts und rückwärts nach gebrochenen Potenzen der Variabeln fortlaufenden Reihe, eine Entwicklung, welche nach der einen Seite hin stets divergirt, und welchen gleichwohl eine selbständige Bedeutung zugesprochen wird. Werden diese Entwicklungen aber nur in formeller Hinsicht zur Anwendung gebracht, so wird gegen dieselbe und gegen die daraus gezogenen Resultate wohl kaum Etwas einzuwenden sein, wenn auch eine grosse Fruchtbarkeit derselben nicht mehr zu erwarten ist. Die Definition der νten Ableitung einer Function z nach der Variabeln x, auf welche diese Betrachtungen führen, ist folgende:

$$\partial_x^\nu z = \int_k^x (x-t)^{-\nu-1} z_{(t)}\, dt + \sum_{n=\infty}^{n=1} k_n \frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-n-\nu)}$$

worin k und k_n willkürliche Constanten sind. Diese Definition gilt zunächst für negative ν. Für die Ableitungen mit positiver oder verschwindender Ordnungszahl erhält man den Ausdruck aus dem Satze

$$\frac{d^m \partial_x^\nu z}{d x^m} = \partial_x^{\nu+m} z,$$

welche für jedes positive ganzzahlige m gilt.

Diese Definition hat die Eigenschaft, dass sie für ein ganzzahliges positives, verschwindendes oder negatives ν den νten Differenzialquotienten, die Function z selbst oder deren $-\nu$faches Integral liefert. Die Anzahl der willkürlichen Constanten ist unendlich, ausser wenn ν ganzzahlig ist. Für ein negatives ganzzahliges ν ist diese Anzahl endlich ($= -\nu$); für ein positives ganzzahliges oder verschwindendes ν fallen diese Constanten sämmtlich weg. Ueberdies gelten die fundamentalen Sätze über die Ableitungen mit ganzzahligem Index auch für diese allgemeinen derivirten Functionen.

Die folgende Abhandlung „Neue Theorie des Rückstandes in electrischen Bindungsapparaten“ enthält eine weitere Ausführung und Anwendung der Gedanken, welche Riemann schon in seinem Vortrag bei der Göttinger Naturforscherversammlung skizzirt hatte (Nr. II. der ersten Abtheilung). Diese Abhandlung war bereits im Jahre 1854 zu einer Publication in Poggendorff's Annalen bestimmt, die aber nicht zur Ausführung kam, vermuthlich weil Riemann nicht auf eine ihm vorgeschlagene Veränderung eingehen wollte. Der Grundgedanke, von dem Riemann in der Theorie der in Rede stehenden Erscheinungen ausgeht, steht in genauem Zusammenhang mit seinen naturphilosophischen Ideen, welche für ihn, wie aus einem Briefe hervorgeht, geradezu den Ausgangspunkt seiner Betrachtungen bildeten. Es wird dabei ausser den gewöhnlichen electrischen Anziehungs- und Abstossungskräften, die dem Coulomb'schen Gesetz gemäss wirken, noch eine andere (antelectrische) Kraft angenommen, mit welcher sich die ponderable Materie dem electrisch Sein widersetzt, eine Kraft, welche bei den guten Leitern sehr klein, bei den sogenannten Nichtleitern sehr gross ist, und welche sich als ein Widerstreben des Körpers gegen das Eindringen von Spannungselectricität äussert. Die Componenten dieses Theils der electromotorischen Kraft sind proportional den partiellen

Ableitungen der electrischen Dichtigkeiten, genommen nach den Coordinaten. Es ergibt sich aus diesen Annahmen ein System von zwei lineären partiellen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung zur Bestimmung der electrischen Spannung und Dichtigkeit, mit dessen Integration in einigen der einfachsten Fälle sich der Rest der Abhandlung beschäftigt. Die Ergebnisse der Theorie stehen, soweit eine Vergleichung möglich ist, mit den Thatsachen in gutem Einklang.

Von der dritten Abhandlung dieses Abschnittes „Zwei allgemeine Lehrsätze über lineäre Differenzialgleichungen mit algebraischen Coefficienten" liegt ein im ersten Theil vollständig ausgeführtes Manuscript vor, welches aus dem Jahre 1857 stammt, also aus demselben Jahre, in dem die Abhandlung über Abel'sche Functionen veröffentlicht wurde. Es scheint auch ein innerer Zusammenhang zwischen beiden Untersuchungen zu bestehen, worüber jedoch leider nur ungenügende Andeutungen vorliegen. Die Abhandlung enthält eine Verallgemeinerung der Untersuchungen, welche der Verfasser früher (IV. Abhandlung der ersten Abtheilung) auf die Gauss'sche F-Function angewandt hat. Es wird hier ein System von n Functionen einer unabhängigen Veränderlichen definirt durch eine beliebige Anzahl gegebener Verzweigungspunkte und durch sein Verhalten in der Umgebung derselben, ferner durch die Bedingung dass durch einen Umlauf um einen Verzweigungspunkt die Functionen des Systems in lineare Combinationen ihrer selbst übergehen. Ferner wird gezeigt, dass, wenn die Verzweigungspunkte, die Unstetigkeitsexponenten und die Substitutionen, vermittelst deren die einzelnen Zweige des Functionensystems um die Verzweigungspunkte herum mit einander zusammenhängen, mit gewissen, durch die Natur der Aufgabe geforderten Beschränkungen beliebig gegeben sind, die n Functionen des Systems als particulare Lösungen einer linearen Differenzialgleichung $n$ter Ordnung mit rationalen Coefficienten angesehen werden können, falls die Summe der Unstetigkeitsexponenten, welche eine ganze Zahl sein muss, nicht grösser als $n-1$ ist. Ist diese Summe kleiner als $n-1$, so bleibt eine entsprechende Anzahl von Constanten in der Differenzialgleichung unbestimmt, und es lässt sich dieser Fall ohne Integration auf den zurückführen, wo die erwähnte Summe ihren Grenzwerth $n-1$ erreicht, wovon ein Beispiel sich in der Abhandlung „Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung" findet. Obwohl die linearen Differenzialgleichungen mit rationalen Coefficienten in neuerer Zeit mehr-

fach Gegenstand eingehender Untersuchungen gewesen sind, ist diese schöne Verallgemeinerung der Theorie der hypergeometrischen Reihe meines Wissens bis jetzt nirgends aufgestellt worden.

Die nächste, in lateinischer Sprache geschriebene Abhandlung enthält die Beantwortung einer von der Pariser Akademie gestellten Preisfrage, welche von Riemann im Jahre 1861 eingereicht wurde. Durch die Güte des beständigen Sekretärs der Akademie konnte bei der Herausgabe das Originalmanuscript zu Grunde gelegt werden. Es handelt sich um die Aufgabe, alle Fälle zu ermitteln, in denen in einem unbegrenzten homogenen Medium die Temperatur als Function der Zeit und nur zweier Variabeln dargestellt werden kann, so dass ein System isothermer Curven während der ganzen Dauer der Wärmebewegung die Eigenschaft der Isothermen behält. Riemann behandelt die Aufgabe in der Weise, dass er zunächst ganz allgemein die Eigenschaften eines auch nicht homogenen Mediums und des Anfangszustandes aufsucht, welche der gestellten Forderung genügen und dann diejenigen Fälle aussondert, in denen das Medium homogen wird.

Durch die erste Untersuchung ergeben sich gewisse Formen einer linearen partiellen Differenzialgleichung mit veränderlichen Coefficienten und es handelt sich dann weiter darum, die Fälle zu ermitteln, in welchen diese Differenzialgleichung sich durch Einführung neuer Variabeln so transformiren lässt, dass sie constante Coefficienten erhält, resp. in die Form übergeht

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Diese Aufgabe lässt sich reduciren auf die Frage, in welchen Fällen ein homogener Differenzialausdruck zweiter Ordnung mit variabeln Coefficienten $\sum_{\iota,\iota'} h_{\iota,\iota'}\, ds_\iota ds_{\iota'}$ sich in die Form $\sum_\iota dx_\iota^2$ bringen lässt, und damit ist die Untersuchung auf eine Bahn gebracht, welche sich Riemann durch seine Untersuchungen über die Hypothesen der Geometrie (Abhandlung XIII. der zweiten Abtheilung) schon geebnet hatte. Sie ist angeknüpft an die Theorie des Krümmungsmasses von allgemeinen Mannigfaltigkeiten, für welche die Grundlagen in der erwähnten Abhandlung enthalten sind. Leider sind diese Wege nur angedeutet und aus den wenigen noch vorhandenen Manuscriptblättern ist es bis jetzt nur theilweise gelungen, die noch erforderlichen sehr verwickelten Rechnungen herzustellen, welche zu dem Endresultat führen. Die Anmerkungen zu dieser Abhandlung

enthalten theils Erläuterungen zu den angewandten allgemeinen Sätzen über das Krümmungsmass, theils, soweit sie gelungen ist, die Ausführung der erwähnten Rechnungen.

Das Fragment „Sullo svolgimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua" ist von H. A. Schwarz in Göttingen bearbeitet. Nur für den Anfang liegt ein in italienischer Sprache geschriebenes ausgeführtes Manuscript vor. Der Rest musste aus einigen Formeln und Zeichnungen ergänzt werden. Riemann untersucht darin mit seinen Methoden die Convergenz der von Gauss aufgestellten Entwicklung des Quotienten zweier hypergeometrischer Reihen in einen unendlichen Kettenbruch, und gelangt zu dem Resultat, dass diese Convergenz immer stattfindet mit Ausschluss derjenigen Argumentwerthe welche reell und grösser als 1 sind; ein Resultat, welches auf anderem Wege von L. W. Thomé gefunden ist (Borchardt's Journal Bd. 67).

Der kleine Aufsatz „Ueber das Potential eines Ringes" beschäftigt sich mit der Aufgabe der Integration der Differenzialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

unter der Voraussetzung, dass die Function V an der Oberfläche eines durch Rotation eines Kreises um eine die Peripherie nicht schneidende Axe entstandenen Ringes gegeben ist. Nachdem einige allgemeine Gesichtspunkte über die bei der Integration dieser Differenzialgleichung auftretenden Reihen gegeben sind, werden zunächst für den vorliegenden Fall die geeigneten Variablen eingeführt, welche eine Separation ermöglichen, und hierauf wird die Integration durch eine besondere Klasse von hypergeometrischen Reihen, welche sich durch ganze elliptische Integrale darstellen lassen, ausgeführt. Dieselbe Aufgabe ist bekanntlich Gegenstand einer von Riemann unabhängigen eingehenden Untersuchung von C. Neumann.

Dem folgenden Aufsatz „Gleichgewicht der Electricität auf Cylindern mit kreisförmigem Querschnitt und parallelen Axen" liegen einige Notizen zu Grunde, welche, wie es scheint, als Vorbereitung zu einer Vorlesung dienten. Derselbe ist namentlich desshalb von Interesse, weil darin die sinnreiche Methode zu erkennen ist, deren Riemann sich bei der Lösung von Abbildungsaufgaben bediente, die immer anwendbar ist, wenn das abzubildende Gebiet von geradlinigen Strecken und von Kreisbogen begrenzt ist, mag dasselbe nun einfach oder mehrfach zusammenhängend sein. Es wird nament-

lich auch das Verständniss der Abhandlung „Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung" durch dieses kleine Fragment wesentlich gefördert.

Zu der zuletzt erwähnten Abhandlung über die Fläche vom kleinsten Inhalt liessen sich aus einigen im Nachlass gefundenen Andeutungen noch zwei schöne Beispiele herstellen, von denen das erste die Minimalfläche betrifft, welche von drei geraden Linien begrenzt ist, von denen eine die beiden anderen schneidet, das zweite die (zweifach zusammenhängende) Minimalfläche, welche begrenzt ist von zwei in parallelen Ebenen gelegenen geradlinigen Polygonen. In dem letzteren Fall lässt sich die Aufgabe allgemein auf Quadraturen zurückführen und erfordert nicht die Integration von linearen Differenzialgleichungen.

In der folgenden Nummer sind zwei Fragmente zusammengestellt, welche sich mit der Frage beschäftigen, was aus den von Jacobi aufgestellten Reihen aus der Theorie der elliptischen Functionen wird, wenn der Modul der von Jacobi mit q bezeichneten Grösse gegen 1 convergirt. Im ersten dieser Fragmente werden die in § 40 der Fundamenta aufgestellten Reihen von diesem Gesichtspunkt aus untersucht, und da diese Reihen im Grenzfall zum grössten Theil nicht mehr convergiren, so werden sie zunächst einer Integration unterworfen. Geht man in den so gebildeten Reihen zur Grenze über, so entstehen Functionen, welche in jedem noch so kleinen Intervalle unendlich viele Unterbrechungen der Stetigkeit haben. Es scheint, dass der hauptsächlichste Zweck dieser Untersuchung der war, Beispiele solcher Functionen für die Abhandlung „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe" (Abhandlung XII. des zweiten Abschnitts) zu finden. Im zweiten Fragment werden die Reihen für $\log k$, $\log k'$ $\log \frac{2K}{\pi}$ selbst, ohne vorhergegangene Integration vom gleichen Gesichtspunkt aus untersucht. Es zeigt sich dabei, dass, wenn das Periodenverhältniss der elliptischen Functionen sich einem reellen rationalen Werth annähert, die imaginären Theile dieser Reihen sich bestimmten endlichen Grenzwerthen nähern, während die reellen Theile zum Theil verschwinden, zum Theil in bestimmter Weise unendlich werden. Diese Untersuchung findet sich im Nachlass auf einem kaum leserlichen Blatte, dessen Bedeutung erst kurz vor dem Abdruck erkannt wurde. Es blieb daher keine Zeit übrig, die Correctheit der Formeln in den reellen Theilen genau zu prüfen.

Ein Commentar zu diesem Fragment von R. Dedekind behandelt die Frage nach einer andern strengen Methode und liefert die Endformeln in einer von der Riemann'schen verschiedenen Form. Es scheint, dass die Formeln von Riemann in den reellen (unendlich werdenden) Bestandtheilen nicht alle ganz richtig sind, während es die imaginären Theile unzweifelhaft sind. Der erwähnte Commentar enthält ausserdem noch eine interessante Anwendung der von Riemann benutzten Methode auf die Theorie der unendlich vielen Formen der Theta-Function.

Das folgende kurze Fragment aus der Analysis Situs enthält leider nur einige Begriffsbestimmungen und wenige Andeutungen über diese tiefsinnigen und wichtigen Untersuchungen, welche auf eine Verallgemeinerung der Theorie des Zusammenhangs hinzielen, die Riemann zum Ausgangspunkt seiner functionentheoretischen Betrachtungen gemacht hat. Nur ein Theil der hier aufgestellten Begriffe und Sätze gestattet noch eine Anschauung im Raume von drei Dimensionen, während die übrigen ganz abstrackt gefasst werden müssen. Bezüglich der mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten wird eine Definition aufgestellt, welche bei begrenzten Räumen noch anschaulich ist:

„*Wenn im Innern einer stetig ausgedehnten Mannigfaltigkeit mit Hülfe von m festen für sich nicht begrenzenden n-Streckstücken jedes unbegrenzte n-Streck begrenzend ist, so hat diese Mannigfaltigkeit einen* $m+1$*-fachen Zusammenhang nter Dimension. Eine stetig ausgedehnte Mannigfaltigkeit heisst einfach zusammenhängend, wenn der Zusammenhang jeder Dimension einfach ist*“.

Weiterhin wird diese Definition noch etwas anders gefasst und einige Folgerungen bezüglich der Zerlegung von Mannigfaltigkeiten durch Querschnitte daran geknüpft. So ist z. B. der Raum einer Kugel einfach zusammenhängend, der Raum einer Hohlkugel einfach zusammenhängend in der ersten, zweifach zusammenhängend in der zweiten Dimension, weil jede im Innern der Hohlkugel geschlossene Linie die Begrenzung einer im Innern verlaufenden Fläche bildet, während erst mit Zuziehung einer bestimmten im Innern geschlossenen Fläche jede andere solche Fläche die vollständige Begrenzung eines inneren Raumtheiles bildet. Umgekehrt ist der von einer Ringfläche begrenzte Raum einfach zusammenhängend in der zweiten, zweifach zusammenhängend in der ersten Dimension. Die Hohlkugel wird durch einen Querschnitt von einer Dimension, der ringförmige Raum durch einen von zwei Dimensionen in einen

einfach zusammenhängenden Raum verwandelt. Ein Querschnitt von einer Dimension verwandelt den ringförmigen Raum in einen in der ersten Dimension dreifach zusammenhängenden Raum. Dies zur Erläuterung des allgemeinen Satzes.

„Der Zusammenhang eines n-Strecks wird durch jeden einfach zusammenhängenden n-m-streckigen Querschnitt entweder in der mten Dimension um 1 erniedrigt oder in der m — 1ten Dimension um 1 erhöht.“

Die beiden folgenden Aufsätze sind einer Vorlesung über Abel'sche Functionen entnommen, welche Riemann in den Jahren 1861 und 1862 gehalten hat; der Bearbeitung liegt ein Heft von G. Roch zu Grunde. Der erste derselben enthält einen sehr eleganten Beweis der Convergenz der p-fach unendlichen Theta-Reihen auf Grund eines allgemeinen Satzes, durch den die Untersuchung der Convergenz einer unendlichen Reihe mit positiven Gliedern zurückgeführt wird auf die Untersuchung der Convergenz eines bestimmten Integrals.

Der zweite dieser Aufsätze behandelt diejenigen Functionen, welche Riemann unter dem Namen *„Abel'sche Functionen“* ausgezeichnet hat, für den Fall $p = 3$. Es sind das die Quadratwurzeln aus solchen Functionen φ (vergl. Theorie der Abel'schen Functionen, VI. Abhandlung der ersten Abtheilung), welche in $p - 1$ Punkten unendlich klein von der zweiten Ordnung werden, welche im Allgemeinen in endlicher Zahl existiren. Im Falle $p = 3$ beträgt diese Zahl 28, entsprechend den 28 ungeraden Theta-Functionen (und, geometrisch, entsprechend den 28 Doppeltangenten einer Curve 4. Ordnung). Die Bestimmung dieser Functionen hängt von einer Gleichung des 28. Grades ab. Nimmt man aber 6 derselben als bekannt an, so lassen sich die übrigen mittelst einer Gleichung vierten Grades bestimmen. Für die Theorie der Umkehrung der algebraischen Integrale ist die Zuordnung dieser Functionen zu den ungeraden Theta-Functionen von besonderer Wichtigkeit und diese Aufgabe ist der Hauptgegenstand des vorliegenden Aufsatzes.

In einem Anhang sind endlich die Fragmente zusammengestellt, die sich auf Riemanns philosophische Spekulationen beziehen. Diese Forschungen haben Riemann während eines grossen Theils seines Lebens begleitet und haben einen erheblichen Theil seiner Gedankenarbeit in Anspruch genommen. Auf das Nähere dieser eigenthümlichen und tiefsinnigen Weltanschauung einzugehen, dürfte

hier um so weniger am Platze sein, als die ohnehin schon äusserst knappe und lückenhafte Darstellung kaum einen verkürzenden Auszug gestattet, der nicht der Gefahr eines entstellenden Missverständnisses ausgesetzt wäre. Nur das Eine mag angeführt sein, dass in den naturphilosophischen Untersuchungen Riemanns Hauptziel das ist, die Vorstellung von einer Fernewirkung zu beseitigen, und zu ersetzen durch eine andere, nach welcher die Materie nur auf ihre unmittelbare Umgebung einwirkt. Dieser Zweck wird erreicht durch die Annahme eines den Raum stetig erfüllenden Stoffes, welcher Träger der Gravitationskraft, der Licht- und Wärmebewegung und der electrischen Wirkungen ist, der aber wesentlich verschieden ist von der ponderablen Materie. Die Körperatome sind nach Riemanns Auffassung Punkte, in welche dieser hypothetische Stoff fortwährend einströmt und aus der Erscheinungswelt verschwindet. Die Ursache der Einwirkung der Körperatome auf einander wird in dem Widerstand gesucht, mit dem sich dieser Stoff einer Formänderung entgegensetzt.

Den Schluss des ganzen Werkes bildet eine von Dedekind verfasste Schilderung von Riemanns Lebenslauf. Diese biographische Skizze, welche sich hauptsächlich auf Briefe und andere Mittheilungen der Familie gründet, hat nicht den Zweck, die wissenschaftliche Stellung und Bedeutung Riemanns zu beleuchten; sie soll seinen Verehrern und Freunden ein Bild geben von dem Lebensgang und der Persönlichkeit des in jeder Hinsicht ausgezeichneten, leider so früh dahingegangenen Mannes. Es ist das Bild eines stillen, einfachen Gelehrtenlebens, mannigfach bedrückt und beengt durch die Ungunst der Verhältnisse, aber wunderbar ausgerüstet von der Natur zum Eindringen in die Tiefen der Wissenschaft und erfüllt vom reinsten und ernstesten Streben nach der Erkenntniss der Wahrheit.

Königsberg. H. Weber.

J. Frischauf: Elemente der absoluten Geometrie. (Leipzig 1876, B. G. Teubner. VI u. 142. S. 8.)

Die Elemente der Geometrie des Euclides sind (trotz aller Strenge in der Deduction) in den Grundbegriffen und ersten Voraussetzungen dunkel und unklar. Besonders die Begriffe der Geraden und Ebene, der Parallelensatz und das Unendliche bilden die Hauptschwächen der euclidischen Behandlung. Durch die Bemühungen von Gauss, W. und J. Bolyai und Lobatschewsky wurde in die Parallelenfrage eine Klärung der Ansichten gebracht; in der vorliegenden Schrift werden die innig verknüpften Voraussetzungen der Geraden und des Unendlichen in ihrem Zusammenhange erörtert und dadurch die oben erwähnten Arbeiten ergänzt. Von der Kugelfläche ausgehend, werden im ersten Buche nach einer, von Leibniz zuerst angedeuteten, von W. Bolyai und Lobatschewsky durchgeführten, Methode die Gerade und Ebene mit ihren Fundamentaleigenschaften abgeleitet und dann im zweiten Buche die sogenannte absolute Geometrie des J. Bolyai oder Pangeometrie des Lobatschewsky entwickelt. Die Thatsache, dass das Parallelenaxiom aus der Voraussetzung der Congruenz und dem Axiom der Geraden *nicht* deductiv gefolgert werden kann, sondern mit Hülfe der Erfahrung (Beobachtung) bewiesen werden müsse, kann als das wichtigste Resultat des zweiten Buches angesehen werden. Die Grundzüge einer analytischen Geometrie bilden den Schluss dieses Buches.

Das dritte Buch „Endlicher Raum und absolute Geometrie" beendet zunächst die Fragen nach den Principien. Die Geometrie des endlichen und unbegrenzten Raumes, welche von F. Klein als (theoretisch) gleichberechtigt mit der euclidischen und nichteuclidischen Geometrie hingestellt wurde, erscheint hier als ein Theil der Untersuchungen der Geometrie des unendlichen Raumes. Die Fragen nach dem Axiom der Geraden und der Anzahl ihrer unendlich fernen Punkte werden vollständig erledigt. Nun folgen die analytische Behandlung der Flächen constanter Krümmung, die Theorien von Riemann und Helmholtz. Von ersterer werden der Standpunkt und die darauf bezüglichen Arbeiten angeführt, letztere wird vollständig jedoch in bedeutend vereinfachter Weise entwickelt. Aus dieser Untersuchung wird das wichtige Resultat gefolgert, dass die Voraussetzungen der Anwendbarkeit der Rechnung und der

Existenz von Differenzialquotienten mit den Voraussetzungen der Congruenz und der Existenz unendlich kleiner ähnlicher Figuren (d. i. Figuren, auf welche die euclidische Geometrie angewendet werden kann) identisch sind. Einige Sätze von Beltrami's Theorie der Räume constanter Krümmung bilden den Schluss der vorliegenden Schrift*).

Graz. J. Frischauf.

Oscar Roethig: Die Probleme der Brechung und Reflexion. (Leipzig 1876, Teubner.)

Das Werk ist aus dem Wunsche entstanden, alle Probleme der Brechung und Reflexion nach einer einheitlichen Methode zunächst streng zu lösen, Vernachlässigungen aber in bestimmt definirter Weise erst dann an die allgemeinen Lösungen anzubringen, wenn besondere Umstände dazu Veranlassung geben.

Die in Betracht zu ziehenden Probleme zerfallen hier in zwei Gruppen. Die erste ist zusammengefasst in das Problem *des Durchgangs der Strahlen.* Die andere ist *Problem der Bildpunkte und* Bilder genannt.

Das Problem des Durchgangs der Strahlen lässt sich so aussprechen:

Aus einem Mittel fallen Strahlen auf die Trennungsfläche dieses Mittels von einem folgenden, verlaufen nach beliebig vielen Brechungen und Reflexionen an beliebigen Flächen durch die verschiedenen Mittel und fahren aus in ein letztes Mittel. Welches sind die Gleichungen der die einzelnen Mittel durchlaufenden, besonders der im letzten Mittel ausfahrenden Strahlen?

Die Lösung dieses Problems ist in eindeutiger Weise gegeben, so weit dies im Allgemeinen möglich ist, also so weit, dass nur noch die Besonderheiten eines speciellen Problems in vorgeschriebener Weise in die allgemeinen Lösungen einzuführen sind. Das zweite Problem, das *der Bildpunkte und Bilder*, enthält schon eine an die Lösung des ersten angebrachte Vernachlässigung. Es lehrt nämlich die Abhandlung des Herrn Kummer, „allgemeine Theorie

*) Berichtigungen: S. 73, Z. 11 ist der Factor $\frac{1}{2}$ wegzulassen. S. 75 Z. 9 lies $\partial J =$ statt $\partial J -$. S. 133, Z. 10 ist zwischen die Worte: „Raum" und „von" einzuschalten: „als (geometrischen) Ort im Raume".

der gradlinigen Strahlensysteme", (Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik. Band 57), deren Kenntniss hier vorausgesetzt wird, dass in jedem Strahle eines gradlinigen Strahlensystems zwei in Bezug auf ihre Realität noch zu untersuchende Punkte bestehen, in welchen die Querschnitte eines unendlich dünnen Strahlenbündels unendlich kleine gerade Linien von der Ordnung der grössten Ausdehnung eines beliebigen anderen Querschnitts sind. Hier werden nun die nach Vollendung des Durchgangs in das eine Auge eines im letzten Mittel befindlichen Beobachters gelangenden Strahlen als ein unendlich dünnes Strahlenbündel angesehen, oder, was dasselbe ist, der Radius der Pupille wird als eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung betrachtet. Von den Querschnitten in den beiden oben erwähnten von Herrn Kummer mit dem Namen *Brennpunkte* bezeichneten Punkten wird angenommen, dass das Auge sie als Punkte empfindet, und den Ort des leuchtenden Punktes des ersten Mittels in einen dieser Punkte versetzt, die desshalb hier *Bildpunkte* genannt werden. In dieser Auffassung ist das Problem gestellt und im Allgemeinen gelöst. Vielleicht wird man eine genauere Darstellung des Zusammenhangs der hier gegebenen Resultate mit den von Herrn Kummer gefundenen vermissen, besonders auch vielleicht eine nähere Angabe der Länge der geraden Linien, welche das Auge hier als Punkte empfinden soll. Ich habe dies unterlassen, in der Meinung, dass ein mit den Resultaten der Arbeit des Herrn Kummer vertrauter Leser diese Fragen selbst erledigen wird, um so mehr, als dies erst für specielle Probleme einen Werth hat.

Es erschien nun zunächst als das Wichtigste, die bisher bekannten Resultate specieller Probleme der Brechung und Reflexion aus den allgemeinen Lösungen herzuleiten, vor allen also das von Gauss in seinen dioptrischen Untersuchungen gestellte und näherungsweise gelöste Problem erst streng zu behandeln und dann mit einer fest definirten Näherung die Gauss'schen Formeln abzuleiten. Der grösste Theil des Werkes beschäftigt sich mit dieser Aufgabe und zwar, der Wichtigkeit des Gegenstandes entsprechend, in der Weise, dass die strengen Lösungen dieses Problems für sich selbst, also unabhängig von den allgemeinen Lösungen aller Probleme des Durchgangs der Strahlen, hergeleitet werden. Die Herleitung ist in einer Form gegeben, welche das Verständniss dieser Theile des Werkes auch denen zugänglich macht, welche von der Differenzialrechnung noch keine Kenntniss haben.

Auch die geometrischen von Gauss und Anderen gefundenen Relationen, die Hauptpunkte etc., sind gegeben. Sie entstehen hier dadurch, dass besondere Werthe des Linearverhältnisses von Bild und Gegenstand in Betracht gezogen werden. Als solche sind hier nur die Werthe 1, ∞, 0 betrachtet, welche zu den bekannten Punkten der Axen führen. Man ersieht aber hieraus sofort, dass jeder andere bestimmte Werth zu einem neuen Punkte und demnach zu neuen geometrischen Relationen und neuen Constructionen des zu einem gegebenen Punkte gehörigen Bildpunktes führen muss.

Berlin. Oscar Röthig.

Kostka: Ueber die Bestimmung von symmetrischen Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch deren Coefficienten. (Journal f. d. reine und angewandte Mathematik Bd. 81, S. 281 bis 289.)

Die bekannte Aufgabe: „eine symmetrische rationale Function der Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch die Coefficienten dieser Gleichung auszudrücken" wird gewöhnlich durch successive Division oder Ermittelung eines Entwicklungscoefficienten gelöst. In der vorliegenden Abhandlung wird dadurch, dass die symmetrische Function durch den Quotienten zweier alternirenden ersetzt wird, eine einfache Regel hergeleitet, nach welcher das Resultat ohne Divisionen in Form eines Aggregats von Determinanten leicht angegeben werden kann.

Sei

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots a_0 = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n);$$

seien $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$ ganze positive Zahlen (oder auch $\alpha_0 = 0$) und zwar $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots \alpha_{n-1}$; seien $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots$ diejenigen nach der Grösse aufsteigend geordneten ganzen Zahlen, welche mit den α zusammen die Zahlenreihe $0, 1, 2, \ldots \alpha_{n-1}$ einfach ausfüllen; und werde endlich die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{\beta_1} & a_{\beta_1-1} & a_{\beta_1-2} & \cdots \\ a_{\beta_2} & a_{\beta_2-1} & a_{\beta_2-2} & \cdots \\ a_{\beta_3} & a_{\beta_3-1} & a_{\beta_3-2} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots)$$

gesetzt, wobei $a_n = 1$, $a_{n+k} = 0 = a_{-k}$: dann ist das Determinantenverhältniss

$$\frac{\Sigma \pm x_1^{\alpha_0} x_2^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n-1}}{\Sigma \pm x_1^0 x_2^1 \dots x_n^{n-1}}$$

$$= (-1)^{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots \alpha_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}} \cdot (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{\alpha_{n-1}-n+1}).$$

Wenn ferner

$$F = \Sigma x_1^0 x_2^{\gamma_1} x_3^{\gamma_2} \dots x_n^{\gamma_n-1}$$

eine rationale symmetrische Function der x, deren Glieder nur durch die verschiedenen Permutationen der Exponenten sich unterscheiden, und wenn $\bar{\gamma}$ der grösste dieser Exponenten: so multiplicire man F mit $x_1^0 x_2^1 x_3^2 \dots x_n^{n-1}$; jedes Glied, in dem dann gleiche Exponenten vorkommen, lasse man unberücksichtigt; in jedem der übrigen zähle man die Anzahl r der Inversionen der Exponenten und bilde die Reihe derjenigen nach der Grösse aufsteigend geordneten Zahlen $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{\bar{\gamma}}$, welche mit den Exponenten zusammen die Zahlenreihe $0, 1, 2, \dots \bar{\gamma} + n - 1$ ausfüllen; dann ist:

$$F = (-1)^{\gamma_1 + \gamma_2 + \dots \gamma_{n-1}} \Sigma (-1)^r . (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{\bar{\gamma}}).$$

Dies sind die beiden Hauptresultate der Untersuchung. Der Rest des Aufsatzes beschäftigt sich mit der Frage, wie aus der Form einer der im Ausdruck von F vorkommenden Determinanten deren Vorzeichen bestimmt werden kann, und gibt endlich einige Anwendungen jener Resultate.

Insterburg. Kostka.

Helmert: Ueber die Formeln für den Durchschnittsfehler.

(Astr. Nachr. Nr. 2039. S. 353—368.)

Eine wichtige Aufgabe der Methode der kleinsten Quadrate ist bekanntlich die Ermittlung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers ϱ aus den Verbesserungen λ der Beobachtungsgrössen l. Am schärfsten erfolgt diese Rechnung mittelst der Quadratsumme $[\lambda\lambda]$, allein sie ist etwas mühsam und man hat daher Formeln aufgestellt, um ϱ aus [val. abs. λ] zu erhalten: Peters für directe Beobachtungen einer Unbekannten, Lüroth für vermittelnde Beobachtungen mehrerer Unbekannten. Diese Formeln erschienen dem Verf. nicht als ganz zweifellos begründet. Der Aufsatz gibt nun eine strenge Ableitung der betreffenden Formeln für verschiedene Fälle, wobei sich heraus-

stellt, dass nur die Peters'sche Formel beibehalten werden darf, während sich für complicirtere Fälle der Ausgleichung neue Formeln ergeben, die so zusammengesetzt sind, dass ihre Anwendung schwerlich rathsam erscheinen dürfte. Unter Voraussetzung des Gauss'schen Fehlergesetzes ist namentlich

$$\varrho = 0{,}84535 \text{ [val. abs. } \lambda] : \sum_1^n {}^{(k)} \sqrt{1 - (a_k^2[\alpha\alpha] + 2a_k b_k[\alpha\beta] + b_k^2[\beta\beta] + \cdots)}$$

bei n vermittelnden Beobachtungen gleicher Genauigkeit; a_k, b_k, .. sind die Coefficienten der Unbekannten in der $k$ten Fehlergleichung und $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ etc. die in dieser Bezeichnung wohlbekannten Determinantenquotienten der allgemeinen Auflösung der Normalgleichungen. Für directe Beobachtungen folgt aus dem Vorstehenden die Formel von Peters:

$$\varrho = 0{,}84535 \text{ [val. abs. } \lambda] : \sqrt{n(n-1)}.$$

Der Aufsatz gibt auch eine directe Entwicklung der Formel für ϱ bei bedingten Beobachtungen, vergleicht ferner die ältere Formel mit dem neuen Ergebniss und macht den Versuch einer Aufstellung brauchbarer Näherungsausdrücke. Ueber die Art der Entwicklung der strengen Formeln mag nur soviel bemerkt werden, dass dabei die Benutzung von Discontinuitätsfactoren zur Nothwendigkeit wurde und zum Glück die Ausführung der Integrationen auf keinerlei Schwierigkeit stiess.

Aachen. Helmert.

Helmert: Der Einfluss der schiefen Stellung der Latte bei Distanzmessungen, und eine empirische Formel für den mittlern Fehler der Distanzmessung an dem Tachymeter von G. Starke. (Zeitschr. des österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1875. S. 154—157.)

In dem Aufsatz wird angenommen, dass bei dem Ablesen der beiden Distanzfäden eines Fadendistanzmessers die vom Gehülfen vertical zu haltende Latte im Allgemeinen eine kleine und *für beide Fädenablesungen verschiedene Schiefe* δ habe. Setzt man dieselbe gleich $\pm\frac{1}{100}$ der Länge (vielleicht etwas zu hoch gegriffen?), so ist das

Quadrat des *mittlern* Fehlers der Distanz in Metern gleich

$$\left(2m^2 + \frac{a^2}{2}\right) \sin 2\alpha^2 + \frac{4}{15} a^4 \cos \alpha^4,$$

worin a die Ablesungsdifferenz, m die mittlere Zielhöhe und α die Neigung der mittlern Visur sind und ferner die Distanzmesserconstante k gleich 200 (entsprechend dem Tachymeter) angenommen ist. Der Coefficient $\frac{4}{15}$ des zweiten Gliedes ergab sich aus Beobachtungen, über die in der Zeitschr. f. Vermessungswesen 1874 S. 334 berichtet worden ist. In seiner allgemeingültigen Gestalt heisst das erste, die Lattenschiefe berücksichtigende Glied:

$$\frac{1}{4} k^2 \sin^2\delta \left(2m^2 + \frac{a^2}{2}\right) \sin 2\alpha^2.$$

Aachen. Helmert.

Helmert: Ueber die günstigste Wahl der Kardinalpunkte bei dem Abstecken einer Trace. (Zeitschr. des Hannover. Arch.- u. Ing.-Ver. 1875. S. 337—349.)

Die definitive Absteckung einer Trace beginnt bekanntlich mit der Fixirung einiger wenigen Punkte, welche zur Construction nach geometrischen Regeln gerade ausreichen. Dass man diese Kardinalpunkte bei Absteckung einer Geraden möglichst an deren Enden zu legen habe, ist nicht zweifelhaft, weil andernfalls eine Vergrösserung der in der Fixirung der Kardinalpunkte auf dem Terrain begangnen Fehler für die äusseren Theile der Geraden eintreten wird. Weniger einfach und in die Augen springend ist die Regel bei Absteckung von Kreisbögen. Sie abzuleiten ist Zweck des Aufsatzes und es stellt sich heraus, dass es nicht rathsam ist, einen Kreisbogen aus zwei Tangenten oder Punkten zu entwickeln, die einen Centriwinkelabstand von mehr als 90⁰ haben. Die günstigste Lage der Elemente wird im Aufsatze für verschiedene Fälle abgeleitet und die Uebersicht durch Tabellen gefördert, welche die maximalen Curvenverschiebungen, denen man unter Umständen ausgesetzt ist, angeben. Gegenüber andrer Anschauung betont Verf. noch besonders, dass nicht die Kürze der Tangenten und die damit verbundene Unsicherheit der Richtung derselben einen vorherrschend schädlichen Einfluss auf die Lage der Kreisbögen äussert, sondern dass vielmehr die radialen Verschiebungen der Tangenten in Ver-

bindung mit grossen Centriwinkeln die Ursache beachtenswerther Aenderungen in der Lage der Kreisbögen bilden, dass man daher auch bei langen Tangenten Veranlassung haben kann, die mitgetheilten Regeln zu beachten.

Am Schluss des Aufsatzes gibt Verf. ein Verfahren an, einen Kreisbogen von bestimmtem Radius mehr als 2 Terrainpunkten möglichst genau anzupassen.

Aachen. Helmert.

Helmert: Einfache Ableitung Gauss'scher Formeln für die Auflösung einer Hauptaufgabe der sphärischen Geodäsie. (Zeitschr. f. Vermessungswesen. 1875. S. 153—156.)

Gauss gibt am Ende des ersten Theils seiner geodätischen Untersuchungen mehrere Auflösungen der Aufgabe der geodätischen Uebertragung der geographischen Coordinaten auf der Kugel ohne Beweis. Die vierte dieser Auflösungen, zu scharfer Rechnung bei der jetzigen Einrichtung der Logarithmentafeln bequem geeignet, wird hier vom Verf. abgeleitet. Demselben kam es dabei mehr darauf an, recht einfach und mit geringem Formelapparat zu arbeiten, als durch Kürze zum Ziele zu gelangen.

Aachen. Helmert.

Helmert: Nachrichten über einen Mikroskoptheodolit. (Zeitschr. f. Vermessungswesen. 1875. S. 327—341.)

Der Theodolit ist aus dem Institut von Starke und Kammerer in Wien und überrascht bei geringen Dimensionen durch die ausgezeichnete Theilung seines Theilkreises von 16 Ctm. Durchmesser. Verf. theilt mit, in welcher Weise über die Güte der Theilung und Genauigkeit der Winkelbeobachtung Aufschluss erhalten worden ist; die angewandten und durchaus bekannten Methoden sind solche, welche in der Praxis immer ohne Weiteres benutzt werden können. Für den periodischen Fehler des Theilkreises fand sich (am Mittel der Angaben beider Mikroskope)

$$-0'',84 \cos 2A + 2'',11 \sin 2A - 0'',75 \cos 4A + 1'',97 \sin 4A;$$

der zufällige Theilungsfehler ist wesentlich kleiner als 1″ und der

mittlere Einstellungsfehler eines Theilstriches $\pm 1'',6$. Abgesehen vom periodischen Theilungsfehler, welcher mittelst vier Kreisstellungen eliminirt werden kann, ist unter günstigen Luftverhältnissen der mittlere Fehler einer einmaligen Richtungsbeobachtung $\pm 2''$.

Aachen. Helmert.

Ludwig Boltzmann: Zur Integration der partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung. (Wien. Sitz.-Ber. LXXII (2) 471.)

Die Integration der allgemeinen partiellen Differenzialgleichung 1. Ordnung mit 2 independenten Variabeln x, y und einer dependenten z

$$\Phi(x, y, z, p, q) = 0, \tag{1}$$

wobei $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ ist, lässt sich bekanntlich auf die des Systems simultaner linearer partieller Differenzialgleichungen:

$$\begin{aligned} Q_0 &= P_1 \frac{\partial z}{\partial x} + P_2 \frac{\partial z}{\partial y} \\ Q_1 &= P_1 \frac{\partial p}{\partial x} + P_2 \frac{\partial p}{\partial y} \\ Q_2 &= P_1 \frac{\partial q}{\partial x} + P_2 \frac{\partial q}{\partial y} \end{aligned} \tag{2}$$

wobei $Q_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - p\frac{\partial \Phi}{\partial z}$, $Q_2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - q\frac{\partial \Phi}{\partial z}$, $P_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial p}$, $P_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial q}$ ist, zurückführen.

Wenn bloss die Gleichungen (2) gegeben sind, so sind die Grössen z, p und q natürlich noch nicht vollständig, als Functionen von x und y bestimmt. Dazu ist vielmehr noch nothwendig, die zu einem bestimmten Werthe des y (z. B. y^0) gehörigen Werthe von z, p, q als Functionen von x zu kennen. Sei für $y = y^0$ etwa $z = \varphi(x)$, $p = \chi(x)$, $q = \psi(x)$, so werden diese Anfangsbedingungen dann und nur dann auch eine Lösung der Gleichung (1) liefern, wenn $\chi(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}$ und $\psi(x)$ durch die Gleichung:

$$\Phi\left(x, y^0, \varphi(x), \frac{d\varphi(x)}{dx}, \psi(x)\right) = 0$$

bestimmt ist. Das Problem die Gleichung (1) zu integriren, ist



also identisch mit dem Probleme, Auflösungen der Gleichungen (2) von der geschilderten Beschaffenheit zu finden. In der vorliegenden Abhandlung wird nun eine einfache Methode gelehrt, nach welcher dies bewerkstelligt werden kann und welche in der Einführung von z und p als independenten Variabeln beruht und gezeigt, dass diese Methode sehr naturgemäss zu dem bekannten Jacobi'schen vollständigen Integrale der Gleichung (1) führt. Dieselbe Methode wird dann auch auf partielle, nichtlineare Differenzialgleichungen mit beliebig viel Independenten übertragen.

Wien. L. Boltzmann.

Ludwig Boltzmann: Bemerkungen über die Wärmeleitungen von Gasen. (Wien. Sitz.-Ber. LXXII (2) 458.)

Es wird gezeigt, dass man nach der Annahme, die innere Bewegung der Gasmoleküle trage gar nicht zur Wärmeleitung der Gase bei, für deren Wärmeleitungsconstante Werthe erhält, die kleiner als die experimentell gefundenen sind. Macht man jedoch, wie es Maxwell (phil. mag. 4. ser. vol. XXXV) thut, die Annahme, dass beim Vorgange der Wärmeleitung in einem Gase sich die leb. Kraft progressiver Bewegung, welche durch einen Querschnitt hindurchgeleitet wird, zur gesammten leb. Kraft, welche hindurchgeleitet wird, verhält, wie die im Gase enthaltene leb. Kraft progressiver Bewegung zur gesammten darin enthaltenen leb. Kraft, so bekommt man zu grosse Wärmeleitungsconstanten. Nimmt man hingegen an, die innere Bewegung der Moleküle trage nur $\frac{3}{13}$ von dem Betrage zur Wärmeleitung bei, den sie nach Maxwell's Annahme dazu beitragen würde, so bekommt man für die Wärmeleitungsconstante nicht bloss der Luft, sondern auch aller übrigen Gase Werthe, welche gut mit den von Stefan, Kundt, Warburg und Winkelmann experimentell gefundenen übereinstimmen.

Wien. L. Boltzmann.

Ludwig Boltzmann: Ueber das Wärmegleichgewicht von Gasen, auf welche äussere Kräfte wirken. (Wien. Ber. LXXII (2) 427.)

Die Formel, welche ich in der Abhandlung „Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen" Wien. Sitz.-Ber. LXVI. für die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Positionen, Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsrichtungen der Atome eines Gases (letzterer Begriff im Sinne der neuern Gastheorie) aufgestellt habe, wandte ich schon dort auch auf ein Gas an, welches dem Einflusse der Schwere unterworfen ist. Ich habe jedoch ihren Beweis dort nur für den Fall durchgeführt, dass ausser den zwischen den Atomen ein und desselben Moleküls und den zwischen den Atomen zweier gerade zusammenstossender Moleküle wirksamen Kräften keine anderen Kräfte auf die Gasatome wirksam sind. Wir wollen solche andere Kräfte immer als „äussere Kräfte" bezeichnen. Den ersten Beweis, dass dieses Wahrscheinlichkeitsgesetz den Bedingungen des Wärmegleichgewichts genügt, hat Burbury (Nature Nr. 293, Bd. XII, 107) gegeben. In der Abhandlung, welche den Gegenstand dieses Referates bildet, wird nur der Beweis geliefert, dass es den Bedingungen des Wärmegleichgewichtes auch im Falle des Vorhandenseins äusserer Kräfte nicht nur genügt, sondern dass es auch das einzige Wahrscheinlichkeitsgesetz ist, welches diesen Bedingungen genügt. Dieser Beweis wird ganz analog geführt, wie er in der Eingangs citirten Abhandlung (Wien. Sitz.-Ber. LXVI) im Falle des Mangels äusserer Kräfte geführt wurde. Im Falle einatomiger Gasmoleküle bezeichnet $f(t, x, y, z, u, v, w)\, dx\, dy\, dz\, du\, dv\, dw$ die Anzahl der Gasmoleküle, deren Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten parallel den Coordinatenaxen zur Zeit t zwischen den Grenzen

$$\begin{array}{ll} x \text{ und } x + dx & u \text{ und } u + du \\ y \text{ und } y + dy & v \text{ und } v + dv \\ z \text{ und } z + dz & w \text{ und } w + dw \end{array}$$

liegen. Diese Anzahl verändert sich während einer sehr kurzen Zeit dt, theils vermöge der Wirksamkeit der innern und äussern Kräfte, theils vermöge der Zusammenstösse der Moleküle, theils auch vermöge des geradlinigen Fortfliegens derselben. Alle diese Veränderungen werden nach den bekannten Methoden der mathematischen Physik berechnet und daraus eine partielle Differenzialgleichung

für die Function $f(t, x, y, z, u, v, w)$ gewonnen, in welcher jedoch auch bestimmte diese Function enthaltende Integrale auftreten. Die allgemeine Integration dieser partiellen Differenzialgleichung unter beliebigen Anfangsbedingungen (d. h. also für eine beliebige anfängliche Vertheilung der Gasmoleküle in dem Gefässe, welches das Gas enthält), gelingt zwar nicht, doch lässt sich aus derselben der Beweis liefern, dass der Werth einer gewissen Grösse (der Entropie) in Folge der Molekularbewegung nur abnehmen kann. Der analytische Ausdruck für diese Grösse ist derselbe, wie im Falle keiner äusseren Kräfte. Nachdem dies festgestellt ist, kann für die Function $f(\infty, x, y, z, u, v, w)$ d. h. für die nach langer Zeit sich einstellende Zustandsvertheilung leicht eine Functionalgleichung gewonnen werden, deren Auflösung dann die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Positionen Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsrichtungen der Atome im Zustande des Wärmegleichgewichtes liefert. Was das Resultat anlangt, mag hier bemerkt werden, dass als Geschwindigkeitsrichtung für jedes Atom jede Richtung im Raume gleich wahrscheinlich erscheint, die mittlere lebendige Kraft für jedes Atom gleich ist und auch das Verhältniss der Wahrscheinlichkeit der verschiedenen leb. Kräfte zu der der mittleren durch das Vorhandensein der äusseren Kräfte nicht verändert wird. Nur die Dichte des Gases wird an verschiedenen Stellen verschieden sein.

Eine Unrichtigkeit bei Auflösung der Functionalgleichung (dass h a priori unabhängig von xyz angenommen wird) kann leicht verbessert werden. Dies, sowie die Auflösung der Functionalgleichung im Falle strömender Bewegung des Gases werde ich in einer demnächst zu erscheinenden Abhandlung behandeln. Daselbst werde ich auch die Einwände Loschmidt's (Wien. Sitz.-Ber. LXXIII (2)) besprechen.

Meine Abhandlung enthält noch die Behandlung des analogen Problems für Gase mit mehratomigen Molekülen und einen Anhang, worin die Unmöglichkeit negativer innerer Arbeit nachgewiesen wird.

Wien. L. Boltzmann.

S. Günther: Ueber aufsteigende Kettenbrüche. (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 21. Band. S. 178—191.)

Nach einer kurzen historischen Einleitung wird zunächst für den Zähler des aufsteigenden Kettenbruches

$$\frac{p_n}{q_n} = \cfrac{b_1 + \cfrac{b_2 + \cdots + \cfrac{b_n}{a_n}}{a_2}}{a_1}$$

das bestimmende System binomischer recurrirender Gleichungen aufgestellt; so findet sich

$$p_n = \begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 \ldots 0 & 0 \\ b_3 & 0 & a_3 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ b_{n-1} & 0 & 0 \ldots a_{n-1} & -1 \\ b_n & 0 & 0 \ldots 0 & a_n \end{vmatrix}, \quad q_n = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n .$$

Mit Hülfe dieser Formeln wird alsdann die Umwandlung eines aufsteigenden Kettenbruches in einen absteigenden gelehrt, und von der resultirenden Formel ein mehrfacher Gebrauch gemacht, indem erstens eine alternirende Reihe in einen Kettenbruch und ein solcher von bestimmter Form in ein Aggregat umgesetzt wird. Hierauf wird ein von F. Lucas ohne Beweis aufgestellter Satz verificirt und mit Hülfe desselben eine ganze Zahl durch einen Kettenbruch von beliebiger Gliederzahl dargestellt. Weiterhin wird der aufsteigende und im Anschluss an ihn auch der absteigende Kettenbruch von eingliedriger Periode summirt und ein Theorem von Siacci bewiesen. Der letzte Paragraph verallgemeinert den von Seidel eingeführten Begriff der Aequivalenz unendlicher Gebilde; dieser Begriff gestattet die Umformung einer convergirenden Potenzreihe in einen aufsteigenden und dann sofort wieder in einen absteigenden ebenfalls convergirenden Kettenbruch; als Beispiele sind die hypergeometrische und die Sinusreihe gewählt, für welch' letztere nahezu ohne alle Zwischenrechnung die elegante Beziehung

$$\sin x = x \mid 1! - (1!)^2 x^2 \mid (3! + 1! x^2) - (3!)^2 x^2 \mid (5! + 3! x^2) - \cdots$$

sich ergibt. Endlich wird noch eine Erweiterung des Aequivalenzbegriffes angedeutet und durch das Beispiel zweier unendlich fortlaufender Entwicklungen von der Beschaffenheit belegt, dass der $n$te Näherungswerth der einen dem 2^{n-1}ten der anderen jeweilig gleich ist.

München. S. Günther.

S. Günther: Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. (Leipzig 1876. Verlag v. B. G. Teubner.)

Da die sieben Kapitel, in welche dieses Werk zerfällt, sachlich nicht zusammenhängen, so geben wir ihre Analyse gesondert:

Kap. I. *Die geschichtliche Entwickelung der Lehre von den Sternpolygonen und Sternpolyëdern in der Neuzeit.* Es wird zunächst des Zusammenhanges wegen ein kurzes Resumé über diejenigen Resultate geliefert, welche sich dem Verf. bei einer (im 6. Jahrg. des Bulletino Boncompagni abgedruckten) Untersuchung über die Entwickelung des nämlichen Gegenstandes im Alterthum und Mittelalter ergeben hatten; diese Resultate lassen sich (S. 4) in folgende beide Sätze zusammendrängen: 1. „Man kannte um 1500 von Sternfiguren das sternförmige Fünfeck, die beiden Siebenecke, das Achteck und Neuneck, während zugleich unrichtigerweise auch ein Sternsechseck aufgezählt wurde, dem jedoch, aus zwei getrennten gleichseitigen Dreiecken bestehend, gerade die charakteristische Eigenschaft der Sternpolygone, sich in einem Zuge beschreiben zu lassen, abging". 2. „Man hatte angefangen, allgemeine Untersuchungen über die Winkelsumme der Sternpolygone anzustellen, und besass eine inductive Kenntniss der wichtigen Thatsache, dass in jedem Sternpolygon der höchsten Art diese Summe den constanten Werth 180° behauptet, ungerade Eckenzahl vorausgesetzt." Im Anschluss hieran werden die noch ziemlich unvollkommenen Darstellungen des Gegenstandes bei Lucas de Burgo, Bouvelles, Reysch, Barbaro, Peletier und Clavius besprochen, bis dann bei Petrus Ramus erstmalig die Auffassung des Pentagramms als eines Sternvielecks hervortritt. Nachdem in einem Schaltparagraph die mystischen Spielereien eines Paracelsus, Alsted und Kircher kurz berührt sind, lernen wir in Albert Girard einen genialen Geometer kennen, der zuerst zur Concipirung des allgemeinen Vielecksbegriffes durchgedrungen ist, während auf der anderen Seite Broscius noch in den antiken Anschauungen sich befangen zeigt, dabei aber doch die metrischen Relationen der Theorie beträchtlich erweitert. Die nächsten 5 Paragraphen beschäftigen sich ausschliesslich mit Kepler. Nachdem auf eine bislang in dieser Hinsicht unbeachtet gebliebene Stelle im „Mysterium cosmographicum" aufmerksam gemacht worden, beschäftigt sich die Darstellung ausführlich mit Kepler's schönen Arbeiten über Winkeltheilung, welche ihn zu einer eingehenden analytischen und geometrischen

Discussion aller Sternvielecke der ersten 15 Ordnungen veranlassten. Auch die eigenthümliche astrologische Deutung, welche der grosse Mann diesen Gebilden unterlegte, findet hier ihre Stelle; alsdann wird gezeigt, dass zwei Sternpolyëder — nach der Wiener'schen Terminologie das zwölfeckige und zwanzigeckige Sternzwölfflach — von Kepler aufgefunden und in ihrer wahren Natur erkannt worden sind; ein anderes, das sterneckige Zwölfflach, hatte schon ein Jahrhundert früher der Künstler Jamnitzer bemerkt. — Von Kepler springt die Erzählung mit Uebergehung eines Zeitraumes von 100 Jahren zu der schönen Abhandlung Meister's über, in welcher sich zuerst eine geschlossene auf kinematischer Basis aufgebaute Theorie der irregulären Vielecke im allgemeinsten Sinne des Wortes vorgetragen findet; an seine Neuerung knüpfen gewisse Bemerkungen von L'huilier, Gauss und Möbius an. Um alsdann den durch Poinsot eingeleiteten gewaltigen Fortschritt richtig zu würdigen, wird eine kurze Uebersicht über die Entwickelung der Stereometrie eingeschaltet, die natürlich durch zwei Marksteine, das durch Maurolycus zuerst erkannte und von Meister fortgebildete duale Princip und den Descartes-Euler'schen Satz, charakterisirt ist. Es folgt Poinsot, dessen zahlentheoretischer Erfindungsgang genau gekennzeichnet wird, während bei der Bildung der vier regelmässigen Polyëder von Sternform auch geometrische Betrachtungen nicht entbehrt werden konnten. Die Frage, ob ausser den vier von ihm entdeckten noch andere reguläre Sternvielflache existirten, ward von Poinsot unbeantwortet gelassen, von Cauchy aber aufs Einfachste im verneinenden Sinne erledigt. Eine isolirte Stellung nehmen die im Folgenden charakterisirten Leistungen dreier deutscher Mathematiker ein: Krause entwickelt eine kurze phoronomische Theorie der Sternpolygone als Theil seines geometrischen Hauptwerkes, E. Schröder sucht, gestützt auf das später sogenannte „Gesetz der Permanenz", die Lehre von den Sternvielecken in wesentlich neuer Art zu formuliren, und Jacobi gibt seine elegante Vorschrift zur Inhaltsbestimmung solcher Gebilde, die später von Hermes vervollkommnet wird. Während dann Bertrand den erwähnten Cauchy'schen Beweis durch einen übersichtlicheren ersetzt und Cayley die von Poinsot angedeutete Ausdehnung des Euler'schen Theoremes rectificirt, erscheint 1864 das zusammenfassende Werk Wiener's „Ueber Vielecke und Vielflache". Im Hinblick auf den durch diese Schrift markirten vorläufigen Abschluss fasst sich die fernere Darstellung kurz. Die Regeln von

Möbius zur Inhaltsbestimmung wie immer gestalteter Polygone und Polyëder werden ausführlich die planimetrischen Untersuchungen von Heinen, Druckenmüller, Unferdinger, Steinhauser, Muir und Pagni nur kurz erörtert; der letzte Paragraph beschäftigt sich mit den vielversprechenden Aussichten, welche durch die neuesten Arbeiten von Hessel und Hess über gleicheckige und gleichkantige Polygone, gleicheckige und gleichflächige Polyëder der allgemeinen Theorie der sternförmigen Gebilde eröffnet zu werden scheinen.

Dem Kapitel sind 6 Noten angehängt. Die erste gibt eine kurze Biographie des wackeren und viel zu wenig bekannten polnischen Geometers Brocki (Broscius), die zweite registrirt einige Fälle, in denen Sternvielflache „unbewusst" schon früher auftraten, die dritte handelt von einigen unvollkommenen älteren Methoden zur Inhaltsbestimmung der Sternvielecke. Während dann in der vierten und fünften bezüglich eine Anwendung dieser Gebilde in der „natürlichen Magie" und in der theoretischen Mechanik geschildert wird, finden in der letzten Gauss' pentagramma mysticum und die schöne Auflösungsmethode einer cubischen Gleichung ihren Platz, welche Clebsch im 4. Bande der „Mathem. Annalen" auf das gewöhnliche Pentalpha gegründet hat.

Kap. II. *Die Lehre von den aufsteigenden Kettenbrüchen in ihrer geschichtlichen Entwickelung.* Ein historischer Abriss des Auftretens der Reihe

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{b_i}{a_1 a_2 \ldots a_{i-1} a_i} \quad (n = 1, 2 \ldots \infty).$$

Das erste Auftreten dieser analytischen Form wird bei den Hebräern und Griechen, in gewissem Sinne auch schon bei den Aegyptern, signalisirt, indem nämlich all diesen Völkerschaften das Bestreben gemeinsam ist, complicirtere Brüche durch Zerlegung in Einheitsbrüche zu vermeiden. Nicht minder lässt sich die Minutienrechnung der Römer als Rechnung mit aufsteigenden Kettenbrüchen betrachten; aus Julius Frontinus und Victorius, welch letzterer

$$\left(1\frac{1}{4}\right)^2 = 1\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{2}}{}}{}$$

setzt, werden einige charakteristische Beispiele angeführt. Hierauf tritt die Darstellung in die Discussion des speciellen Falles eines constanten a ein, indem die beiden geschichtlichen Werthe $a = 60$ und $a = 10$ gesondert gefolgt werden. Es wird gezeigt, wie die

aller Wahrscheinlichkeit nach von den Chaldäern stammenden sechzigtheiligen Brüche die Grundlage des astronomischen Calculs der Griechen bildeten, wobei der hierauf bezüglichen Arbeiten von Theon, Barlaam und Maximus Planudes ausführlich gedacht wird. Der allgemeinste Fall der aufsteigenden Kettenbrüche tritt uns in der „Denominationsmethode" des Arabers Al Kalsadî und bereits in einem hohen Grade der Ausbildung bei Leonardo Fibonacci entgegen, um dann freilich für 5 Jahrhunderte fast ganz zu verschwinden. Es wendet sich desshalb die Darstellung nunmehr zur Entstehungsgeschichte der Decimalbrüche, welche zuerst bei Johannes Hispalensis auftreten und durch den Einfluss des Dioskurenpaares Peurbach-Regiomontan wenigstens auf trigonometrischem Gebiete die Alleinherrschaft erringen. Auf algebraischem gelangen sie zuerst bei Cardan zum Durchbruch, an dem sich dann Buckley, Stevin und Recorde anschliessen. Mit der durch Kepler zum wissenschaftlichen Gemeingute erhobenen abgekürzten Multiplication und Division verlässt die Schilderung dieses Specialkapitel, um sich nach einer kurzen Erwähnung der sogenannten „wälschen Praktik" den bahnbrechenden Arbeiten von Lagrange und Lambert zuzuwenden. Dieselben scheinen bislang dem mathematischen Publikum gänzlich unbekannt geblieben zu sein, obschon sie das höchste Intereses zu erregen geeignet scheinen. Lagrange entwickelt nämlich eine vollständige Theorie der aufsteigenden Kettenbrüche, in der sich u. a. bereits die Umwandlung solcher Formen in gewöhnliche Kettenbrüche, wenn schon noch nicht in expliciter Gestalt, vorfindet, Lambert dagegen fasst den Gegenstand mehr von der praktischen Seite auf, bemerkt aber dabei doch den theoretisch wichtigen Umstand, dass ein Bruch nur auf *eine* Weise in einen absteigenden Kettenbruch von reducirter Form, wohl aber auf unendlich viele Arten in solche aufsteigende Kettenbrüche transformirt werden kann. Besprochen werden weiter die Leistungen von Druckenmüller, Heiss, Matthiessen; als geschlossenen Wissenszweig behandeln unser Thema Kunze und Lemkes; den von Lagrange angedeuteten Fundamentalsatz stellt Schlömilch in entwickelter Gestalt hin. Das Kapitel schliesst mit der independenten Determinanten-Darstellung der Näherungswerthe eines aufsteigenden Kettenbruches.

Note 1 handelt von Leonardo's Verfahren, Brüche in Aggregate von Stammbrüchen umzusetzen, Note 2 von einer sonderbaren Bezeichnungsweise Michael Stifel's, Note 3 von dem Abriss der

römischen Bruchrechnung, welchen der Augsburger Arzt und Mathematiker Henisch noch im Jahre 1606 zu liefern für nöthig fand. In Note 4 wird die im Texte vorgetragene Thatsache, der zufolge Praetorius der eigentliche Erfinder der abgekürzten Decimalbruchrechnung gewesen sein soll, dahin corrigirt, dass mit Hinweis auf neuere erst während des Druckes bekannt gewordene Forschungen Rudolph Wolf's die Priorität für Bürgi in Anspruch genommen wird. Note 5 endlich gibt einige genauere Nachweisungen betreffs der wälschen Praktik und Note 6 eine gedrängte Analyse des für die Zahlentheorie hochwichtigen Werkes von Druckenmüller über „Kettenreihen“.

Kap. III. *Das Newton'sche Parallelogramm und die Cramer-Puiseux'sche Regel. Ein Beitrag zur Geschichte der Functionstheorie.* Das kräftige mechanische Hülfsmittel, welches Newton in seinem „Methodus fluxionum et serierum infinitarum‘ zur Reihenentwickelung impliciter Functionen angegeben hatte, war erst durch eine gelegentliche Bemerkung von Clebsch aus langer Vergessenheit hervorgezogen worden. Hier wird nun zuerst an einer Reihe von Beispielen gezeigt, wie Newton aus einer gegebenen algebraischen Gleichung zwischen x und y die eine unbekannte nach (ganzen oder gebrochenen) Potenzen der andern entwickeln lehrte. Sein Verfahren ward von Colson, S'Gravesande und Stirling aufgenommen, jedoch nicht eben wesentlich gefördert; in Deutschland fand es zuerst geringen Anklang. Erst Kästner brachte dasselbe durch seine sehr ausführliche Behandlung in Aufnahme; ihm zufolge schreibt man die verschiedenen in der Gleichung $f(x, y) = 0$ auftretenden Potenzen der Unbekannten in der hier angedeuteten Weise

$$\begin{array}{ccccc} x^3 & x^3y^1 & x^3y^2 & x^3y^3 & \dots \\ x^2 & x^2y^1 & x^2y^2 & x^2y^3 & \dots \\ x^1 & x^1y^1 & x^1y^2 & x^1y^3 & \dots \\ x^0 = y^0 & y^1 & y^2 & y^3 & \dots \end{array}$$

und verfährt dann weiter nach einem Satze, welchem wir (S. 147) nachstehende Fassung ertheilt haben: „Man wähle den auf der Ordinatenaxe dem Anfangspunkte zunächst liegenden Punkt zum Drehpunkte eines Lineales. Dann bewege man das Lineal so lange der Richtung des Uhrzeigers entgegen, bis er einen (oder mehrere) markirte Punkte trifft. Den entferntesten derselben mache man zum neuen Drehpunkt und fahre mit dieser Operation so lange fort,

bis man den am weitesten von der Ordinatenaxe entfernten Punkt trifft. Alle so erreichten Zahlenwerthe setze man einander gleich; jede der Gleichungen liefert einen brauchbaren Werth von $m - y$ provisorisch gleich ax^m gesetzt —, wofern die Reihe aufsteigen soll. Für absteigende Reihen verfahre man ebenso, indem nur der Drehsinn der entgegengesetzte wird; der Schlusspunkt der Drehung muss mit dem vorigen zusammenfallen, und es erscheinen so sämmtliche markirte Punkte durch ein geschlossenes Polygon von den übrigen abgeschieden." Bei der weiteren Erörterung werden auch die Commentare von Pfeiffer und Holland sowie auch im Anschluss an das Compendium von Hausen die Lehre von der allgemeinen Reihen-Reversion beigezogen. Zu derselben Zeit resp. etwas früher beschäftigten sich auch de Gua und Cramer mit diesen Fragen; aus dem grossen Werke des letzteren wird ein ausführlicher Auszug gegeben. Cramer wendet anstatt des Rechteckes ein dreieckiges Schema, das „triangle arithmétique" an und schreibt also:

$$\begin{matrix} y^3 & xy^2 & x^2y & x^3 \\ y^2 & xy & x^2 & \\ y & x & & \\ 1. & & & \end{matrix}$$

Dabei erreicht er ersichtlich den Vortheil, dass sämmtliche Glieder ein und derselben Horizontalen die gleiche Dimension besitzen. Im steten Anschluss an das Original wird nun gezeigt, wie Cramer mit Hülfe seines instrumentalen Verfahrens zwei der wichtigsten Probleme der Curvenlehre auflöst: Die Entscheidung des Charakters (ob parabolisch oder hyperbolisch etc.) der verschiedenen Curvenzweige einer- und die Feststellung von Kriterien für die merkwürdigen Curvenpunkte andererseits. Diese Methode Cramer's nahm genau ein Jahrhundert später Puiseux aus einem anscheinend ganz verschiedenen Gesichtspunkte wieder auf, indem er eine wichtige Frage der Functionenlehre behandelte. Die Gleichung $f(u, z) = 0$ führt er durch eine Substitution auf die Form

$$f(b + \beta, u + \alpha) \equiv A\beta^p + \Sigma B\beta^q\alpha^r = 0$$

über und sucht nun in dieser Gleichung die Glieder niedrigster Dimension zu separiren, was denn auch mit Hülfe des Newton-Cramer'schen Verfahrens leicht gelingt. Nachdem noch kurz von der ablehnenden Haltung Lagrange's gegen jene Methode die Rede gewesen, wird mit weniger Worten des in neuester Zeit sich anbahnenden Verschmelzungsprocesses zwischen Curventheorie und

Functionenlehre im Riemann'schen Sinne Erwähnung gethan. Ein Schlussparagraph gibt von den nur in sehr geringer Anzahl vorhandenen literarischen Hülfsmitteln Rechenschaft, welche bei Ausarbeitung des Kapitels zur Disposition standen.

In zwei sich anschliessenden Noten wird zuerst der höchst originellen Anwendung gedacht, welche in Taylor's „Methodus incrementorum" von der Newton'schen Regel auf die Behandlung totaler Differenzialgleichungen gemacht wird; an zweiter Stelle findet man eine Ehrenrettung Kästner's gegen die nicht immer gerechtfertigten Angriffe neuerer Mathematiker, — voran Hermann Hankel's.

Kap. IV. *Historische Studien über die magischen Quadrate.* Diese Studien beginnen mit der durch La Loubère's Vermittelung, dem Occidente zugekommenen indischen Methode zur Bildung der magischen Quadrate von ungerader Zellenzahl, deren angebliches hohes Alter allerdings durch keine triftigen Gründe bekräftigt wird. Die Methode wird beschrieben und ein Beweis dazu gegeben. Alsdann folgen die Araber, über deren desfallsige Bemühungen uns Ibn Khaldoun und die Schriften der „lauteren Brüder" einige freilich dem Mathematiker wenig genügende Nachweisungen aufbewahrt haben. In ein eigentlich wissenschaftliches Geleise tritt diese Disciplin erst mit der Specialabhandlung des — vermuthlich dem Beginne des 15. Säculums angehörigen — Byzantiners Manuel Moschopulos; diese Abhandlung wird wörtlich abgedruckt. In derselben finden sich zwei Vorschriften für die Quadrate von $(2n+1)^2$ und zwei andere für diejenigen von $(4n)^2$ Zellen; diese 4 Regeln werden discutirt und mit Beweisen versehen, welche auch zur Constatirung einiger nicht uninteressanter algebraischer Relationen führen. Im Abendland lässt sich ein — noch dazu ganz unvollständiges — Zauberquadrat erst 1515 in einem venetianischen Rechenbuche nachweisen, wenn man nicht das wahrscheinlich noch um ein Jahr früher enstandene Quadrat von 16 Zellen auf Dürer's bekanntem Stiche „die Melancholie" ausnimmt. Als astrologische Spielerei fassen diese Zahlenschemate Paracelsus und Agrippa v. Nettesheim, als arithmetisches Problem dagegen Adam Riese auf. Eine durchweg neue Bearbeitung fand hingegen unser Problem bei dem auch sonst hochberühmten Arithmetiker Michael Stifel, der den allmälichen Aufbau der magischen Quadrate von aussen her (durch sogenannte Umläufe) lehrte; da derselbe nach der Weise seiner Zeit die gegebenen Vorschriften weder allgemein fasst, noch auch beweist, so

musste ein eingehender Excurs über die Richtigkeit derselben wie auch über ihren eventuellen Ursprung, eingeschoben werden. Ebenso findet sich bei Stifel zuerst eine Ausdehnung, insofern nämlich Quadrate gebildet werden, bei welchen alle derselben Reihe angehörigen Zahlen ein constantes Product ergeben. Die an Stifel sich anschliessenden Namen, Spinola, Henisch, Lochner, Faulhaber, Remmelin sind mit Ausnahme des letztgenannten, dessen Träger die magischen Quadrate mit den Polygonalzahlen in Verbindung gesetzt zu haben scheint, ziemlich bedeutungslos. Dagegen tritt uns jetzt eine Reihe französischer Mathematiker entgegen, von denen jeder einzelne die in Rede stehende Lehre, sei es nach Form oder Inhalt, beträchtlich gefördert hat. Bachet de Méziriac verwandelt eine Regel des Moschopulos in die (in einem der vorstehenden Referate geschilderte) Terrassenmethode, Frénicle zieht den jener Methode zu Grunde liegenden weit allgemeineren Grundsatz ans Licht — dass man es nämlich nicht sowohl mit einem magischen Quadrate als vielmehr eigentlich mit einer magischen Kugel zu thun habe — und entwickelt neue elegante Regeln für geradzellige Quadrate, De la Hire und Sauveur lehren jedes Zauberquadrat allgemein bilden. Um nämlich ein Quadrat von n^2 Zellen zu erhalten, construiren sie zwei Quadrate der Art, dass in keiner Reihe jedes einzelnen die nämliche Zahl mehr als einmal vorkommt, in das erstere dagegen nur die Zahlen 0 bis n; in das zweite blos die Zahlen $1 . n$, $2 . n, \ldots n . n$ eingehen; haben dann homologe Zellen resp. die Zahlen p und q, so hat die entsprechende Zelle des Hauptquadrates durch die Zahl $(p + q)$ ausgefüllt zu werden. Auch berichtigt De la Hire einen Irrthum Poignard's. Es folgt weiter d'Ons-en-Bray, der aus einem vorliegenden magischen Quadrate durch „Ränderung" ein neues herstellen lehrt, und Rallier des Ourmes, der in ausführlicher und höchst eleganter Weise ein Resumé über alle bis zu seiner Zeit bekannt gewordenen Leistungen gibt. — Diesen Koryphäen Frankreichs stehen in Deutschland nur Kochanski's „Erfindung" sogenannter Subtractionsquadrate und die gelegentlichen Bemerkungen v. Claussberg's gleichzeitig gegenüber; in den sechziger Jahren erscheint dann freilich Leonhard Euler's grosse — leider geradezu unbekannt gebliebene — Abhandlung, welche allerdings über ihren eigentlichen Vorwurf sehr bald hinausgeht und desshalb hier verhältnissmässig kurz bedacht werden musste. Nachdem weiter von Franclin's Construction $(4n)^2$-zelliger Quadrate und seinen magischen Kreisen wie von den fläch-

tigen Andeutungen Vieth's und Lorenz's die Rede gewesen, findet die Erzählung in Mollweide's compendiöser „Dissertatio de quadratis magicis“ ihren Uebergangspunkt zur neuesten Zeit. Der praktischen Bücher von Hohndell und Zuckermandel wird nur kurz, der grösseren Schrift von Hugel und der Aufsätze von Drach, Horner und Thomschon ausführlicher gedacht, obgleich diese letzteren eigentlich nur Fortführungen des Sauveur'schen Grundgedankens darbieten. Eine Analyse des interessanten Programms von v. Pessl, in welchem zur Vermeidung naheliegender Inconsequenzen dem magischen Quadrate der magische Cylinder substituirt wird, beschliesst das Kapitel, welchem sich 6 Noten anreihen.

Note 1 bespricht eine vermuthlich auf magische Quadrate hindeutende Schachaufgabe aus einem arabischen Autor, Note 2 sucht die Lebenszeit des Moschopulos zu fixiren, Note 3 gibt die kritischen Nachweisungen zu dem in der Arbeit abgedruckten Texte jenes Schriftstellers, Note 4 erwähnt einiger magischer und numismatischer Anwendungen der Zauberquadrate, Note 5 weist die von Einzelnen hervorgehobene Aehnlichkeit zwischen dem den magischen Quadraten zu Grunde liegenden algebraischen Probleme und den Euler'schen Sätzen über die 9 Richtungscosinus als nicht bestehend zurück. Note 6 endlich bespricht die mit Erfolg gekrönten Bemühungen von Wenzelides, magische und zugleich symmetrische Rösselsprünge anzufertigen, und erörtert die Frage, ob und wie man eventuell rein theoretisch diese Aufgabe in Angriff nehmen könne.

Kap. V. *Skizzen aus der Logarithmotechnie des siebzehnten und achtzehnten Jahrhunderts.* Es wird hier zunächst Klage darüber erhoben, dass die unrichtige Behauptung von einer Identität der Napier'schen und der sogenannten natürlichen Logarithmen selbst bei Leuten, wo man dergleichen nicht erwarten sollte, wie Montucla, Morgan, Hoefer sich vorfindet und überhaupt immer wieder auftaucht. So hat z. B. ganz kürzlich Dubois einer die Sache ganz correct behandelnden Untersuchung Wackerbarth's den ungerechtfertigsten Widerspruch gegenüber gestellt. Hier wird nun gezeigt, wie schon lange Zeit vor Wackerbarth jene Frage zum Austrag kam; Kästner und Karsten disputirten über dieselbe, Gehler schrieb eine eigene Schrift darüber, Biot, an den sich Bernhard anschloss, stellte den Streitpunkt ausser allen Zweifel. — Weiterhin wird die schöne Methode besprochen, welche der Berliner Astronom Jean Bernoulli zur Bestimmung der sogenannten Pro-

portionaltheile in Vorschlag brachte, und welche auf einer für jene Epoche höchst bemerkenswerthen Ausnützung der Kettenbrüche beruhte. — Drittens: Eine kurze Geschichte derjenigen Versuche, welche schon vor Gauss den schwachen Punkt der logarithmischen Rechnung — Unanwendbarkeit bei Additionen und Subtraktionen — zu beseitigen bestimmt waren. Nachdem von den desfallsigen Bemühungen Leonelli's und A. v. Humboldt's gesprochen ist, verweilt die Darstellung ausführlicher bei den anscheinend ganz in Vergessenheit gerathenen goniometrischen Methoden von Muschelius v. Moschau, Christian Wolf und Delambre, deren Werth sowohl gegenseitig als auch in ihrem Verhältniss zu der Neuerung der Gauss'schen Logarithmen abgewogen wird.

Note 1 behandelt die Manier Biots, durch Reihenentwicklung zu Napier's Endformel zu gelangen, Note 2 bespricht Ludlam's Verwendung der Euler'schen Kettenbruch-Algorithmen zu optischen Zwecken, Note 3 einige geometrische Versuche des obengenannten schlesischen Mathematikers Muschel, Note 4 erwähnt eines Versuches des Erlanger Professors Poezinger, aus den Logarithmen von $(x + 1)$ denjenigen von x selbst zu finden.

Kap. VI. *Zur Geschichte der jüdischen Astronomie im Mittelalter.* Vorliegendes Kapitel ist im wesentlichen eine Widerlegung eines Ausspruches von C. v. Littrow. Derselbe hatte nämlich in seinem Schriftchen „Ueber das Zurückbleiben der Alten in den Naturwissenschaften“ von einer „Formel“ gesprochen, welche der jüdische Polyhistor Maimonides für das den Monatsanfang rituell bedingende Erscheinen der Mondessichel vorgetragen haben soll — ein Factum, das, wenn richtig, für die Geschichte der mittelalterlichen Mathematik selbstverständlich von der höchsten Bedeutung sein würde. Um einen Einblick in die Verhältnisse zu erhalten, bedarf es natürlich genauer Kenntniss der hebräischen Chronologie, welche denn auch in der That durch eine unlängst erschienene Monographie von Schwarz in bequemer Weise vermittelt wird. Ehe jedoch die fernere Darstellung auf diese sich stützen darf, müssen einige von bedeutenden Fachmännern — Slonimski und Steinschneider — gegen dieselbe geltend gemachte Bedenken gewürdigt werden. Obgleich an eine sachgemässe Kritik solch' penibler Detailfragen nicht gedacht werden kann, ergibt sich doch die Gewissheit, dass zu dem hier angestrebten Zwecke unbedenklich auf das Schwarz'sche Werk zurückgegriffen werden dürfe. An der Hand desselben wie auch anderer Quellen wird dann jene Meinung Littrow's als eine völlig

haltlose erkannt; es liegt derselben eine Verwechselung zweier den jüdischen Astronomen eigenthümlicher unter sich aber total verschiedener Verfahrungsweisen zu Grunde.

Eine Note beschäftigt sich mit einem neuen Angriffe gegen Schwarz, der jedoch viel zu wenig sachlich erscheint, um ernsthaftere Erwägung nothwendig zu machen.

Kap. VII. *Quellenmässige Darstellung der Erfindungsgeschichte der Pendeluhr bis auf Huyghens.* So oft auch schon die Frage nach dem eigentlichen Erfinder dieses hochwichtigen Instrumentes ventilirt worden, so hat man es doch durchweg versäumt, eine unendlich fleissige Quellenarbeit des bekannten holländischen Mathematikers van Swinden gebührend zu berücksichtigen. Dies wird hier, natürlich unter steter Beiziehung neuerer Untersuchungen, nachgeholt. Es zeigt sich, dass von den Prioritätsansprüchen der Engländer Harris und Hooke wie auch des Italieners Sanctorius nicht wohl im Ernste gesprochen werden kann, dass vielmehr ausser Huyghens nur folgende drei Candidaten in Frage kommen können: Galilei, Jobst Bürgi, Johann Hevelius. Mit Bezugnahme auf den Briefwechsel des Ersteren wird nun gezeigt, dass er allerdings ein — noch heutzutage in Florenz befindliches — Modell angefertigt habe oder, was wahrscheinlicher ist, durch seinen Sohn Vincenz habe anfertigen lassen, bei dem jedoch nur die Uebertragung der Bewegung auf ein Zeigerwerk von der Maschine selbst besorgt wurde, während das Pendel durch menschliche Beihülfe in Bewegung erhalten werden musste. Dass Galilei trotz allen Nachsinnens mit einer Beseitigung dieses letztgenannten Uebelstandes nicht mehr zu Stande gekommen sei, erscheint sicher. — Von Bürgi hatte es in letzter Zeit R. Wolf sehr wahrscheinlich gemacht, dass ihm die Verfertigung einer wirklichen Pendeluhr gelungen sei, wobei er sich auf ein der Wiener Schatzkammer angehöriges und muthmasslich von dem Hofmechaniker Rudolph's II. herrührendes Exemplar eines solchen Zeitmessers berufen konnte. Allein die von van Swinden diplomatisch erhärtete Thatsache, dass man am Ende des siebzehnten Jahrhunderts mit Vorliebe aus älteren Uhren die Unruhe entfernt und ohne sonst etwas zu verändern statt ihrer ein Pendel eingehängt habe, macht Wolf's an sich höchst plausibel erscheinende Deduction illusorisch. — Was schliesslich Hevel anlangt, so unterliegt es kaum einem Zweifel, dass er die von allen praktischen Astronomen seiner Zeit geübte primitive Methode der Zeitbestimmung durch eine automatisch arbeitende Pendeluhr zu verbessern sich bestrebte und

zu der Zeit, als Huyghens ihm den glücklichen Erfolg seiner Mühe brieflich mittheilte, bereits zu einer partiellen Realisirung seiner Idee durchgedrungen war. Eine eigentliche Pendeluhr hat aber auch er nicht erfunden, und es bleibt so Huyghens der hohe Ruhm seiner genialen Neuerung ohne jede Einschränkung erhalten.

Note 1 bespricht die Beziehung der Pendeluhren zu dem sogenannten „Uhrengleichniss", Note 2 gibt eine Bemerkung Nelli's über Sanctorius. In der dritten Note wird nach den Aufklärungen von Reusch gezeigt, wie nicht sowohl Gründe wissenschaftlicher Natur als vielmehr die verdächtige Haltung des Vatikans dem Briefwechsel Galilei's mit Holland so rasch eine Grenze setzten. Note 4 handelt von den oben namhaft gemachten Pendelbeobachtungen der Astronomen, Note 5 gibt einen Auszug aus einer jüngst publicirten und für die Geschichte der Pendeluhr bedeutsamen Studie von Studnička über den böhmischen Mechaniker Marek. In Note 6 endlich wird nachgewiesen, dass die Hypothese Veladini's, wie Galilei doch noch an seinem Modell eine Hemmungsvorrichtung angebracht habe, an sich zwar sehr geistreich sei, dem geschichtlichen Sachverhalte aber keineswegs entspreche.

München. S. Günther.

Rudolf Wolf: Astronomische Mittheilungen Nr. 1—40. (Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich 1856—1876.)

Beim Abschlusse der vierten Decade meiner „Astronomischen Mittheilungen" dürfte es eine gewisse Berechtigung haben, einen kurzen Rückblick auf Entstehung und Inhalt derselben zu werfen. — Die erste Veranlassung zu dieser, nunmehr bald volle 100 Octavbogen füllenden Publication war folgende: Als ich 1852 in den Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Bern die Abhandlung „Neue Untersuchungen über die Periode der Sonnenflecken und ihre Bedeutung" veröffentlicht, und darin den Nachweis geleistet hatte, dass die von Schwabe aus seinen Beobachtungen wahrscheinlich gemachte Periodicität in der Häufigkeit der Sonnenflecken wirklich bestehe, ja sich rückwärts bis auf die Zeit der Entdeckung der Sonnenflecken verfolgen lasse, — dass die Sonnenfleckencurve jederzeit mit der Curve der magnetischen Declinations-Variationen parallel gelaufen sei, — dass die gemeinschaftliche mitt-

lere Länge der beiden Perioden aber nicht nur, wie Schwabe, Sabine und Lamont gemeint hatten, etwas mehr als 10 Jahre, sondern volle $11^1/_9$ Jahre betrage, — dass die Sonne zu den veränderlichen Sternen zu gehören scheine, — dass die Fleckenmaxima auf Jahre häufiger Nordlichter und Erdbeben fallen dürften, — und dergleichen, so wurden die Resultate meiner Untersuchungen vielerorts noch mit einem gewissen Misstrauen aufgenommen. Dies war der nächste Grund, dass ich mich 1856 bei Uebernahme der Redaction der Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich alsbald entschloss in einer Reihe von Artikeln theils die seitherigen Beobachtungen und Untersuchungen zu publiciren, theils namentlich auch die von mir bereits benutzten oder noch weiter erhältlichen Materialien aus älterer Zeit als eine Art Sonnenflecken-Literatur öffentlich vorzutragen. Als sodann später die eidgenössische Sternwarte gebaut und wenigstens soweit ausgerüstet wurde, dass auch andere Beobachtungen und Untersuchungen von wissenschaftlichem Werthe gemacht werden konnten, — als es mir gelang eine kleine historische Sammlung auf derselben anzulegen, — als mir einige Collegen und frühere Schüler in freundlicher Weise verwandte Arbeiten zur Publication übergaben, — als ich zu verschiedenen Vorträgen und historischen Arbeiten Veranlassung erhielt, die sich ebenfalls zur Aufnahme zu eignen schienen, — etc., erweiterte sich nach und nach das Gebiet meiner Mittheilungen, wenn auch der ursprüngliche Gegenstand immer noch dominirte. — Um nun auf den Inhalt dieser Mittheilungen einzutreten, so ist zunächst zu erwähnen, dass sie meine täglichen Zählungen der Sonnenflecken für die Jahre 1849—1875 geben, jeweilen für trübe Tage aus den Beobachtungsregistern der Herren Schwabe in Dessau, Weber in Peckeloh, Schmidt in Athen, etc., möglichst ergänzt, — früher je zwei Zahlen g und f, von denen die erste je die Anzahl der an dem betreffenden Tage sichtbaren Gruppen, die zweite aber die Anzahl der in diesen Gruppen auftretenden Flecken und Punkte gab, — später ausserdem noch die aus ihnen nach der Formel

$$r = k(g + 10 . f)$$

berechneten sog. Relativzahlen, wo k ein correspondirenden Beobachtungen entnommener, von Beobachter und Instrument abhängiger, für mich bei einem Vierfüsser mit 64facher Vergrösserung der Einheit gleicher Erfahrungsfactor ist, — sowie die Monats- und Jahresmittel dieser Relativzahlen. — Im Fernern geben die Mittheilungen in Verbindung mit der bis jetzt 343 Nummern zählen-

den Sonnenfleckenliteratur nicht nur die Belege für die oben erwähnten Aufzählungen, sondern auch eine Uebersicht aller mir zugänglichen älteren Beobachtungen der Sonnenflecken, — darunter viele Reihen früher nicht publicirter Aufzeichnungen, von welch letztern hier namentlich die Serien

Harriot. . . .	1611—1613	Heinrich . . .	1781—1818
Kirch	1700—1748	Flaugergues . .	1788—1830
Plantade . . .	1705—1726	Tevel	1816—1836
Hagen	1739—1751	Pastorff . . .	1819—1833
Staudacher . .	1749—1799	Adams	1819—1823
Horrebow. . .	1767—1776	Both.	1825—1826
Mallet	1773—1777	Schwabe . . .	1826—1848
Bode.	1774—1822	etc.	

erwähnt werden mögen, welche ich theils durch meine Freunde und Mitarbeiter im Auszuge erhielt, theils durch Uebersendung der betreffenden Manuscripte selbst auszuziehen im Falle war. — Um die theils bereits früher gedruckten, theils von mir neu publicirten Reihen, welche doch immerhin (abgesehen von vielen brauchbaren Bemerkungen) für die Jahre 1749—1848 im Ganzen für volle 13424 Tage wirkliche Fleckenzählungen ergaben, zu einem homogenen Ganzen zu verarbeiten, leisteten die von mir schon 1850 eingeführten, bereits oben erwähnten Relativzahlen ausgezeichnete Hülfe, und es wurde mir möglich nicht nur für mehr als $2^1/_2$ Jahrhunderte alle Epochen der Maxima und Minima festzulegen, sondern auch für die zweite Hälfte dieser Zeit homogene mittlere Relativzahlen abzuleiten, und so z. B. die folgende Tafel zu erstellen:

Aeltere Reihe				Neuere Reihe				
Minima		Maxima		Minima		Maxima		Wellenhöhe
1610,8		1615,5		1745,0		1750,3		—
1619,0	8,2	1626,0	10,5	1755,2	10,2	1761,5	11,2	78,1
1634,0	15,0	1639,5	13,5	1766,5	11,3	1769,7	8,2	104,7
1645,0	11,0	1649,0	9,5	1775,5	9,0	1788,4	8,7	151,3
1655,0	10,0	1660,0	11,0	1784,7	9,2	1798,1	9,7	132,7
1666,0	11,0	1675,0	15,0	1798,3	13,6	1804,2	16,1	72,5
1679,5	13,5	1685,0	10,0	1810,6	12,3	1816,4	12,2	49,2
1689,5	10,0	1693,0	8,0	1823,3	12,7	1829,9	13,5	71,4
1698,0	8,5	1705,5	12,5	1833,9	10,6	1837,2	7,3	139,6
1712,0	14,0	1718,2	12,7	1843,5	9,6	1848,1	10,9	121,1
1723,5	11,5	1727,5	9,3	1856,0	12,5	1860,1	12,0	94,7
1734,0	10,5	1738,7	11,2	1867,2	11,2	1870,6	10,5	135,3
Mittel	11,20		11,20		11,11		10,94	104,60
	$\pm$ 2,11		$\pm$ 2,06		$\pm$ 1,54		$\pm$ 2,52	$\pm$ 33,45

wo die unter Wellenhöhe eingeschriebene Zahl die Differenz der Relativzahlen des Minimums und Maximums ist, und die den Mittelwerthen in $\pm$ beigefügten Zahlen ihre, entsprechend den mittleren Fehlern berechneten *Schwankungen* geben. Das Gesammtmittel aller 44 Bestimmungen für die Länge der Periode beträgt

$$11{,}111 \pm 2{,}030$$

so dass für die mittlere Länge der Periode immer noch der 1852 erhaltene Werth zu Recht besteht, dagegen als neueres Ergebniss hinzutritt, dass derselbe in der einzelnen Erscheinung etwa zwischen

9,08 und 13,14

schwankt, wofür in der That auch noch die zuverlässigsten Bestimmungen der neuesten Zeit Belege bieten, da gerade jetzt ein Minimum entweder schon eingetreten ist oder in nächster Zeit eintreten wird, obschon seit dem letzten Minimum erst 9,3 Jahre verflossen sind, während dem Minimum von 1843 erst in 12,5 Jahren das Minimum von 1856 folgte. Für die mittlern Epochen für Minimum und Maximum erhält man aus dem zweiten Theile der Epochentafel

1810,53 und 1815,10

woraus hinwieder hervorgeht, dass durchschnittlich einem Minimum in $4\frac{1}{2}$ Jahren ein Maximum, diesem dagegen erst in $6\frac{1}{2}$ Jahren ein neues Minimum folgt, — also die Sonnenfleckencurve wesentlich rascher ansteigt als abfällt. — Die sich anlehnenden Untersuchungen über die in gewissen Zacken der Sonnenfleckencurve angedeuteten Gesetze, — über kleinere und grössere, z. B. gewissen Planetenjahren entsprechende, der Hauptperiode untergeordnete und muthmasslich ihre Schwankungen bedingende Perioden, — über die Möglichkeit die Sonnenfleckencurve durch eine Formel darzustellen, oder die sämmtlichen Epochen aus den Normalepochen abzuleiten, — etc. dürfte es genügen nur beiläufig zu erwähnen, da sie bis jetzt noch nicht zu abschliessenden Resultaten geführt haben; dagegen ist hervorzuheben, wie es mir 1859 nicht nur gelang nachzuweisen, dass der von Carrington bei dem Minimum von 1856 bemerkte, scheinbar sprungweise Wechsel in der heliocentrischen Breite der Flecken auch bei dem durch Böhm beobachteten Minimum von 1834 in ähnlicher Weise stattfand, sondern dass ich durch Zusammenstellung aller bekannt gewordenen Bestimmungen über die Rotationsdauer der Sonne dieses Gesetz mit dem durch Carrington und Spörer aufgefundenen Zusammenhang zwischen Breite der Flecken

und Ergebniss für Rotationszeit in Verbindung brachte. — Von noch grösserer Bedeutung sind die fortgesetzten Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen der Häufigkeit der Sonnenflecken und der Grösse der täglichen Bewegungen der Magnetnadel. Namentlich gelang es mir von 1859 hinweg an vielfachen Beispielen zu zeigen, dass sich die mittlere magnetische Declinationsvariation v durch die einer einfachen Scalenreduction entsprechende Formel

$$v = a + b \, . \, r$$

aus der entsprechenden Sonnenfleckenrelativzahl r berechnen lasse, — dass in dieser Formel der Werth von b, wenigstens für das ganze mittlere Europa, nahe an 0,045 falle, a dagegen für verschiedene Orte wesentlich verschiedene Werthe besitze, so z. B. gegenwärtig für

Barnaoul	$a = 2',74$	München	$a = 6',56$
Berlin	6,64	Paris	9,28
Christiania	4,62	Peking	2,69
Göttingen	7,89	Petersburg	5,89
Kremsmünster	5,83	Prag	5,89
London	6,96	Toronto	7,72
Mailand	5,62	Wien	4,79
Mannheim	5,68	etc.	

betrage, — nahe wie wenn a von der Lage des betreffenden Ortes gegen den magnetischen Hauptpol abhängig wäre. — Ein von mir 1857 angelegter und seither durch meinen Collegen Fritz mit unsäglicher Mühe vervollständigter Nordlicht-Catalog ergab eine merkwürdige Bestätigung für das von mir schon 1852 vermuthete Zusammentreffen von Flecken- und Nordlicht-Häufigkeit, — während dagegen allerdings die Versuche, welche theils ich selbst, theils die Herschel, Gautier, Fritzsch, Köppen, Meldrum, Klein, etc. machten den Sonnenfleckenwechsel auch in den Erdtemperaturen, Regenmengen, Cyclonen, Cirruswolken, etc. nachzuweisen, bis jetzt nur theilweisen Erfolg hatten, aber doch immerhin zur genauern Kenntniss mehrerer Anomalien führten, die in der Folge eine nicht unbedeutende Rolle spielen dürften. — Noch könnte mehrerer in meinen Mittheilungen enthaltener Specialuntersuchungen über die zuweilen in der Richtung nach der Sonne hin sichtbaren sog. Lichtflocken, über die Durchgänge anderer fremder Körper durch die Sonne, etc. gedacht werden; es ist jedoch, wenn dieser Rückblick nicht eine unerlaubte Länge erhalten soll, an der Zeit das Haupt-

gebiet zu verlassen, und noch einiges Andere kurz zu erwähnen, das ebenfalls Gegenstand meiner Mittheilungen bildete: Bei Anlass des 1863/4 erfolgten Bezuges der neuen eidgen. Sternwarte gab ich eine kurze Geschichte der ältern Sternwarten Zürichs, und beschrieb den Neubau, sowie seine Ausrüstung; seither fügte ich von Zeit zu Zeit Bruchstücke eines räsonnirenden Verzeichnisses der durch Ankauf und Schenkung bereits nicht unbedeutend gewordenen Sammlung von Instrumenten, Apparaten und Abbildungen bei, das für Liebhaber der Geschichte nicht ohne Interesse sein dürfte. Letztere finden auch in den Mittheilungen ziemlich ausgedehnte historische Studien über die Herschel, Zach, Schwabe, Schweizer, — über den immerwährenden Kalender Regiomontans, die sog. Prostaphäresis, den Bürgi'schen Canon Sinuum, die Erfindung der Mikrometer, Transversalen, Vernier's und Pendeluhren, etc. — während sich die praktischen Astronomen an die vorläufigen Mittheilungen über die geographische Lage der Sternwarte halten können, ferner an die im Detail gegebenen Untersuchungen über den Einfluss der Ocularstellung und Fadenbeleuchtung auf die Personalgleichung, an die Beschreibung des Hipp'schen Pendels und seinen Gebrauch zur Bestimmung der Personalcorrection, etc., — und die zahlreichen Freunde der Hypsometrie mehrere Vergleichungsreihen gewöhnlicher Barometer und Aneroide finden, welche ihnen Aufschluss über die Constanz der Letzteren und ihr Verhalten auf Bergreisen geben. — Zum Schlusse habe ich noch beizufügen, dass die Mittheilungen ausser meinen eigenen und den bereits erwähnten Arbeiten von Fritz auch noch einige andere Einsendungen enthalten, so namentlich mehrere einlässliche Studien von Weilemann über die Refraction und über die Beziehungen zwischen Barometerstand, Temperatur und Höhe in der Atmosphäre, — und eine längere Arbeit von W. Meyer über die Geschichte der Messung und Berechnung der Doppelsterne, die zugleich eine Reihe von ihm am Zürcher Refractor ausgeführter Bestimmungen enthält. Ueber verschiedene grössere, und ziemlich wichtige Resultate versprechende Untersuchungen, die ich schon seit einiger Zeit theils zur weiteren Verwerthung meines Sonnenflecken- und Variations-Materiales, theils zur Ausnutzung längerer Beobachtungsreihen am Zürcher Meridiankreise, in Arbeit genommen und für eine neue Decade der Mittheilungen bestimmt habe, werde ich, so Gott will, später Bericht erstatten.

Zürich. Rudolf Wolf.

Carlo Malagola: Dei documenti trovati ultimamente intorno la dimora di Nicolò Copernico in Bologna.

. . . .

. . . Una parte dei documenti, che io scopersi nell' Archivio di famiglia del Sigr. Conte Comm. Giovanni Malvezzi de' Medici, Senatore del Regno, riguarda il sommo Copernico, l'altra le persone che con lui ebbero relazione in Bologna, e massime il fratel suo Andrea, lo zio materno Luca Watzelrode, vescovo di Warmia e singolar protettore dell' astronomo immortale, Alberto Bischoff e Fabiano de Lusianis, canonici varmiensi e colleghi di Nicolò, Erasmo de Beke, egli pure canonico di Warmia, Scipione dal Ferro, maestro di aritmetica e geometria nel nostro famosissimo Studio, e l'astronomo Domenico Maria Novara, il nome del quale è strettissimamente congiunto a quello dello scopritore del vero sistema dell' Universo.

Il periodo di tempo che il celebre polacco passò in Italia, e massimamente in Bologna, rimase sino ad ora pieno di forti incertezze e di oscurità, perchè non conoscendosi di quello che tre notizie autentiche, gli scrittori furon costretti a vagare sopra supposizioni. Ora l'essere stati i documenti scoperti da me i primi che siensi trovati intorno all' immortale astronomo in Italia, è ciò che da loro una qualche importanza, la quale è forse accresciuta dalle molte notizie su quel tempo della vita del Copernico, in cui fu allo Studio di Bologna, che possono ricavarsi da questi documenti, interpretandoli cogli statuti del 1491 della *Nazione* Allemanna presso il nostro Studio, alla quale Nicolò appartenne. Appunto per questo il Prof. Massimiliano Curtze, illustre scrittore, ed editore delle opere del grande torunese, annunziando all' Imp. Società Copernicana di Scienze ed Arti di Thorn, in Prussia, la scoperta di questi documenti, giudicava che apportassero tal copia di notizie sul periodo sopradetto, quale non avemmo sinora di nessun altro della vita di questo grand'uomo. Tra le molte notizie di lui, non prima conosciute, mi sembrano da notare queste principalmente:

1º) che Nicolò già si trovava nella nostra città nell 1496, mentre prima non s'aveva memoria di lui in Bologna che del 1497;

2º) che in questa nostra città nel 1496 si ascrisse alla Nazione Allemanna e che perciò diede opera nel nostro Studio alle leggi, dovendo quelli che vi si aggregavano essere in forza degli statuti, „*in hac alma urbe studentes in iure canonico vel civili*";

3º) che il Copernico in Bologna non fu laureato dottore di Diritto Canonico, siccome da molti si è creduto. Tralascio di annoverare le molte altre cose principali giacchè anche di esse parlerò diffusamente ove pubblicherò i citati documenti intorno a Nicolò Copernico. Gli altri che più sopra ricordai, porgono molte e sicure notizie delle persone che in Bologna ebbero relazione col Copernico, di alcune delle quali si aveva appena memoria, di altre neppure era conosciuto il nome.

Ho pur cercato di dare, nel libro dove stamperò questi documenti, un idea di Bologna alla fine del secolo XV., ed anche volli aggiungere nuove notizie sull' ellenismo in Bologna sino a tutto il secolo XVI, e la storia della *Nazione* Allemanna dal 1200 in poi alla quale appartenne il fiore degli illustri Tedeschi di quel tempo. Fra essi, a cagione d' esempio, voglio ricordare il Cardinale Nicolò da Cusa (di cui produrrò in luce le autentiche memorie, che potei rinvenire) stimato il predecessore del Copernico nell' idea del moto della terra. Il libro dove usciranno in luce tutti questi documenti insieme a molti altri che riguardano Bartolomeo Barbazza, Nicolò Leoniceno, il Beroaldo seniore, Gian Battista Guarino, Francesco Filelfo e Antonio Urceo Codro (del quale anche trovai volgarizzamenti inediti dal greco e molte edizioni di opere rarissime e sconosciute) sarà fra breve pubblicato dagli editori bolognesi Fava e Garagnani in un volume di più che 500 pagine in 8º al prezzo di L 12, col titolo „*Della Vita e delle Opere di Antonio Urceo Codro, maestro di greco in Bologna a Nicolò Copernico*".

Bologna. Carlo Malagola.

Conte Nerio Malvezzi: Lettere d' illustri astronomi (Kepler, Tycho Brahé etc.) trovate in Bologna.

Nell' Archivio di mio padre Conte Giovanni Malvezzi de' Medici, Senatore del Regno, trovai un fascicolo contenente moltissime lettere dirette da celebri astronomi nel finire del sedicesimo, e sul principiare del diciassettesimo secolo a Giovanni Antonio Magini padovano e professore per molti anni nella Università di Bologna. Non occorreranno molte parole a dimostrare l'importanza per la storia dell' astronomia delle lettere rinvenute, poichè a ciò bastano i nomi dei loro autori, Tycho Brahé, Kepler, Scheiner, Malcot, Van Roomen, più conosciuto sotto il nome di Adriano Ro-

mano, Cristoforo Clavio, Giovanni Lheureux noto col nome di Macario, Muzio Oddi, Francesco Stelluti, Altobelli, Finck, e molti altri illustri scienziati e matematici italiani, tedeschi inglesi di quei tempi.

Alcune lettere contengono figure geometriche, e tra le altre quelle di Muzio Oddi, e dello Stelluti, ed in parecchie si leggono lunghi calcoli astrologici ed astronomici.

Le lettere di Tycho Brahé sono assai lunghe e contengono interessanti particolari della sua vita privata e scientifica. Una di esse dev' essere tra le ultime dettate dall' astronomo, poichè porta la data del 1601, anno in cui avvenne la morte di lui in Praga.

Le lettere di Kepler meritano molta attenzione in quanto chiariscono alcuni punti della sua vita famigliare. Esse furono scritte nel 1610, allorquando il sommo astronomo aveva terminati gli studi sovra il pianeta Marte, e stava lavorando col valido sussidio delle carte e degl' istrumenti del celebre Tycho alla compilazione delle tavole rodolfine.

Noterò che se le lettere Kepleriane non varranno ad accrescere la fama del loro autore, che già pervenne alla massima altezza, gioveranno al maggiore onore dell' astronomo padovano, e quindi della Università bolognese in cui questi per ben ventinove anni lesse astronomia. Imperocchè Kepler chiese a lui molti consigli nella compilazione della sua opera sopra Marte, e sembra ancora la inviasse a Bologna. „Obsecro propter nostra studia“ scrive Kepler al Magini, „ut eadem lima totum (opus) percurras“ e finisce la lettera dicendo: „vale, vir celeberrime, et perge censendo mihi prodesse“. Queste parole, pure considerando lo stile ampolloso del seicento, bastano a provare in quanta stima fosse dal sommo scienziato tenuto il nostro Magini. Si può parimente confermare nel modo più sicuro ciò che scrisse il Weidler, nella sua Historia Astronomica, intorno all' invito fatto da Kepler al Magini di andare in Germania ad aiutarlo nella compilazione delle tavole rodolfine. Si può argomentare che Kepler avesse avuto in animo di far stampare qualche sua opera a Bologna, e certamente che viveva in grandissima penuria. Spesso egli insiste sulle difficoltà della vita, che a lui tolgono, come esprimesi, la tranquilla serenità della mente. E ben si comprende come di essa non potesse godere, se, come egli scrive, fortemente pativa di fame! Aggiungerò che presso le lettere Kepleriane stanno le bozze delle risposte del

Magini; fortunata combinazione che aiuterà a meglio chiarire le relazioni corse tra i due scienziati, tanto più che nell' opera di Hansch „Epistolae ad Kepplerum etc. Lipsiae 1718" non trovasi alcuna lettera del Magini.

Una lettera del dotto Scheiner da Ingolstadt 1613 tratta della famosa questione di priorità agitata tra lui e Galileo sopra la scoperta delle macchie solari, e si rileva che il Magini prese le parti di Scheiner.

Le lettere di Cristoforo Clavio accennano alle fiere dispute che questi ebbi collo Scaligero, che viene chiamato „arrogantissimo nelle sua falsità".

Interessantissima è una lettera di Muzio Oddi, del valentissimo ed infelice geometra, ed elegante scrittore, che passò tanti anni in carcere nel castello di Pesaro, e mai cessò tra le angoscie della prigionia gli studii. La lettera è del 1609 anno in cui il carcere fu mutato in esiglio ed andò ad insegnare matematiche a Milano. Scrive gli: „Giunsi finalmente a Milano, luogo del mio confino, „dove con la grazia d'Iddio pare che l'aria mi conferisca, e tut- „tavia mi pare di ripigliare forze e migliorar la complessione. „Vedrò se posso ordinare un poco le cose mie e buscar un poco „di quiete d'attendere colle matematiche di passare questo esiglio „con manco travaglio di quello che forse alcuni hanno creduto".

La lettera dell' eruditissimo Francesco Stelluti di Fabriano, tra i primi ammesso nella Academia de' Lincei, quelle del Malcot, l'amico di Kepler, quelle del celebre Adriano Romano e di tutti gli altri matematici saranno certo di valido soccorso alla storia dell' astronomia.

Io già ebbi l'onore di annunziare alla Regia Deputazione di Storia Patria la scoperta di tanti preziosi documenti. Ora attendo alla loro pubblicazione, sperando di fare cosa grata agli studiosi di scienze matematiche, ed ho fede che non sarà per mancarmi l'appoggio dei dotti tedeschi, ed anzi invoco per il mio lavoro il sussidio validissimo della loro dottrina.

Bologna. Conte Nerio Malvezzi.

S. Günther: Sulla possibilità di dimostrare l'assioma delle parallele mediante considerazioni stereometriche. Complemento alla geometria assoluta di Bolyai. Traduzione dal Tedesco di Alfonso Sparagna. (Giornale di Matematiche diretto dal Prof. G. Battaglini, Vol. XI. p. 1—11.)

Man weiss, dass in der Pangeometrie von Lobatschewsky und Bolyai an die Stelle der Ebene die „Grenzfläche", an diejenige der Geraden die „Grenzlinie" tritt, und dass ein aus drei Grenzlinien gebildetes Dreieck die Winkelsumme 180° besitzt. Der Unterschied zwischen Ebene und Grenzfläche liegt, wie nicht minder bekannt, in dem Umstande, dass erstere „umkehrbar ist", letztere dagegen nicht. Es wird nun hier direkt der Nachweis zu führen gesucht, dass mit Zugrundelegung der Definition „die Grenzfläche ist eine Kugelfläche von unendlich grossem Radius" unmittelbar jene Eigenschaft eines Grenzliniendreiecks, aber zugleich im nämlichen Augenblicke die Umkehrbarkeit der Grenzfläche, d. h. ihre Identität mit der Ebene, erhalten werde.

Nach Voraussendung einer historischen Einleitung, welche besonders an einen in ganz ähnlichem Sinne gehaltenen Beweis von Baltzer (Grunert's Archiv, Bd. XVI. S. 129) erinnert, wird auf einer Kugelfläche ein gleichseitiges Dreieck abgesteckt, was ohne alle Voraussetzungen möglich ist. Durch diese drei Punkte lassen sich unendlich viele Kugeln hindurchlegen, und die Mittelpunkte all dieser Kugeln liegen auf einer Curve; dass dies eine Gerade, kommt nicht einmal in Betracht, sondern lediglich der Umstand, dass, wenn von einem beliebigen Punkte der Curve nach entgegengesetzten Richtungen fortgegangen wird, die Vereinigung in dem Einen unendlich entfernten Punkt der Linie erfolgen muss. Indem dann noch der Begriff des Winkels und seines Drehsinnes in einer den speciellen Verhältnissen der Aufgabe angepassten Weise definirt ist, lässt sich zeigen: Der ursprünglich positive Winkel des gleichseitigen Kugeldreiecks wird immer kleiner, je weiter das Kugelcentrum auf der vorhin erwähnten Curve hinausrückt, erscheint aber das Centrum auf der der Anfangsrichtung entgegengesetzten Seite, so ist nunmehr der Winkel negativ. Da nun im sphärischen Dreieck die Winkelsumme $= 180^0 + \varepsilon$, so ist im Dreieck von drei gleichen Seiten und Winkeln ein Winkel $= 60^0 + \frac{\varepsilon}{3}$; dieser Excess ε ist auf der einen Seite abnehmend positiv, auf der anderen zunehmend



negativ, muss also durch Null hindurchgehen. In dem Momente aber, wo dies geschieht, liegt das variable Centrum im Unendlichen, die Kugelfläche verwandelt sich in die Grenzfläche, deren zwei Seiten aber bei der Congruenz des positiv und negativ unendlich entfernten Punktes ebenfalls congruiren müssen, die drei Seitenkreise gehen über in Grenzlinien, und es ist somit der Beweis geführt, dass der Grenzfläche der nichteuclidischen und der Ebene der euclidischen Geometrie die nämliche Fundamentaleigenschaft zukommt. Was für ein einziges Individuum gilt, ist aber nach den Ergebnissen Legendre's für jedes willkürliche Dreieck richtig.

Benützt wurde bei der oben angedeuteten Entwicklung einzig und allein eine Formel der sphärischen Trigonometrie; man weiss, dass sämmtliche Relationen dieser Disciplin von dem Parallelen-Axiom vollkommen unabhängig sind.

Amberg. S. Günther.

S. Günther: Das allgemeine Zerlegungsproblem der Determinanten. (Arch. d. Math. u. Phys. Th. 59. S. 130—146.)

Die bekannten Zerlegungssätze von Laplace und Jacobi werden hier in elementarerer und umfassenderer Weise abgeleitet, als dies gewöhnlich geschieht. Handelt es sich zunächst darum, die Determinante $\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}$ in ein Aggregat von zweigliedrigen Produkten zu zerfällen, so dass der eine Faktor eine Unterdeterminante vom $p$ten, der andere eine solche vom $(n-p)$ten Grade ist, so müssen zwei arbiträre Bedingungen aufgestellt werden. Hält man daran fest, dass die erste Colonne $a_{1,1} a_{2,1} \dots a_{n,1}$ diesen ihren Platz auch in der ersten Faktor-Determinante jedes Einzelproduktes behaupten und dass als erstes Glied der Zerlegung, wie es üblich ist, $\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{p,p} \times \Sigma \pm a_{p+1,\,p+1} a_{p+2,\,p+2} \dots a_{n,n}$ angesehen werden soll, so gelangt man zu einem anscheinenden neuen Satze, welcher sich in Form nachstehender Identität aussprechen lässt:

$$\Sigma \pm a_{1,1} \dots a_{n,n}$$

$$= \Sigma (-1)^{\left[\frac{2+3p-p^2}{2} + \sum_{i=1}^{i=p-1} s_i\right]} \times$$

$$(s_i = l+1,\ l+2 \dots n-p+1)$$

$$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,s_1} \dots a_{p,s_{p-1}} \times \Sigma \pm a_{p+1,2}\, a_{p+2,3} \dots a_{n,n}$$

$$+\Sigma(-1)^{\left[\frac{3n-p+4-(n-p)^2}{2}+\sum_{k=1}^{k=n-p-1} s_k\right]}\times$$
$$\Sigma \pm a_{p+1,1}\, a_{p+2,t_1} \ldots a_{n,t_{n-p-1}} \times \Sigma \pm a_{1,2}\, a_{2,3} \ldots a_{p,n}.$$

Die hier noch gebliebene Beschränkung betreffs der constanten ersten Vertikalreihe lässt sich leicht fortheben, indem man nur die Determinante, deren Vorzeichen bestimmt werden soll, mit einer in der Normalform $\Sigma \pm a_{I,I}\, a_{II,II} \ldots a_{N,N}$ vorgelegten Hülfsdeterminante vergleicht. Zum Schluss wird noch gezeigt, wie man sich bei der allgemeinen Zerlegung einer Determinante in eine Summe aus Produkten von beliebig vielen Unterdeterminanten zu verhalten habe, und dass die hiebei zur Anwendung kommende combinatorische Methode die richtige sei, erhellt u. a. auch daraus, dass die daraus resultirenden Formeln für die Anzahl der bei der Zerlegung auftretenden Aggregatglieder mit den von Jacobi zum gleichen Zwecke gegebenen übereinstimmen.

Amberg. S. Günther.

L. Koenigsberger: Referate aus den hinterlassenen Papieren von F. Richelot.

Die mir von Frau Geheimräthin Richelot übertragene Durchsicht der Papiere des verstorbenen ausgezeichneten Mathematikers F. Richelot hat mich erkennen lassen, dass es den vielen Schülern und Verehrern jenes um die Verbreitung der mathematischen Wissenschaften in Deutschland so hochverdienten Mannes gewiss nicht unerwünscht und für den Fortschritt der Mathematik durch Anregung zu weiteren Untersuchungen sicher zweckmässig sein würde, von der grossen Anzahl einzelner von Richelot angestellter Untersuchungen, die meistens bei der Lectüre der Arbeiten anderer Mathematiker entstanden oder zum Zwecke der Vorlesungen ausgearbeitet worden, fortlaufende Referate mit genauer Angabe der benutzten Methoden und gefundenen Resultate in dieser Zeitschrift zu veröffentlichen, während ich möglicher Weise, wenn es meine Zeit gestatten wird, später durch Unterstützung von Seiten jüngerer Kräfte in der Lage sein werde, grössere Veröffentlichungen von Vorlesungen, die in vielfachen und verschiedenartigen Ausarbeitungen vorliegen, als Lehrbücher der analytischen Mechanik, Variationsrechnung etc. zu bewerkstelligen.

I. *Geometrische Interpretation der Transformation des elliptischen Integrales erster Gattung auf die Normalform.*

Werden die Lösungen des Polynoms vierten Grades $R(z)$ mit

$$a+a_1 i,\ b+b_1 i,\ c+c_1 i,\ d+d_1 i$$

bezeichnet und durch die entsprechenden Punkte A, B, C, D im z-Gebiete dargestellt, so führt bekanntlich die Substitution

$$\zeta = \frac{A-C}{B-C}\,\frac{B-z}{A-z}$$

auf die Gleichung

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{R(z)^{\frac{1}{2}}} = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\zeta}{[(D-B)(C-A)]^{\frac{1}{2}}\,[\zeta(1-\zeta)(1-k^2\zeta)]^{\frac{1}{2}}},$$

worin

$$k^2 = \frac{B-C}{A-C}\cdot\frac{A-D}{B-D}$$

ist. Es kommt darauf an, den analytischen Modul von ζ zu bestimmen, woraus sich dann unmittelbar, wenn $z=D$ gesetzt wird, der analytische Modul von $\frac{1}{k^2}$ ergibt; nun sieht man aber, dass, wenn der die Grösse z repräsentirende Punkt mit Z bezeichnet wird,

$$\text{mod.}\,\zeta = \frac{AC}{BC}\,\frac{BZ}{AZ} = \frac{\frac{BZ}{AZ}}{\frac{BC}{AC}}$$

wird, und aus dieser Form von mod. ζ lässt sich leicht ein geometrisches Criterium dafür ableiten, ob diese Grösse kleiner, gleich, grösser als die Einheit ist. Denn denkt man sich A und B durch eine Grade verbunden, so ist bekanntlich ein Kreis, dessen Durchmesser in dieser Linie liegt, der geometrische Ort der Punkte Z, für welche das Verhältniss $\frac{BZ}{AZ}$ der Entfernungen desselben von A und B constant ist und es wird dieses constante Verhältniss von Null durch die Einheit bis Unendlich zunehmen, wenn der Kreis sich von dem Punkte B an zu dem unendlichen Kreise, welcher die in der Mitte von AB errichtete Grade ist, erweitert und von da an bis zum Punkte A hin zusammenzieht, und daher mod. ζ von Null durch $\frac{AC}{BC}$ bis Unendlich stetig wachsen. Dasselbe leitet Richelot auch unmittelbar aus dem analytischen Ausdrucke für ζ ab, indem er bemerkt, dass, wenn $z = x + yi$ gesetzt wird, die Gleichung

$$\{(a-x)^2+(a_1-y)^2\}\{(b-c)^2+(b_1-c_1)^2\}(\text{mod.}\,\zeta)^2$$
$$-\{(b-x)^2+(b_1-y)^2\}\{(a-c)^2+(a_1-c_1)^2\}=0$$

für ein constantes ζ die Gleichung eines Kreises ist, welcher mit den beiden Punkten, dessen Coordinaten $x=a$, $y=a_1$; $x=b$, $y=b_1$ die ideale Secante

$$0=(a-b)\left\{x-\frac{a+b}{2}\right\}+(a_1-b_1)\left\{y-\frac{a_1+b_1}{2}\right\}$$

gemeinschaftlich hat.

Die Entscheidung der Frage, ob mod. ζ kleiner, gleich, grösser als die Einheit ist, wird sich nun leicht treffen lassen. Zieht man nämlich die zu den Punkten A und B gehörige ideale Secante, so kann der Kreis, der durch C geht und den Richelot den Einheitskreis nennt, entweder rechts oder links von derselben liegen oder diese selbst ist als ein solcher anzusehen; liegt nun der Punkt Z im ersten Falle innerhalb, auf oder ausserhalb des Einheitskreises, so ist mod. ζ resp. kleiner, gleich, grösser als die Einheit; dasselbe findet im zweiten Falle statt, wenn Z ausserhalb, auf oder innerhalb des Einheitskreises liegt und im dritten Falle, wenn Z rechts von MN, auf MN, links von MN sich befindet. Nun ist ferner mod. $\frac{1}{k^2}$ derjenige Werth von mod. ζ, welcher zu dem Punkte D gehört, und es ist daher leicht zu entscheiden, wann mod. $\frac{1}{k^2} \lesseqgtr 1$ ist, wenn man nur dasselbe Criterium, das für Z benutzt wurde, auf D anwendet; zugleich ersieht man hieraus, wie man es durch geeignete Wahl des Punktes C oder D, als zum Einheitskreise gehörig, einrichten kann, dass mod. $\frac{1}{k^2}$ respective zu D oder C gehörig, nicht ein ächter Bruch also mod. $k^2<1$ wird.

Wenn die Anzahl der Punkte $A, B, C, D \ldots H$ ganz beliebig ist, so sieht man für den Fall, dass man von der Transformation

$$\zeta=\frac{A-P}{B-P}\cdot\frac{B-Z}{A-Z}$$

ausgeht, in welcher P einer der Punkte $C, D, \ldots H$ ist, dass man für P nur denjenigen Punkt zu wählen hat, der die Eigenschaft hat, dass der durch ihn laufende, zur Schaar der Kreise, welche die Linie MN zur gemeinschaftlichen idealen Secante haben, gehörige Kreis, dem Punkte B am nächsten liegt, in der Art dass zwischen ihm und B keiner der zu den andern Punkten zugehörigen Kreise liegt. Dies Resultat hält Richelot aus dem Grunde für „ein nicht unwichtiges", weil die Berechnung des Integrales

$$\int_B^P \frac{F(z)\,dz}{\{(z-A)(z-B)(z-C)\ldots(z-H)\}^{\frac{1}{2}}},$$

wo $F(z)$ eine ganze rationale Function von z ist, durch *eine* convergente Reihe und die Reduction dieses Integrales auf die Form

$$\int_0^{\zeta} \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\{\zeta(1-\zeta)(1-k_1^2\zeta)(1-k_2^2\zeta)\ldots\}^{\frac{1}{2}}},$$

wo mod. $k_1^2 \leq 1$, mod. $k_2^2 < 1$, ... und $\varphi(\zeta)$ eine rationale Function von ζ ist, davon abhängen.

Die Anwendungen dieser Resultate auf den Fall von nur reellen Lösungen des Polynoms vierten Grades $R(z)$ sind zu einfach und zu bekannt, als dass eine Hervorhebung derselben nöthig erscheinen sollte.

II. *Conforme Abbildung des Integrales*

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varkappa^2 z)}}$$

für beliebige $\varkappa^2$.

„Im 45. Bande des Crelle'schen Journals habe ich gezeigt, wie „eine jede reelle oder imaginäre Grösse in der Form

$$\sin \mathrm{am}\,(u + iv, \varkappa)$$

„unzweideutig dargestellt wird, falls $\varkappa$ ein positiver ächter Bruch „ist; dieselbe Aufgabe für ein beliebiges $\varkappa$ hat Heine in einer Ab„handlung im 53. Bande desselben Journals behandelt, welche den „Titel führt: Reduction der elliptischen Integrale auf ihre kanonische „Form. Wenn ich im Folgenden auf diesen Gegenstand zurück„komme, so wird die Einfachheit der Darstellung und seine An„wendung auf die zur Begründung der Theorie der elliptischen „Functionen erforderliche conforme Abbildung des elliptischen Inte„grales es entschuldigen."

Diese einleitenden Worte Richelots und die Ausarbeitung, von der ich im Folgenden ein gedrängtes Referat gebe, sind in den Osterferien des Jahres 1872 niedergeschrieben.

Sei

$$z = x + yi, \quad w = u + vi, \quad \varkappa^2 = \varrho(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$
$$1 - \varkappa^2 = \varkappa_1^2 = \sigma(\cos\beta - i\sin\beta),$$

worin

$$-\pi < \alpha < \pi, \quad -\pi < \beta < \pi$$

ist, ferner

$$K = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varkappa^2 z)}}, \quad K_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varkappa_1^2 z)}},$$

bei denen der Integrationsweg durch positive ächte Bruchwerthe von $\sqrt{z}$ führen soll, so sieht man aus Betrachtungen, wie sie aus der Theorie der complexen Integrale geläufig sind, dass während w in dem Integrale

$$\frac{1}{2}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varkappa^2 z)}} = w$$

von 0 bis K geht, z das Stück der positiven Abscissenaxe von 0 bis 1 durchlaufen wird, und dass einem Fortschreiten der Variabeln w von 0 bis iK_1 die ganze negative x-Axe als Bildcurve zugehört. Verändert sich jedoch w so von K bis $K + iK_1$, dass $u = K$ bleibt, und v von 0 bis K_1 so stetig fortgeht, dass $\sin\operatorname{am}(v, \varkappa_1)$ durch positive ächte Bruchwerthe stetig von 0 bis 1 wächst, so wird die entsprechende z-Linie der durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 - x + y\frac{(1-\varrho\cos\alpha)}{\varrho\sin\alpha} = 0$$

definirte Kreis sein, welcher durch die Punkte

$$x = 0, \ y = 0; \ x = 1, \ y = 0; \ x = \frac{\cos\alpha}{\varrho}, \ y = -\frac{\sin\alpha}{\varrho}$$

hindurchgeht.

Verändert sich endlich w stetig so von $K + iK_1$ bis iK_1, dass $v = K_1$ bleibt, und u von K bis 0 so abnimmt, dass $\sin\operatorname{am}(u, \varkappa)$ durch positive ächte Bruchwerthe von 1 bis 0 stetig abnimmt, so wird der entsprechende Punkt im xy-Gebiete vom Punkte $x = \frac{\cos\alpha}{\varrho}$, $y = -\frac{\sin\alpha}{\varrho}$ bis unendlich in einer Graden fortschreiten, die rückwärts verlängert durch den Anfangspunkt der Coordinaten hindurchgeht, und es ist aus der allgemeinen Abbildungstheorie bekannt, dass das ganze so begrenzte xy-Gebiet in jeder Stelle mit Ausnahme der vier Ecken conform durch das bezeichnete endliche Curvenviereck im uv-Gebiete abgebildet ist.

Es erübrigt noch die durch $w = u + vi$ bezeichneten Integrale für alle vier Seiten der gefundenen Figur in geeigneter Form zu entwickeln, wobei man sich leicht überzeugt, dass dies im Wesentlichen nur auf die *eine* Aufgabe zurückkommt, das Integral

$$\frac{1}{2}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varrho e^{\pm i\alpha}z)}} = w$$

für einen durch positive ächte Bruchwerthe stetig fortlaufenden Integrationsweg und für $0 < \alpha < \pi$ zu bestimmen. Richelot setzt nämlich, um das vorgelegte Integral in die Form

$$U \pm iU'$$

zu bringen, worin U und U' reell bleiben, so lange z ein positiver ächter Bruch ist,

$$1 - \varkappa^2 z = -\varrho e^{i\alpha} z = r(\cos\psi - i\sin\psi)$$

oder, wenn man von dem speciellen unmittelbar zu behandelnden Falle $\alpha = 0$ absieht,

$$z = \frac{1}{\varrho}\,\frac{\sin\psi}{\sin(\alpha+\psi)},$$

woraus sich nach leichter Rechnung, wenn $\alpha > 0$ angenommen wird,

$$\frac{1}{2}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varkappa^2 z)}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-2\varrho\cos\alpha+\varrho^2}}\int_0^\psi \frac{\left(\cos\frac{\psi}{2}+i\sin\frac{\psi}{2}\right)d\psi}{\sqrt{\sin\alpha.\sin\psi.\sin(\alpha+\psi).\sin(\beta-\psi)}} = U + iU'$$

ergibt, während der Fall $\alpha < 0$ sich auf diesen zurückführen lässt, wenn man nur statt der drei Grössen α, β, ψ drei andere Grössen $-\alpha'$, $-\beta'$, $-\psi'$ einführt.

Die Integrale

$$U = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-2\varrho\cos\alpha+\varrho^2}}\int_0^\psi \frac{\cos\frac{\psi}{2}\,d\psi}{\sqrt{\sin\alpha.\sin\psi.\sin(\alpha+\psi).\sin(\beta-\psi)}}$$

$$U' = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-2\varrho\cos\alpha+\varrho^2}}\int_0^\psi \frac{\sin\frac{\psi}{2}\,d\psi}{\sqrt{\sin\alpha.\sin\psi.\sin(\alpha+\psi).\sin(\beta-\psi)}}$$

sollen nun in eine zu ihrer Berechnung geeignete Form gebracht werden. Zu diesem Zwecke setzt Richelot

$$\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\psi}{2}\right)}} = \sin\varphi$$

und erhält durch eine geschickte, mit Hülfe logarithmischer Differenziation angestellte Substitutionsrechnung, nachdem

$$\varkappa^2 = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}} \qquad \varkappa_1^2 = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

$$\lambda^2 = \frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \qquad \lambda_1^2 = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

$$\mu^2 = \frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \qquad \mu_1^2 = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

gesetzt worden, worin, weil $\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > 0$ ist,

$$0 < \mu^2 < \lambda^2 < \varkappa^2 < 1,$$

das folgende Resultat

$$U = \sqrt{\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}} \times$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\varrho\cos\alpha+\varrho^2}}\int_0^{\varphi} \frac{(1-\lambda^2\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)(1-\lambda^2\sin^2\varphi)(1-\mu^2\sin^2\varphi)}}$$

$$U' = \sqrt{\frac{\sin^3\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\sin^3\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}} \times$$

$$\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sqrt{1-2\varrho\cos\alpha+\varrho^2}}\int_0^{\varphi} \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)(1-\lambda^2\sin^2\varphi)(1-\mu^2\sin^2\varphi)}}.$$

Ebenso erhält man, da eine Vertauschung der Grössen α und β die drei Grössen $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 in μ_1^2, λ_1^2, $\varkappa_1^2$ überführt,

$$\frac{1}{2}\int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\sigma e^{\pm i\beta}z)}} = U_1 \pm i U_1',$$

worin

$$U_1 = \sqrt{\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}} \times$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\sigma\cos\beta+\sigma^2}}\int_0^{\varphi_1} \frac{(1-\lambda_1^2\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{(1-\mu_1^2\sin^2\varphi)(1-\lambda_1^2\sin^2\varphi)(1-\varkappa_1^2\sin^2\varphi)}}$$

$$.U_1' = \sqrt{\frac{\sin^3\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin^3\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}} \times$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-2\sigma\cos\beta+\sigma^2}}\int_0^{\varphi_1}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(1-\mu_1^2\sin^2\varphi)(1-\lambda_1^2\sin^2\varphi)(1-\varkappa_1^2\sin^2\varphi)}},$$

worin φ_1 und ψ_1 durch eine Gleichung zusammenhängen, die aus der obigen zwischen φ und ψ unmittelbar herzuleiten ist.

Setzt man endlich noch die ursprüngliche Variable

$$z = \sin^2\chi,$$

so folgt aus den obigen Substitutionsformeln

$$\sin\chi = \frac{\varkappa}{\sqrt{\varrho}}\sin\varphi\sqrt{\frac{1-\lambda^2\sin^2\varphi}{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}},$$

wobei hervorzuheben dass

$$\frac{\varkappa}{\sqrt{\varrho}} = \frac{\mu}{\lambda},$$

somit die ganze Transformation in $\varkappa$, λ, μ ausgedrückt ist, und wir erhalten daher, wenn $\varkappa$, λ, μ, $\varkappa_1$, λ_1, μ_1 positiv angenommen werden,

$$\int_0^{\chi}\frac{d\chi}{\sqrt{1-\varrho e^{\pm i\alpha}\sin^2\chi}}$$

$$= \frac{\varkappa}{\sqrt{\varrho}}\int_0^{\varphi}\frac{\left(1-\lambda^2\sin^2\varphi \pm i\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\sin^2\varphi\right)d\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)(1-\lambda^2\sin^2\varphi)(1-\mu^2\sin^2\varphi)}}.$$

Diese Formeln liefern nun Richelot unmittelbar die Gleichungen der transcendenten Curven, welche die Bilder der genannten Begrenzungsstücke sind. Dem Begrenzungsstück von $x = 0$, $y = 0$ bis $x = 0$, $y = 1$ nämlich entspricht das Bild, welches für positive φ-Werthe durch die Gleichungen

$$u = \frac{\varkappa}{\sqrt{\varrho}}\int_0^{\varphi}\frac{(1-\lambda^2\sin^2\varphi)d\varphi}{D\varphi}$$

$$v = \pm\frac{\varkappa\lambda\sqrt{\varkappa^2-\lambda^2}}{\sqrt{\varrho}}\int_0^{\varphi}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{D\varphi}$$

bestimmt ist, wenn

$$D\varphi = \sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi)(1 - \lambda^2 \sin^2\varphi)(1 - \mu^2 \sin^2\varphi)}$$

gesetzt wird.

Dem Begrenzungsstück von $x = 0$ bis $x = -\infty$ entspricht das Bild, dessen Gleichungen sind,

$$u = \frac{\mu_1}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\varphi_1} \frac{(1 - \lambda_1^2 \sin^2\varphi)\, d\varphi}{D_1\varphi}$$

$$v = \pm \frac{\mu_1 \lambda_1}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\varphi_1} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{D_1\varphi},$$

wenn man

$$D_1\varphi = \sqrt{(1 - \varkappa_1^2 \sin^2\varphi)(1 - \lambda_1^2 \sin^2\varphi)(1 - \mu_1^2 \sin^2\varphi)}$$

setzt.

Zu dem oben bezeichneten Kreisbogen gehört als Bild das Begrenzungsstück

$$u = \frac{\mu}{\sqrt{\varrho}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \lambda^2 \sin^2\varphi)\, d\varphi}{D\varphi} + \frac{\mu_1}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\varphi_1} \frac{(1 - \lambda_1^2 \sin^2\varphi)\, d\varphi}{D_1\varphi}$$

$$v = \pm \frac{\varkappa\lambda\sqrt{\varkappa^2 - \lambda^2}}{\sqrt{\varrho}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{D\varphi} \pm \frac{\mu_1 \lambda_1 \sqrt{\mu_1^2 - \lambda_1^2}}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\varphi_1} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{D_1\varphi}.$$

Endlich entspricht dem Stück der genannten unendlichen Graden das Bild, dessen Gleichungen

$$u = \frac{\varkappa}{\sqrt{\varrho}} \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \lambda^2 \sin^2\varphi)\, d\varphi}{D\varphi} + \frac{\mu}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \lambda_1^2 \sin^2\varphi)\, d\varphi}{D_1\varphi}$$

$$v = \pm \frac{\varkappa\lambda\sqrt{\varkappa^2 - \lambda^2}}{\sqrt{\varrho}} \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{D\varphi} \pm \frac{\mu_1 \lambda_1 \sqrt{\mu_1^2 - \lambda_1^2}}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{D_1\varphi}.$$

Es würde noch erübrigen, nicht bloss, wie bisher geschehen, u und v für die Grenze des Flächenstückes sondern für jeden Punkt innerhalb derart zu bestimmen, dass

$$z = x + yi = \sin^2 \mathrm{am}\,(u + vi, \varkappa)$$

ist.

„Diese Aufgabe hat nun Heine in der angeführten Abhand-„lung gelöst und zugleich für ein anderes Gebiet, nicht für das „xy-Gebiet, wenn

$$x + yi = \sin^2 \mathrm{am}(u + vi, \varkappa)$$

„sondern für das xy-Gebiet, wenn

$$x + yi = \sin \mathrm{am}(u + vi, \varkappa)$$

„gegeben ist, jene vier Grenzlinien direct bestimmt. Es sind die „positive y-Halbaxe, die positive x-Halbaxe von $x = 0$ bis $x = 1$, „der Bogen einer bestimmten Lemniscate und eine von

$$x + iy = \frac{1}{\varkappa} = \frac{e^{\frac{i\alpha}{2}}}{\varrho}$$

„in's Unendliche laufende Grade, die rückwärts verlängert durch „den Anfangspunkt der Coordinaten geht. Wenn man in unsern „früheren Begrenzungsstücken $x + yi$ für $\sqrt{x + yi}$ also

$$x^2 - y^2 \text{ für } x$$
$$2xy \text{ für } y$$

„einführt, so gelangt man in der That zu den Heine'schen."

Dresden. L. Koenigsberger.

Anmerkung zu dem Referate S. 138.

Die Erweiterung des dort erwähnten Jacobi'schen Satzes ist, wie ich erst später gefunden habe, in anderer Fassung und mit andersartigem Beweise von Liouville gegeben worden in seinem: „Mémoire sur quelques propositions générales de géométrie etc." Journal de Mathématiques Tome VI. 1841.

Leipzig. Ax. Harnack.

H. G. Zeuthen: Sur une classe de points singuliers de surfaces. (Mathematische Annalen IX.)

— **Note sur les singularités des courbes planes.** (Mathematische Annalen X.)

— **Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques.** (Mathematische Annalen X.)

On sait que M. Salmon a trouvé*) — à une près — les relations qui ont lieu entre les nombres des singularités ordinaires d'une surface algébrique; M. Cayley a trouvé**) celle qui restait encore, et en même temps il a étendu cette théorie par l'introduction de plusieurs singularités extraordinaires; le nombre de celles-ci a été augmenté ensuite par moi.***) Immédiatement après j'ai exprimé toutefois †) quelques doutes sur plusieurs des coefficients des termes introduits par M. Cayley et moi. C'est pour cette raison que j'ai entrepris une nouvelle et uniforme déduction par le principe de correspondance des formules dont il s'agit, et une étude détaillée de toutes les singularités auxquelles j'avais égard, y compris plusieurs singularités nouvelles. Les résultats de ce travail, assez long et pénible, sont consignés au troisième des mémoires nommés ci-dessus: les deux autres en sont des précurseurs.

Les points singuliers dont je m'occupe dans le premier mémoire sont *les points doubles à un seul plan tangent (double), qui est le lieu de droites rencontrant la surface en quatre points coïncidents, et qui, de son côté, n'a qu'un seul point de contact.* Je prouve, au moyen de séries, que le plan tangent en un de ces points a les propriétés réciproques à celles de son point de contact: les nombres des points doubles et stationnaires de la courbe double, des points doubles et stationnaires de la courbe cuspidale, et des points d'intersection de ces deux courbes qui sont réunis en un des points singuliers qui nous occupent, sont égaux, respectivement, aux nombres des plans tangents doubles et stationnaires de la développable

*) Transactions of the Royal Irish Academy, vol. 23. — Voir aussi les deux premières éditions de „*Geometry of three Dimensions*“.

**) *A Memoir on the Theory of Reciprocal Surfaces.* Philosophical Transactions 1869 et 1871.

***) *Sur les droites multiples des surfaces.* Mathematische Annalen t. IV.

†) *Note sur la théorie des surfaces réciproques.* Mathematische Annalen t. IV, p. 636.

bitangente, des plans tangents doubles et stationnaires de l'enveloppe des plans tangents stationnaires de la surface, et des plans tangents communs à ces deux développables, qui coïncident avec le plan tangent au point singulier. — J'étudie ensuite les contacts de la courbe de contact des plans tangents doubles et de la courbe parabolique avec la courbe double et la courbe cuspidale.

L'étude des autres points singuliers d'une surface se fait, dans le troisième mémoire, par la discussion des dégénérations que subit un cône circonscrit pour des positions particulières du sommet: il s'agit notamment, si l'on remplace les cônes par leurs sections planes, de la détermination du nombre de points doubles et stationnaires qui se confondent en un point singulier supérieur, et celui des tangentes doubles et stationnaires qui se confondent en une tangente singulière supérieure. Cette détermination se fait par des théorèmes trouvés et démontrés par MM. Cayley, Nöther, Halphen et Stolz, auxquels il m'était commode toutefois pour mon but de donner une nouvelle forme, ce que j'ai fait dans la *„Note sur les singularités des courbes planes"*. Malheureusement, un moyen de faciliter ultérieurement la détermination de ces „équivalents plückériens" m'a échappé alors: je pense à la relation entre les quatre équivalents d'une branche complète que M. Smith a exposée dans une belle et complète discussion des singularités supérieures des surfaces, publiée, dans le vol. 6 des „Proceedings of London Mathematical Society", en même temps, a peu près, que ma Note. Ce manque n'a aucune influence sur mon troisième mémoire, où je me contente, pour ces déterminations, d'un renvoi à la Note.

Afin d'indiquer ici les nouvelles formes des équations des MM. Salmon et Cayley — où toutefois seulement des termes introduits par M. Cayley et moi sont altérés — auxquelles a conduit „la révision et l'extension" entreprises dans le troisième mémoire, je renvoie, pour la plupart des notations, à la troisième édition de la *„Geometry of three Dimensions"* de M. Salmon.*) Les miennes n'en diffèrent que par les circonstances que je désigne par k et h les nombres plückériens des génératrices doubles des cônes projétant la courbe double et la courbe cuspidale (et non pas seulement les nombres des points doubles *apparents* de ces courbes), que je n'ai pas besoin du nombre ϑ des points „de singularité inexpli-

*) p. 539 et 549. Voir aussi l'édition allemande, due à M. Fiedler, du même livre, p. 605 et 616.

quée", regardant ces points comme faisant partie des singularités déjà introduites par les notations de χ', B', et que je fais l'usage analogue des notations k', h', χ et B. Je désigne encore par U le nombre des points uniplanaires, par O le nombre des plans dont les sections ont des points triples en des points simples de la surface, par U' et O' les nombres des singularités réciproques, et par f, d, g, e et i ceux des points doubles et stationnaires de la courbe double, des points doubles et stationnaires de la courbe cuspidale, et des points d'intersection de ces deux courbes qui se trouvent aux points doubles à un seul plan tangent, dont nous avons parlé dans le compte rendu du premier des trois mémoires. Selon le résultat principal de celui-ci nous n'avons pas besoin de notations f', d', g', e' et i', dont les significations ne différeraient par de celles de f, d, g, e et i. Avec ces notations on aura les équations suivantes:

$$a = a',$$
$$n(n-1) = a + 2b + 3c,$$
$$a(a-1) = n + 2\delta' + 3\varkappa',$$
$$c - \varkappa' = 3(n-a),$$
$$b(b-1) = q + 2k + 3\{\gamma + \Sigma'[\eta'(\nu'-4) + 2\eta'\zeta'] + d\},$$
$$c(c-1) = r + 2h + 3(\beta + 2O' + e),$$
$$a(n-2) = [\varkappa - B - \Sigma(\eta + 2\zeta)] + \varrho + 2\sigma + \Sigma[x(\mu-2)],$$
$$b(n-2) = \varrho + 2\beta + 3\gamma + 3t + 9O' + \Sigma[y(\mu-2)],$$
$$c(n-2) = 2\sigma + 4\beta + \gamma + 8\chi' + 16B' + 12O' + \Sigma z(\mu-2),$$

$$a(n-2)(n-3) = 2\left\{\delta - 3U - \Sigma\left[\frac{\nu(\nu-1)}{2} + 2\nu\eta + 3\nu\zeta + 4\frac{\eta(\eta-1)}{2} + 6\eta\zeta + \frac{9\zeta(\zeta-1)}{2} + \zeta\right]\right\}$$
$$+ 3[ac - 3\sigma - \chi - \Sigma(xz)] + 2[ab - 2\varrho - j - \Sigma(xy)]$$
$$+ \Sigma[x(\mu-2)(\mu-3)],$$

$$b(n-2)(n-3) = 4\left\{k - 3t - 3O' - \Sigma\left[\frac{y(y-1)}{2}\right]\right.$$
$$\left. - \Sigma'\left[u' + 2\zeta'(\nu'-3) + 3\frac{\eta'(\eta'-1)}{2} + \eta'\zeta' + 6\frac{\zeta'(\zeta'-1)}{2}\right] - f\right\}$$
$$+ [ab - 2\varrho - j - \Sigma(xy)]$$
$$+ 3[bc - 3\beta - 2\gamma - 12O' - \Sigma(yz) - \Sigma'(\nu' + 4\eta' + 4\zeta') - i]$$
$$+ 9O' + \Sigma[y(\mu-2)(\mu-3)],$$

$$c(n-2)(n-3)$$
$$= 6\left\{h - 6\chi' - 12B' - U' - 4O' - \Sigma\left[\frac{z(z-1)}{2}\right] - \Sigma'(\zeta') - g\right\}$$
$$+ [ac - 3\sigma - \chi - \Sigma(xz)]$$
$$+ 2[bc - 3\beta - 2\gamma - 12O' - \Sigma(yz) - \Sigma'(\nu' + 4\eta' + 4\zeta') - i]$$
$$+ 18O' + \Sigma[z(\mu-2)(\mu-3)],$$

$$\sigma + 2r - 3c - 4j' - 3\chi' - 14U' + 2O' - \Sigma'(2\mu' + \nu' + 8\eta' + 11\zeta')$$
$$= \sigma' + 2r' - 3c' - 4j - 3\chi - 14U + 2O - \Sigma(2\mu + \nu + 8\eta + 11\zeta),$$

et celles qui en résultent par le principe de dualité.

Abstraction faite des différences dues aux altérations des notations et aux nouveaux termes que nous avons introduits, les formules indiquées ici diffèrent de celles qu'on trouve aux endroits cités par plusieurs termes contenant χ', B', η' et ζ'.

Dans les formules indiquées ici on a supposé que les singularités se présentent de la manière la plus générale que permet leur définition; mais en ayant égard à l'origine des termes respectifs on trouve sans difficulté les modifications que peuvent subir les formules en des cas particuliers. Le mémoire contient aussi des exemples de ces modifications.

Les formules ne sont pas toutefois la seule fruit qui j'ai cherchée par mon travail. Les propriétés des points et plans singuliers dont la connaissance était nécessaire pour la détermination directe des coefficients des formules, auront, je le suppose, quelque intérêt à elles. Réciproquement, ces propriétés sont assurées par leur application à la déduction des formules numériques, qui permettent plusieurs vérifications.

Une grande partie de ces propriétés ont égard aux plans tangents stationnaires et doubles de la surface qui ont les différents points singuliers pour points de contact, et aux branches de la courbe cuspidale et double qui sont tangentes aux plans singuliers.

On trouve, par exemple, que chacun des deux plans tangents en un point biplanaire est en général (si l'on regarde la surface comme lieu de points) plan tangent quadruple de l'enveloppe des plans tangents stationnaires; les génératrices de contact, mais non pas les branches correspondantes de l'arête de rebroussement de la développable, passent par le point biplanaire. Les deux plans tangents comptant pour trois plans tangents menés à la surface par les droites qui s'y trouvent, le principe de dualité montre qu'un plan biponctuel contient deux points qui sont en général (si l'on regarde la surface comme enveloppe de plans) des points triples de la surface (à un seul plan tangent), et des points quadruples de la courbe cuspidale. Les plans et points singuliers dont j'ai rendu compte ici remplacent les plans et les points „of unexplained singularity".

Copenhague, en août 1876. H. G. Zeuthen.

W. Fiedler: Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. Für Vorlesungen an technischen Hochschulen und zum Selbststudium. Zweite Auflage. Mit 260 Holzschnitten und 12 lithogr. Tafeln. (LIV. 761.) Leipzig. Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1875.

Das Buch entspricht, nachdem es in der zweiten Auflage wesentlich erweitert worden ist, den Vorlesungen über darstellende Geometrie und Geometrie der Lage, welche ich seit 1864 an den technischen Hochschulen von Prag und Zürich gehalten habe. Es giebt die neue Grundidee, der ich in diesem Theile meiner Lehrthätigkeit Bahn zu brechen gesucht habe, in seinem Titel an. Die consequente Durchführung derselben hat eine neue Gliederung des Stoffes in beiden behandelten Gebieten bedingt und vielfach neue Gesichtspunkte und Methoden für die Untersuchung eröffnet; ich will versuchen, davon Rechenschaft abzulegen, kann aber dabei leider nicht so kurz sein als ich wünschte. Der Umfang des behandelten Ideenkreises wird das entschuldigen.

Einer *Einleitung* über Aufgabe, Methode und Entwickelungsgang der darstellenden Geometrie und über die perspectivische Raumansicht als allgemeine Voraussetzung derselben folgen die drei Theile des Buches: I. *Die Methodenlehre, entwickelt an der Untersuchung der geometrischen Elementarformen und ihrer einfachen Verbindungen.* II. *Die constructive Theorie der krummen Linien und Flächen.* Und III. *Die Geometrie der Lage und die projectivischen Coordinaten.*

Von der Centralprojection als dem einfachsten Abstractum des Sehprozesses ausgehend behandelt der *erste Theil* nach einander: A. *Die Centralprojection als Darstellungsmethode und nach ihren allgemeinen Gesetzen.* B. *Die constructive Theorie der Kegelschnitte.* C. *Die centrische Collineation räumlicher Systeme als Theorie der Modellierungsmethoden.* D. *Die Grundgesetze der orthogonalen Parallelprojection, ihre Transformationen und die Axonometrie.* Alle die allgemeinen Darstellungsmethoden für ebene Abbildung und für Modellierung werden begründet und an den Raumelementen Punkt, gerade Linie und Ebene, an ihren einfachen Verbindungen, den Winkeln und Ecken, den Polygonen und Polyedern, sowie an der Kreislinie und ihren Abbildungen nach aller Mannichfaltigkeit ihrer Verwendung entwickelt. Dabei ergeben sich die Grundbegriffe und die fundamentalen Theorien der Geometrie der Lage als der natur-

gemässe Ausdruck der allgemeinen Gesetze der Centralprojection sofort im Abschnitt A., sodass die Theorie der Kegelschnitte in B. als ein umfassendes Beispiel ihrer Anwendung erscheint; sie führen auch von der centrischen Collineation in der Ebene als dem Ausdruck der durch die Centralprojection vermittelten Beziehung ebener Figuren im Abschnitt C. zu der centrischen Collineation der Räume, aus welcher alle für Kunst und Technik verwendeten Modellierungsmethoden entspringen. Die verschiedenen Formen der Anwendung der Parallelprojection ergeben sich dann in D. sehr kurz und vollständig und damit ist die Ausrüstung für die Lösung aller gewöhnlichen Aufgaben der darstellenden Geometrie im Gebiete der Theorien der krummen Linien und Flächen in dem erweiterten Sinne gewonnen, wo sie auch die selbständige Begründung und Entdeckung derjenigen Eigenschaften derselben einschliesst, deren Kenntniss zu jenen Zwecken nothwendig oder vorzugsweise nützlich ist, und die man gemeiniglich von anderswoher entlehnt, um nur ihren constructiven Gebrauch zu zeigen.

In solchem Sinne werden im *zweiten Theil* nach einander behandelt: A. *Die Curven und die developpabeln Flächen.* B. *Die krummen Flächen im Allgemeinen und die Flächen zweiten Grades insbesondere.* C. *Die windschiefen Regelflächen.* D. *Die Rotationsflächen;* überall nur vordringend bis zu den Elementen der Lehre von der Krümmung der Flächen, also in Einschränkung auf den gewöhnlichen Umfang des Materials der darstellenden Geometrie an den technischen Hochschulen und in den entsprechenden Lehrbüchern. In der consequenten Durchführung der doppelten Auffassung einer Curve als Ort ihrer Punkte und als Enveloppe ihrer Schmiegungsebenen respective Tangenten und einer Fläche als Ort von aufgeschriebenen Curven und als Enveloppe von umgeschriebenen Developpabeln, in der dadurch bedingten eingehenden Behandlung der Curven und ihrer Tangentenflächen im ersten Abschnitt und auf Grundlage derselben weiterhin, sowie namentlich in dem Streben nach Entwicklung strenger Constructionen aus den nothwendigen Bestimmungsstücken liegen aber überall die Nöthigungen zu ganz selbständigem und vom Hergebrachten sehr abweichendem Vorgange.

Endlich wird in dem gerade hierdurch vorbereiteten *dritten Theil* die systematische Entwicklung geometrischer Theorien wieder aufgenommen, zu welcher die beiden ersten Abschnitte der Methodenlehre bereits geführt haben; nämlich in der Durchführung der Geometrie der Lage als der rein wissenschaftlichen Fortsetzung der

darstellenden Geometrie in den drei Abschnitten: A. *Grundlagen und Coordinaten.* B. *Die Parameter der Gebilde und die Projectivität; Erzeugnisse der projectivischen Gebilde erster Stufe.* C. *Die projectivischen Gebilde zweiter und dritter Stufe und die Erzeugnisse ihrer Verbindung.*

Nach dieser Uebersicht ist es erforderlich, auf eine Reihe von Einzelheiten näher einzugehen, um die Ideenentwicklung zu verdeutlichen — zuerst aus der *Methodenlehre.* In den §§. 1—14 wird die Centralprojection als unabhängige Darstellungsmethode entwickelt; die Bestimmung der geraden Linie und der Ebene, sowie deren Verwendung, insbesondere die charakteristische Benutzung der Fluchtelemente zur Lösung von Aufgaben mit Winkelbestimmungen — man sehe die einfachen Constructionen für eine Ebene, welche eine gegebene Gerade enthalten und mit einer bestimmten Ebene einen vorgeschriebenen Winkel einschliessen soll, in §. 10, 8 und 9 —, sodann die Relation der Rechtwinkligkeit zwischen Linien und Ebenen, die Umlegung und Aufrichtung ebener Systeme und die Transformationen der Centralprojection werden gegeben, letztere speciell entwickelt bis zur Erledigung des Hauptproblems der praktischen Perspective, der Auftragung aus den Coordinaten nach drei zu einander rechtwinkligen Axen unter Benutzung der reducierten Distanz.

Nach der Zusammenfassung der Beziehungen zwischen Original und Bild eines Systems in dem Begriff der centrischen Collineation in §. 14 wird auf die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Bild und Original einer geraden Punktreihe näher eingegangen und als erste die Frage nach dem Gesetz der Abhängigkeit zwischen Bild und Original einer Strecke beantwortet; man erhält damit sogleich die einfachen Mittel zur Bestimmung der entsprechend gleichen Strecken von gegebenem Anfangspunkt mit Hilfe der Gegenpunkte oder des Flucht- und des Verschwindungspunktes, aber auch ebenso einfache zur Bestimmung der entsprechend gleichen Strecken von gegebenen Längen, speciell von der Länge Null; durch Beides den deutlichen Ueberblick des *doppelten Systems der entsprechend gleichen Strecken,* die anschauliche Grundlage für die spätere so wichtige Theorie der Involution von vereinigten Punktreihen. Man erhält ferner das Gesetz, nach welchem das Theilungsverhältniss einer Strecke sich beim Uebergang zum Bilde ändert — wenn die Strecke den Gegenpunkt ihrer Geraden zur Mitte hat, so ändert sich nur sein Zeichen — und den fundamentalen Satz (§. 16) von der Unveränderlichkeit des *Doppelverhältnisses* von vier Elementen eines

Elementargebildes erster Stufe beim Uebergang zur Projection, also die Definition der Projectivität von solchen Gebilden sowie ihre Construction aus drei entsprechenden Elementarpaaren (§§. 17, 18). In der Anwendung auf Büschel werden die entsprechenden Rechtwinkelpaare als die den Gegenpunkten der Reihen gleichbedeutenden Elemente erkannt. Der Projectivität der Reihen entspricht die Aufgabe: Man bestimme die Distanz, den Durchstoss- und den Flucht-Punkt einer Geraden, wenn für drei Punkte derselben die Bilder und die Tafelabstände gegeben sind — eine Bestimmung, welche die fundamentale durch das Projectionscentrum oder den Distanzkreis mit Durchstosspunkt und Fluchtpunkt als speciellen Fall in sich enthält.

Die Anwendung des gefundenen Projectivitätsgesetzes auf die centrische Collineation ebener Systeme (§. 19) führt sofort zur Aufstellung des Begriffs der *Charakteristik* einer Centralcollineation; sie ist das constante Doppelverhältniss, welches je zwei entsprechende Elemente in den vereinigten projectivischen Reihen auf Strahlen aus dem Centrum oder in den vereinigten projectivischen Büscheln aus Punkten der Axe der Collineation mit den sich selbst entsprechenden Elementen derselben bestimmen, oder das Theilverhältniss der Gegenpunkte respective der entsprechenden Rechtwinkelpaare in Bezug auf die Letzteren; und sie ist auch die Charakteristik der entsprechenden Centralprojectionen, weil sie das Theilverhältniss des Winkels zwischen Bild- und Original-Ebene, des Drehungswinkels bei der Umklappung, durch die nach ihrer Schnittlinie gehende projicirende Ebene ist (§. 19, 5); sie wechselt bei entgegengesetzter Umklappung nur ihr Zeichen. Dies führt zur Eintheilung der Collineationen und Projectionen nach den Zahlwerthen der Charakteristik und zur Untersuchung der den Grenzwerthen 0, ∞, $+1$ entsprechenden Fälle, der Collineationen mit singulären Elementen (§. 19, 8 und §. 21, f. g), sowie des Falles von der Charakteristik -1 oder der *Involution* (§. 20); endlich der Specialfälle der Affinität und Aehnlichkeit, der axialen und der centrischen Symmetrie sowie der Congruenz (§. 21) — die Symmetrien ebener Systeme sind besondere Fälle ihrer Involution, die Centralprojectionen symmetrischer Figuren sind Involutionen, Halbierung geht über in harmonische Theilung. So schliesst der Abschnitt A. mit der Lösung der Aufgabe von der Bestimmung entsprechender Elemente und der Herstellung der centrisch collinearen Lage für zwei ebene Systeme, von denen vier Punkte des einen und die entsprechenden des andern in

allgemeiner Lage gegeben sind, d. h. den letzten Theil betreffend mit der allgemeinen Auflösung des sogenannten umgekehrten Problems der Perspective (§. 22, Fig. 43); endlich mit einer Uebersicht (§. 23), welche in den vorhergehenden Entwicklungen auch projectivisch reciproke Systeme in der Form der Orthogonalsysteme aufweist und die allgemeine Bestimmung reciproker Ebenen sowie den Nachweis von drei Formen specieller Reciprocität mit singulären Elementen gibt.

So hat die Entwicklung der Centralprojection als Methode der Darstellung in zwingender Weise zu den Grundlagen der neuern Geometrie hingeführt, auch — wie noch ausgeführt werden mag — zu der Construction der Doppelelemente in vereinigten projectivischen Gebilden erster Stufe; denn sie zeigt in der centrischen Collineation ebener Systeme diese Vereinigung mit stets reellen zu den Gegenpunkten respective den nicht entsprechenden Rechtwinkelstrahlen symmetrischen Doppelelementen, und führt durch den besondern Fall der Involution ebener Systeme zu der Bemerkung, dass bei der entgegengesetzten Zusammenlegung beispielsweise projectivischer Reihen mit ihren Gegenpunkten die entsprechenden Nullstrecken nicht zur Deckung kommen statt wie bei der involutorischen Collineation stets reelle Doppelpunkte zu liefern; sowie dazu, dass hierbei stets die vereinigten Gebilde der ersten Stufe von entgegengesetztem Sinne sind und dass bei der entgegengesetzten Umlegung mit der Uebereinstimmung des Sinnes im Falle der Involution die Vereinigung der Doppelpunkte in der Mitte der Gegenpunkte, bei jeder andern centrischen Collineation aber die Lage derselben zwischen den Gegenpunkten statt ausserhalb ihrer Strecke verbunden ist; d. h. man ist durch die constructiven Facta zu der Einsicht gedrängt, die eine Ueberlegung der correspondirenden Bewegung in projectivischen Gebilden sofort begründet, dass bei entgegengesetztem Sinn Doppelpunkte ausserhalb der Strecke der Gegenpunkte existiren *müssen*, während sie bei gleichem Sinn nur zwischen den Gegenpunkten existiren *können* und somit zur Steiner'schen Construction derselben aus Differenz und Product oder aus Summe und Product ihrer Abstände von den Gegenpunkten (§. 19, 13 f.).

Derselbe Weg vom Besonderen zum Allgemeinen wird auch in der Theorie der *Kegelschnitte* im Abschnitt B. verfolgt. Von den Kreisprojectionen (§. 24) als Curven, die ebensowohl aus projectivischen Büscheln wie aus projectivischen Reihen entstehen, von den Kegelschnittbüscheln und Schaaren (§. 25) mit vier reellen gemein-

samen Punkten respective Tangenten über die praktischen Constructionsformen aus fünf reellen Elementen (§§. 26, 27) zum Beweis der Identität von Curven zweiter Ordnung und zweiter Klasse (§. 28), zur Benutzung der Kegelschnitte für die Lösung aller Aufgaben zweiten Grades (§. 29); sodann zur Untersuchung des Kegelschnitts als Involutionsfigur oder als sich selbstentsprechend in der involutorischen Collineation mit einem beliebigen Pol als Centrum und der zugehörigen Polare als Axe derselben (§. 30), zur Lösung der Probleme über die involutorischen Gebilde erster Stufe (§. 31), zur Theorie der harmonischen Pole und Polaren (§. 32) und zu den Constructionen mit imaginären Bestimmungselementen in conjugirten Paaren, also auch den Büscheln und Schaaren von Kegelschnitten mit nur zwei reellen und mit vier nicht reellen gemeinsamen Elementen (§§. 32, 34). Weiter folgen im Ausbau von Einzelheiten das Princip der Reciprocität als besondere Form des in der Schlussübersicht des Abschnittes A. hervorgehobenen Gesetzes der Dualität (§. 33), die Lehre von der Durchmesserinvolution, von Axen und Asymptoten, nebst der Beziehung der Affinität zwischen Kreis und Ellipse (§. 34), die Theorie der Brennpunkte und Directrixen (§. 35) und endlich die der Osculation von Kegelschnitten, speciell die des Osculationskreises (§. 36). Die allgemeine Untersuchung der Beziehungen zweier Kegelschnitte, welche hier praktisch entbehrlich ist, bleibt unerledigt, bis es möglich ist, sie für reelle und nicht reelle Kegelschnitte gleichzeitig zu entwickeln, d. h. bis zur Theorie von zwei vereinigt liegenden Polarsystemen im dritten Theil (§. 162); nur ein Theil dieser Untersuchung, die Bestimmung des gemeinsamen Tripels, wird früher erfordert und daher in der benöthigten speciellen Form entwickelt, nämlich bei der Theorie der Flächen zweiten Grades respective der Kegelflächen zur Bestimmung der Axen im zweiten Theil (§. 97); diese specielle Form, zu welcher sehr einfache Ueberlegungen führen, wird dann später in der That als identisch mit der allgemeinen erkannt.

Der kurze Abschnitt von der *centrischen Collineation räumlicher Systeme*, der nun folgt, hat in diesem Zusammenhang hervorragende Bedeutung; er gibt die einfachsten Constructionsmethoden (§. 40), die Eintheilung der Reliefs nach den Werthen der Charakteristik — bildliche und nichtbildliche (§. 41), je nachdem dieselbe positiv oder negativ ist —, den Fall der involutorischen centrischen Collineation (§. 42) und die Erörterung der speciellen Fälle der Affinität, Aehnlichkeit, Symmetrie und Congruenz. Die Centralprojection er-

scheint als unendlich dünnes Relief — Anlass zur Unterscheidung sichtbarer und unsichtbarer Figurentheile. Durch *eine* Parallelprojection kann eine Raumform nicht bestimmt werden, dazu ist die Combination derselben mit einer zweiten auf dieselbe oder auf eine andere Ebene erforderlich; es wird gezeigt, dass nur für die orthogonale Parallelprojection die Charakteristik einfach dem Cosinus des Winkels zwischen Bild- und Original-Ebene gleich ist (§. 43), und damit der reelle Vorzug derselben vor andern Parallelprojectionen bezeichnet. Am Schlusse ein Blick auf die allgemeine Bestimmung räumlicher collinearer und reciproker Systeme aus fünf entsprechenden Elementenpaaren; dann zurück zum speciellern Ausbau der Lehre von der *Parallelprojection* (§. 46 f.), zuerst der orthogonalen. Im Ausgang von drei zu einander rechtwinkligen Projectionsebenen und ihren Durchschnittslinien zeigt sich, dass die sechs Halbirungsebenen ihrer Winkel, die vier Schnittlinien derselben zu dreien oder die Halbirungsaxen, und deren durch den Anfangspunkt gelegte Normalebenen für den ersten Zielpunkt der Untersuchung, die Darstellung des ebenen Systems, von entscheidender Bedeutung sind: Sie liefern die Spuren, die Affinitätsaxen zwischen den in derselben Tafel vereinigten Projectionen in Paaren, die Axen- und die Würfel-Punkte, so wie vier Gerade, welche den Letzteren in dem Orthogonalsystem entsprechen, das den Fusspunkt der Normale zur Ebene aus dem Coordinatenanfangspunkt zum Centrum und die Länge dieser Normale zur Distanz hat (§. 51). Im dritten Theil (§. 161, 3 f.) wird dann erkannt, dass die hier elementar entwickelten Relationen ihren Grund in dem Umstande haben, dass die drei Projectionsebenen mit der Normale der Originalebene und mit ihrer Parallelebene durch den Anfangspunkt ein Orthogonalsystem im Strahlenbündel bestimmen, und es ergeben sich bezügliche Vervollständigungen. Ich darf wohl erwähnen, dass die Erkenntniss dieses Zusammenhangs im Jahre 1857 mir die Ueberzeugung gab, das wissenschaftliche Studium der darstellenden Geometrie sei von dem der Geometrie der Lage nicht zu trennen, und dass ich von da ab die Idee dieses Zusammenhangs pädagogisch entwickelt habe, natürlich unter Voranstellung der Centralprojection als der fundamentalen Methode; meine Programmschrift von 1860 „Die Centralprojection als geometrische Wissenschaft“ beschränkt sich zwar auf die Entwicklung der constructiven Elemente und die Anwendungen auf die geradlinigen Flächen, aber sie enthält auch die Idee der Transformationen in der Centralprojection als Quelle der Constructionsvortheile, und sie fügt

zu einer schon früher veröffentlichten Anwendung der Affinitätsaxen die Anmerkung von der Analogie der Winkelhalbirungsebene zwischen zwei Projectionsebenen mit der zweiten Parallelebene der Centralprojection hinzu, die in dem Satze liegt, dass zwei Gerade, Ebenen, Kegel, Regelflächen in diesen Ebenen einen gemeinsamen Querschnitt haben, wenn in Parallelprojection ihre zwei betreffenden Spuren, in Centralprojection ihre Spuren und Fluchtlinien verkehrt zusammenfallen. Besondere Aufmerksamkeit ist noch im Schlussabschnitt des ersten Theils der geometrischen Durchbildung der *orthogonalen* (§. 60) und der *schiefen* (§. 61) *Axonometrie* (Letztere auf Grund des Pohlke'schen Satzes) gewidmet; für die Letztere gibt eine Erörterung Steiners in der „Systemat. Entwickelung" die ausreichende Grundlage, wenn man die entsprechenden Rechtwinkelpaare projectivischer Strahlbüschel zu bestimmen versteht.

Ich kann nun über den *zweiten Theil* ziemlich kurz berichten; wenn er auch in der Anordnung ganz von den früheren Lehrbüchern abweicht, so hat er doch mit ihnen in der Hauptsache das Material gemein, nur mit Ausnahme des ersten Abschnittes. Derselbe stellt zur ebenen Curve sofort die nichtebene oder der Kürze zu Liebe „*Raumcurve*" (§. 63), zeigt als deren natürliche Singularitäten ihre stationären Elemente auf und merkt an, dass die beiden Operationen der *Abwickelung* der developpabeln Fläche in eine ihrer Tangentialebenen und der Bildung der *Richtungskegel* an einem Punkte der Curve als Spitze — Operationen, bei denen jene Singularitäten erhalten bleiben und welche die darstellende Geometrie wesentlich zur Untersuchung dieser Raumformen benutzt — einander genau nach dem Gesetz der Dualität entsprechen; er zeigt die Untersuchung der *Kegel* (§. 64) als übereinstimmend mit der ihrer ebenen Querschnitte bezüglich der projectivischen Eigenschaften und geht daher von der Behandlung der Kegelflächen durch das Problem der Abwickelung (§. 71) — unter genauer aber ganz elementargeometrischer Untersuchung des Gesetzes, nach welchem der Krümmungsradius einer Curve sich bei ihrer Abwickelung mit einer sie enthaltenden developpabeln Fläche verändert (§. 72) — zur gemeinen *Schraubenlinie* (§. 73) als der geodätischen Curve des geraden Kreiscylinders und ihrer Tangentenfläche über. Bei den Kegelflächen ist besonders dem allgemeinen Zusammenhang von zwei beliebigen Querschnitten in centralprojectivischer Darstellung, den Bildern der Asymptoten und den Asymptoten der Bilder und ihrer directen Ableitung mittelst der centrischen Collineation (§. 66), sorgfältige Erledigung gegeben;

bei der Schraubenlinie ist Anlass, von den Singularitäten des Bildes d. i. den Inflexionsstellen respective Doppelpunkten (und im Uebergange von den einen zu den andern stationären Punkten) und den Doppeltangenten, sowie von den Singularitäten der ebenen Querschnitte ihrer entwickelbaren Fläche den Grund der Entstehung und damit die constructive Bestimmung anzugeben. Diese entwickelbare Fläche besitzt ein System von Doppelcurven und die Schraubenlinie eine mehrfach berührende developpable Fläche und zeigt daher namentlich in der axonometrischen und centralen Projection die Relationen der Originalcurve mit der Doppelcurve und beliebigen ebenen Querschnitten der Developpabeln; dem entspringt z. B. die Anregung zur Lösung des allgemeinen Problems: Diejenige developpable Fläche zu bestimmen, welche zwei willkürlich gegebene Raumcurven enthält (§. 74, 4). Die Abwickelung der developpabeln Schraubenfläche zeigt §. 77. Nach einer kurzen Erörterung der hier einschlagenden metrischen Begriffe: Haupt- u. Bi-Normale, Polarlinie (Krümmungsaxe) und Polarfläche, Evolute und Evolvente, rectificirende, cyclificirende etc. Developpable (§. 78) folgt die Lehre von den *Durchdringungen der Cylinder und Kegel* (§. 79), speciell derjenigen vom zweiten Grade (§. 80); zuerst die allgemeine Construction ihrer Punkte und Tangenten, speciell der unendlichen Aeste und Asymptoten, sodann für Kegel zweiten Grades speciell die beiden Formen ihres Zerfallens durch Auftreten von zwei Doppelpunkten, nämlich in zwei Kegelschnitte, wenn die Verbindungsgerade der Doppelpunkte nicht selbst zur Durchdringung gehört, und in eine Gerade und eine Raumcurve dritter Ordnung, wenn es der Fall ist. Diese *Curve dritter Ordnung* wird zunächst in ihren verschiedenen Formen untersucht; man erkennt von ihren allgemeinen Eigenschaften, dass sie keine stationären Elemente, keine Doppelcurve und keine doppelt berührende Developpable besitzen kann und ist dadurch veranlasst, die allgemeinen descriptiven Gesetze aufzusuchen (§. 82 f.), nach welchen aus den Eigenschaften des Bildes der Raumcurve d. h. seinen Charakteren und Singularitäten und aus denen des ebenen Querschnitts speciell der Spur ihrer Tangentenfläche auf die *Charaktere und Singularitäten der Raumcurve und ihrer Tangentenfläche* selbst geschlossen wird, unter Beschränkung jedoch auf die neun allgemeinen Charaktere, welche allein bei den hier zur Untersuchung stehenden einfachen Fällen der Curve dritter Ordnung und der Curve vierter Ordnung erster Art — auch die stationäre Tangente ist hier nicht möglich — hervortreten. Es werden auch die Modificationen angegeben, welche in

diesen Beziehungen für besondere Lagen des Projectionscentrums oder der Schnittebene eintreten, z. B. also (§. 84) die Entstehung der Spitzen erster- und zweiter Art im Bilde einer Curve, später (§. 86, 7) die Endstellen in den Kegelschnittbildern der Curve vierter Ordnung erster Art erklärt. Demnächst folgt die Anwendung, zuerst auf die Fälle der Durchdringung von Kegeln zweiten Grades mit einem Doppelpunkt, der entweder ein Knoten oder isolirt oder ein stationärer Punkt ist — im letzteren Falle wird der Doppelkegelschnitt der Tangentenfläche, die involutorische Collineation derselben und der Curve für die nicht singuläre Kegelspitze als Centrum und die Ebene der Doppelcurve als Ebene der Collineation, sowie die Collineation und Reciprocität aller solcher Curven und ihrer Developpabeln unter einander nachgewiesen (§. 85). Ein Theil dieser Eigenschaften wird endlich als allgemein den *Curven vierter Ordnung erster Art* ohne singuläre Punkte angehörig erwiesen durch nähere Untersuchung des bekannten Falles der Durchdringung zweier Kegel zweiten Grades, welche eine gemeinsame Hauptebene haben (§. 86); es ergibt sich, dass im Allgemeinen durch eine solche Curve vier Kegel zweiten Grades, doppelt projicirende Kegel derselben, hindurchgehen, und dass ihre developpable Fläche sich in vier ebenen Curven vierter Ordnung sechster Classe selbst durchdringt, die in den durch die Tripel jener Kegelspitzen bestimmten Ebenen liegen; man findet einfache Regeln, nach welchen diese Ebenen und die fehlenden beiden Kegelspitzen oder das Quadrupel in jedem Falle construirt werden, sowie Regeln zu ihrer Benutzung zur genauen und raschen Construction der Curve und ihrer Tangentenflächen selbst. Frézier in seinem „Traité de stéreotomie“ (Liv. I, Ch. VI bis VIII der Ausgabe von 1754) hat, wie ich glaube, zuerst und bis zu meinem Buche auch zuletzt die Symmetrieverhältnisse dieser Curven betrachtet, indem er, man kann sagen, um kurz zu sein, die Querschnittscurven von zwei Quadrupelebenen mit den Kegelflächen zu einer Namengebung der einzelnen Fälle benutzt. Die Tangentenfläche der Curve zieht er nicht in Betracht und die Zusammenfassung zu einer allgemeinen Theorie war auch seinem Zeitgenossen D. Bernoulli in Basel, an den er sich gewandt, nicht gelungen; zu ihrer Entdeckung erschien die allgemeinere Auffassung vom Standpunkte der Theorie der Flächen zweiten Grades nöthig, und sie blieb Poncelet's berühmtem „Supplément“ vorbehalten.

Der Abschnitt B. gibt nach Vorausschickung allgemeiner Begriffe und Erklärungen die constructive Theorie und Behandlung

der *Flächen zweiten Grades*, und zwar zuerst die der geradlinigen (§. 89 f.) unter Benutzung der beiden Regelschaaren derselben; sodann die allgemeine Theorie auf Grund der involutorischen Collineation solcher Flächen zu sich selbst für jeden Punkt des Raumes (§. 94) als Centrum oder Pol und seine Polarebene als Collineationsebene. Ich hebe, um den Charakter der Behandlung näher zu bezeichnen, die strenge Construction der Schnittpunkte und Tangentialebenen eines einfachen Hyperboloids mit einer Geraden (Tafel VII); die Bestimmung der Hauptaxen der Flächen zweiten Grades aus zwei conjugirten Diametralschnitten (Tafel X) nebst Angabe der speciellen Form, welche sie bei Rotationsflächen annimmt; die Behandlung der Flächen zweiten Grades mit elliptischen Punkten als Reliefs der Kugel in §. 98, und die Erledigung des Problems der gemeinsamen Developpabeln von zwei Flächen zweiten Grades in §. 101 hervor, welche natürlich die Kenntniss respective Bestimmung des gemeinsamen Quadrupels harmonischer Pole (§. 100) ebenso wie dasjenige der Durchdringungscurve erfordert. Am Schlusse des Abschnittes wird die doppelte Entstehung einer krummen Fläche als Ort von Punkten und als Enveloppe von Ebenen allgemein erwiesen (§. 102), wobei sich die Theorie von der Involution der conjugirten Tangenten in einem Punkte der Fläche, die Lehre von den Haupttangentencurven und die Grundeigenschaften der geodätischen Linien und der Krümmungslinien derselben ergeben (§. 103). So schliesst der Abschnitt mit dem unendlich dünnen Bündel der Normalen einer Fläche mit seinen beiden Doppelgeraden.

Es folgt der Abschnitt von den *windschiefen Regelflächen*, beginnend mit der doppelten Erzeugung solcher Flächen aus drei Leitcurven oder Leitdeveloppabeln; für diese wird die Regel von der Bestimmung des Grades (§. 106), die Construction der Berührungsebenen und Berührungspunkte durch die Projectivität (§. 107) (sie gestattet eine interessante Anwendung der Ebene $H_{x'}$, für Tangentialebene eines Punktes und Normalebene der Erzeugenden als xz und xy — siehe Zusatz zu p. 415, 6 —, welche auch M. Mannheim ausgedehnt und glücklich benutzt hat), sodann die der Hyperboloide und Paraboloide, welche längs Erzeugenden berühren, der Strictionslinie (§. 108), der singulären Erzeugenden etc. entwickelt, werden auch die Aufgaben über ihre Beziehungen zu den Elementarformen, zu developpabeln und krummen Flächen erörtert. Die Beispiele der beiden windschiefen Schraubenflächen, der Wölbflächen des schiefen Durchganges und des Eingangs in den runden Thurm,

das schräge Kreisconoid, das Cylindroid und das Normalenbündel dienen zur Erläuterung. Zuletzt wird die Regelfläche dritten Grades in ihren beiden allgemeinen Hauptformen dargestellt und theoretisch untersucht; die Construction führt auf ihre projectivischen Erzeugungsweisen; für sie ist das längs einer Erzeugenden osculirende Hyperbolid streng construirt und sie gibt endlich Anlass zur Entstehung der Curve vierter Ordnung zweiter Art.

Bei den *Rotationsflächen* (§. 115 f.) bietet zunächst das Problem ihrer Darstellung in Centralprojection eine nützliche Anwendung der Construction der Kegelschnitte aus Pol und Polare mit der Involution harmonischer Pole in dieser und den Endpunkten der zu ihr parallelen Sehne durch jenen dar: Die Parallelkreise erscheinen als ein System von Kegelschnitten, welche in der Fluchtlinie der Normalebenen zur Axe der Fläche ein und dieselbe durch die Rechtwinkel-Involution am zugehörigen Collineationscentrum bestimmte Involution harmonischer Pole haben; ihre zu derselben parallelen Sehnen liefert das Bild desjenigen Meridians, für welchen die Axe die Falllinie zur Bildebene ist. Unter den üblichen Problemen bieten wieder für die Centralprojection der ebene Querschnitt und der Berührungskegel aus gegebenem Punkte durch ihre orthogonalen Symmetrieen Gelegenheit zu vortheilhafter Verwendung der Gesetze der Involution ebener und räumlicher Systeme. Zu den gewöhnlichen Problemen der *Schattenconstruction*, welche in der Bestimmung der Berührungskegel und der Normalen der Flächen vom Leuchtpunkte aus aufgehen, werden für paralleles Licht und in parallelprojectivischer Darstellung die der *Beleuchtungsconstructionen* (§. 124 f.) hinzugefügt, die Bestimmung der Linien gleicher vorgeschriebener Intensität der objectiven Beleuchtung, d. h. der Berührungscurven der Flächen mit umschriebenen Developpabeln, deren Richtungskegel Rotationskegel von gegebenem Winkel um den Lichtstrahl als Axe sind; ihre Construction wird für alle die behandelten Flächenarten hier auf Grund sehr einfacher Betrachtungen erledigt. Immer bieten die Rotationsflächen im Allgemeinen mehr als andere das Beispiel rein graphischer so zu sagen empirischer Behandlungsweise; nur das System der zu behandelnden Probleme und der Constructionsmittel sondert sich auch hier in zwei einander dual gegenüberstehende Gruppen.

Wenn nun im *dritten Theil* die rein wissenschaftliche Entwickelung der Untersuchung ausschliesslich wieder aufgenommen wird, so ist durch alles Vorhergehende dieser Darstellung der Geometrie der Lage von vornherein eine von dem Hergebrachten ganz

abweichende Situation bereitet und eine in mancher Beziehung eigenthümliche Aufgabe gestellt. Ich entspreche derselben mit der gebotenen Kürze wesentlich durch die Anwendung der *gemischten* die synthetisch construirenden und die analytischen Untersuchungsmittel *combinirenden Methode.* Zu ihr führt sofort die Wiederaufnahme der Untersuchung hin, obwohl sie naturgemäss einer sorgfältigen *Prüfung der Fundamente* und somit der von den Voraussetzungen der Elementargeometrie unabhängigen Begründung der Projectivität gewidmet ist; sie eröffnet mit der wesentlich von v. Staudt gegebenen von den perspectivischen Dreiecken etc. zur harmonischen Theilung und zur Projectivität und Involution*) der Elementargebilde erster Stufe führenden Ableitung (§. 133 f.); sie schliesst an die Involution dieser Elementargebilde in Zusammenfassung und Weiterbildung von vorher schon vielfach benutzten Ergebnissen die *geometrische Theorie der imaginären Elemente* an (§. 135 f.), um dieselbe soweit zu führen, dass dem Satze Credit gegeben ist, wonach die Projectivität der Gebilde die projectivische Einordnung ihrer imaginären Elemente mit umfasst und durch solche Elemente in gleicher Weise bestimmbar ist. Um die imaginären Elemente vollends einzubürgern, wird später (§. 151, 7 f.) gezeigt, wie aus dieser geometrischen Theorie der analytisch geometrische Ausdruck derselben und umgekehrt aus diesem ihre constructive Bestimmung hervorgeht. Auf diese Untersuchung des Imaginären gründet sich zunächst die genaue *Zählung* der reellen und der imaginären Elemente in den Elementargebilden der vier Stufen, welche die Möglichkeit der projectivischen Correspondenz der Elemente zwischen zwei solchen Gebilden abstract beweist. Die Uebereinstimmung der Ergebnisse der neuen Entwickelung mit denen der ursprünglichen auf die Elementargeometrie und Trigonometrie gegründeten gibt zugleich die Gewähr dafür, dass diese und die projectivische Geometrie, insofern sie an der perspectivischen Raumansicht festhält, mit einander in Einklang stehen. Und dazu kommt nun noch der Nachweis, dass aus den fundamentalen geometrischen Bestimmungsmethoden der Raumelemente die analytischen sich ganz direct vollständig und allgemein ergeben. Dieselben Projectivitätsrelationen oder Doppelverhältnissgleichheiten, durch welche aus drei, vier und fünf unabhängigen Elementenpaaren

---

*) Hier ist auf p. 508 am Schlusse von 11. im Druck die Zeile weggeblieben, welche den Begriff der Charakteristik allgemein begründet:

Also $(F_1\, F_2\; A\, A') \barwedge (F_2\, F_1\; B'\, B) \barwedge (F_1\, F_2\; B\, B')$. (Charakteristik Δ §. 19).

in zwei projectivischen Gebilden erster zweiter und dritter Stufe zu einem beliebigen Element des einen Gebildes das entsprechende des andern construirt wird, führen sofort (§. 138 f.) zur Bestimmung eines Elements in einem Elementargebilde erster, zweiter, dritter Stufe in Bezug auf drei, vier und respective fünf feste Elemente desselben durch Zahlen, die ich als die *projectivischen Coordinaten* dieses Elements bezeichne, weil sie dieser ihrer Entwickelung gemäss beim Uebergang zu einem projectivischen System nicht geändert werden. Ich leite aus ihnen durch rein projectivische Prozesse die *Gleichungen* der Elemente oder *die Bedingungen des Ineinanderliegens* von Punkt und Gerade, Strahl und Ebene, Punkt und Ebene als lineare homogene Gleichungen mit zwei, drei und vier Variabeln ab, deren Coefficienten zugleich die Coordinaten der dargestellten Elemente sind, wenn man noch die harmonische Trennung der beiderlei Einheits-Elemente durch die Fundamental-Elemente voraussetzt. Die Construction eines durch seine Coordinaten oder also durch seine Gleichung gegebenen Raumelements erfolgt im Gebilde erster Stufe als die Construction des vierten Elementes zu drei gegebenen aus seinem durch das Verhältniss seiner Coordinaten bestimmten Doppelverhältniss; und sie erfolgt durch eine zwei- respective dreimalige Wiederholung dieser Construction mit den Verhältnissen von zwei der drei Coordinaten zur dritten respective vierten in den Gebilden zweiter und im Gebilde dritter Stufe. Die Erwartung, dass im Gebilde vierter Stufe, d. h. für die gerade Linie als Raumelement, die vierfache Anwendung dieser Construction zur Bestimmung aus den Coordinaten genügen müsse, leitet zur Benutzung von zweien der projicirenden Ebenen der Geraden aus den Fundamentalpunkten oder von zweien ihrer Durchstosspunkte mit den Fundamentalebenen, als welche je durch zweifache Anwendung jener Construction bestimmbar sind; und es ergeben sich als die zweimal drei Coordinaten der ersteren die Strahlencoordinaten p_{ik} und als die zweimal drei Coordinaten der letzteren die Strahlencoordinaten π_{ik}; aus dem Umstande aber, dass diese Durchstosspunkte in jenen projicirenden Ebenen liegen, folgt zugleich die Gruppe der diese Coordinaten verbindenden Relationen, nämlich die Proportionalität der p_{ik} und π_{im} und der Nullwerth der Summe der Producte der drei complementären Paare der einen wie der andern (§. 145).

Besondere Festsetzungen über die Lage des Einheitspunktes oder der Einheitsgeraden respective Einheitsebene in Bezug auf die Fundamentalpunkte führen auf diejenigen Formen der allgemeinen

Coordinatenbestimmung, die man als Dreilinien- und Vierebenen- respective Dreipunkt- und Vierpunkt-Coordinaten und als Flächen- respective Volumen-Coordinaten bezeichnet hat; die Annahme, dass eines der Fundamentalelemente unendlich fern liege, gibt specielle Coordinatensysteme, unter denen die *Cartesischen* und die *Plücker'schen Coordinaten* des Punktes und der Geraden respective des Punktes und der Ebene der Annahme entsprechen, dass die eine Fundamentallinie respective Fundamentalebene unendlich fern sei. Diese Letzteren auf die Bestimmung der geraden Linie angewendet liefern die sechs Coordinaten der Geraden in derjenigen Form, in welcher sie von Plücker 1865 zuerst gegeben wurden, indess die allgemeine Entwickelung die geometrische Begründung und Deutung der algebraischen Abkürzungssymbolik z. B. gibt, als welche Cayley 1859 zuerst die sechs Coordinaten der geraden Linie im Raum eingeführt hatte.

Von den linearen homogenen Gleichungen zu den allgemeinen homogenen Gleichungen zwischen projectivischen Coordinaten überführend, schliesst der erste Abschnitt des dritten Theils mit der geometrischen Deutung solcher Gleichungen und ihrer Combinationen: Ebene Curven und Kegelflächen, krumme Flächen, Liniencomplexe, Congruenzen, Regelflächen, Raumcurven, entwickelbare Flächen etc.

Im unmittelbaren Anschluss hieran beginnt der *zweite Abschnitt* mit der Erörterung über die Anzahl der linearen Bestimmungselemente solcher Raumformen d. i. über die Gliederanzahl ihrer Gleichungen und mit der daraus entspringenden Feststellung der Begriffe von *Gebilden erster, zweiter* etc., *allgemein k ter Stufe* aus solchen Formen wie ihrer Gleichungen (§. 147), welche diejenigen der Elementargebilde der gleichhohen Stufen als specielle Fälle umfassen. Daraus entspringt die Frage nach der *geometrischen Bedeutung der Parameter in der Gleichung des Gebildes.* Die Grundlage für die allgemeine Beantwortung derselben wird gefunden (§. 148) durch die geometrische *Deutung des Parameters im Elementargebilde erster Stufe* als *negatives Theilungsverhältniss* des beweglichen Elementes in Bezug auf die bestimmenden oder fundamentalen Elemente des Gebildes; eine ihrer ersten Anwendungen ist die Bestimmung des Doppelverhältnisses einer Geraden mit einem Tetraeder aus ihren sechs auf dasselbe bezogenen Coordinaten zum neuen Erweis des schon früher abgeleiteten Satzes, dass die Durchstosspunkte der Geraden mit den Flächen und ihre projicirenden Ebenen aus den Ecken Gruppen von gleichen entsprechenden Doppelverhältnissen sind. Diese Deutung

liefert, angewendet auf die Beziehungen der Elementargebilde erster Stufe zu Curven und Flächen die *Theorie der Polaren* (§. 149) und mit dieser den Satz, dass die gleichnamigen Polaren eines Elementes in Bezug auf die Formen eines Gebildes $k$ter Stufe ein Gebilde $k$ter Stufe mit den nämlichen Parametern, dass also die linearen Polaren ein Elementargebilde dieser Stufe mit denselben Parametern bilden; sodass die verlangte geometrische Deutung der Parameter für die allgemeinen Gebilde mit der Deutung derselben für die Elementargebilde schon erledigt ist.

Damit ist es an der Zeit, die *Parametergleichungen der Projectivität* der Elementargebilde erster Stufe und im Falle des Ineinanderliegens derselben die Parametergleichung ihrer *Involution* aufzustellen und zu discutiren (§. 151), um ihre Coefficienten geometrisch zu deuten und dadurch die möglichen Vereinfachungen zu erkennen.

Der Uebergang von diesen Parametergleichungen zu den *Coordinatengleichungen der Projectivität* zeigt dann sofort, dass die *lineare Substitution* für die Variabeln der allgemeine algebraische Ausdruck für den Uebergang von einem System zu einem ihm projectivischen System ist; man erhält so (§. 152) die allgemeinen Gleichungen der Collineation und der Reciprocität für die Gebilde der drei ersten Stufen und sofort auch die geometrische Deutung ihrer sämmtlichen Coefficienten, d. h. den Zusammenhang mit dem Vorgange der Constructionen; und im speciellen Falle der Congruenz der Systeme in deckender Lage auch die Transformation der Coordinaten (§. 153), im allgemeinen Falle die Einsicht, dass die Algebra der linearen Substitutionen die analytische Geometrie der projectivischen Eigenschaften enthält, eine Einsicht, welche hier durch Anwendungen auf Curven und Flächen zweiten Grades erläutert wird (§. 154).

Die Untersuchung wendet sich (§. 155) zu den *Verbindungen projectivischer Gebilde* erster Stufe *und ihren Erzeugnissen*, den Curven, Kegeln und windschiefen Regelflächen zweiten Grades und aus den Elementargebilden, wie zu denen aus projectivischen Gebilden aus Curven oder Flächen, insbesondere auch den Curvenerzeugungen aus projectivischen Involutionen von Büscheln oder Reihen. Sie leitet sodann weiter aus der dabei stattfindenden perspectivischen Lage der Gebilde mit den Erzeugnissen die projectivische Beziehung von Element zu Element zwischen Gebilden und Erzeugnissen und zwischen je zwei Erzeugnissen ab und kommt von diesen Projectivitäten zu neuen Erzeugnissen: Curven, entwickelbare Flächen und windschiefe Regelflächen; ein näher untersuchtes Beispiel von

allgemeiner Art ist die Erzeugung der Curve vierter Ordnung zweiter Art aus einer Kegelfläche zweiter Classe und einer ihren Tangentialebenen projectivisch zugeordneten Regelschaar (§. 157); das nützlichste specielle ist die projectivische Zuordnung der Regelschaaren eines einfachen Hyperboloids; eine genaue Figur verdeutlicht die zahlreichen Relationen, welche auf die Lehre von den projectivischen Reihen und Tangentenschaaren am Kegelschnitt und auf die Theorie der doppeltberührenden Kegelschnitte führen. Eine daran sich anschliessende Betrachtung der höhern Involutionen beendigt den Abschnitt. Das wichtige allgemeine *Princip der projectivischen Verbindung der Erzeugnisse zu neuen Erzeugnissen* wird bei den folgenden Stufen nicht weiter systematisch entwickelt; das hier Gegebene kann genügen, um dazu anzuleiten.

Der *Schlussabschnitt* untersucht zuerst die projectivischen Elementargebilde zweiter Stufe uud die Erzeugnisse ihrer Verbindung: Die *in einander liegenden collinearen Ebenen und Bündel*, ihre sich selbst entsprechenden Elemente, die bekannte Ueberführung in die perspectivische Lage unter neuem Gesichtspunkt (§. 159); die *in einander liegenden reciproken Gebilde zweiter Stufe* (§. 160), ihre einander involutorisch zugeordneten drei Elementenpaare, Pol- und Polar-Kegelschnitte und Kegel und ihre Beziehungen zu der involutorischen Verwandtschaft zweiten Grades, in welcher die einander doppelt conjugirten Punkt- und Linien-Paare der Gebilde stehen; sodann die Ueberführung der reciproken Systeme aus der allgemeinen in die involutorische Lage oder *das Polarsystem* und die Eigenschaften desselben mit besonderer Hervorhebung des Orthogonalsystems, dessen Directrixkegel nach dem imaginären Kugelkreis im Unendlichen geht, und seiner Beziehungen zur Metrik (§. 161). Die offenbare Analogie der Eigenschaften des Polarsystems im Gebilde zweiter Stufe zur Involution der Gebilde erster Stufe führen weiter zur Untersuchung von *zwei in einander liegenden Polarsystemen* (§. 162), ihres gemeinsamen Tripels harmonischer Pole und Polaren, ihrer drei Paare von Strahlen mit einerlei Involutionen harmonischer Pole, nnd drei Paare von Punkten mit einerlei Involutionen harmonischer Polaren, also zur Erledigung einer Hauptgruppe unter den Beziehungen von zwei Kegelschnitten in der allgemeinsten Form; in Anwendung auf das Orthogonalsystem liefert dies die Hauptstücke der Theorie der Kegel zweiten Grades.

Zwei *nicht in einander liegende reciproke Gebilde* zweiter Stufe erzeugen eine Fläche zweiten Grades durch Verbindung ihrer ent-

sprechenden Elementenpaare; es wird dadurch sofort auch die eindeutige ebene Abbildung dieser Flächen vermittelt, und Anlass gegeben zur analytischen Darstellung des Erzeugnisses reciproker Gebilde zweiter Stufe überhaupt (§. 163). Die Untersuchung wendet sich endlich zu den Erzeugnissen von zwei *nicht in einander liegenden collinearen Gebilden zweiter Stufe*, den Raumcurven dritter Ordnung und den developpabeln Flächen dritter Classe und den mit ihnen verbundenen Strahlencongruenzen dritter Classe erster Ordnung und dritter Ordnung erster Classe, insbesondere auch dem Nachweis der Identität der Curve dritter Ordnung mit der Rückkehrkante der developpabeln Fläche dritter Classe (§. 165). Im Anschluss daran werden die projectivischen Verbindungen zwischen den Flächen zweiten Grades und den Strahlencongruenzen mit Elementargebilden zweiter Stufe und unter sich, so wie zwischen Curven dritter Ordnung und Developpabeln dritter Classe mit Elementargebilden erster Stufe, mit den früheren Erzeugnissen von einfach unendlicher Elementenzahl und unter einander überblickt und ihre Parameterdarstellung begründet.

Für die *Elementargebilde dritter Stufe* wird zuerst (§. 166) die *Collineation* und der *tetraedrale Complex* nebst den beiden speciellen Fällen der *collinearen Involution*, der *centrischen* und der *geschaarten*, sodann die *Reciprocität* untersucht (§. 168) und auch die Letztere zu vollständiger Erledigung der fundamentalen Fragen geführt; man weist die vier Paare der sich involutorisch entsprechenden Elemente und ihre Gruppirung zum Tetraeder nach und erhält durch die Wahl desselben zum Fundamentaltetraeder die einfachsten Gleichungen der Reciprocität und natürlich auch der Pol- und der Polar-Fläche. Die Betrachtung der doppelt conjugirten Elemente ordnet den Punkten und den Ebenen des Raumes je einen tetraedralen Complex in Bezug auf das Tetraeder der involutorischen Elemente zu und die Verbindungsebenen und Schnittpunkte entsprechender Elemente in dieser Zuordnung erlauben die directe Construction jenes Tetraeders durch diejenigen beiden Gegenkanten, welche der Pol- und der Polarfläche nicht angehören, und damit auch die Construction dieser beiden Flächen selbst; endlich wird deren Verwendung zur Construction entsprechender Elemente der Reciprocität gezeigt.

Es folgt die Theorie *des räumlichen Polarsystems* (§. 169) und die Ueberführung reciproker Räume aus der allgemeinen Lage in die involutorische; die Untersuchung von *zwei Polarsystemen*, die kurze Behandlung der Büschel und Schaaren von Flächen zweiten Grades mit einer besonders eingehenden constructiven Erörterung der

Schaar der Confocalen mit den Doppelcurven ihrer gemeinsamen Developpabeln im endlichen Raum; endlich die involutorische Reciprocität des *Nullsystems* und der *lineare Complex* (§. 170).

Den so untersuchten projectivischen Verbindungen zu zweien schliesst sich zuletzt als Vertreter der projectivischen Verbindungen zu dreien die Untersuchung der *Fläche dritter Ordnung aus drei collinearen Bündeln* (§. 171) mit der eindeutigen ebenen Abbildung derselben an; ihre analytische Ausdrucksform erweitert die Erzeugung sofort auf projectivische Flächenbündel und das Buch schliesst mit einem Ueberblick und Ausblick auf die projectivischen Verbindungen der Elementargebilde zu vier, fünf und sechs und auf die Möglichkeit analoger Verbindungen von Gebilden $k$ter Stufe aus Flächen — als dem wohl natürlichen Abschluss dieser Ideenentwickelung.

Ich denke, es ist schon aus diesem Ueberblick ersichtlich, dass die Entwickelung der Geometrie der Lage aus der engen Verbindung mit der darstellenden Geometrie wesentliche Vortheile empfängt, die ihrerseits der Elemente der Geometrie der Lage selbst bedarf, um nicht bei verschiedenen wichtigen Gelegenheiten Sätze ohne Beweis oder auf Grund von ihrer Methode gänzlich fremdartigen Beweisen benutzen zu müssen. Dass die Verbindung beider Disciplinen eine natürlich-organische und nicht etwa nur durch locale Verhältnisse oder in individueller Anschauung begründete ist, dafür bot allerdings schon die Geschichte ihrer Entwickelung die deutlichsten Belege dar; aus dieser habe auch ich sie zuerst gewonnen. Die Durchführung war aber nicht möglich ohne vielfache Aenderungen und Neuschöpfungen in allen Theilen beider Wissenschaftsgebiete.

Einiger Unterlassungen will ich noch hier gedenken, die, obwohl zu Gunsten der Kürze gemacht, mir doch auch bei der jetzigen Durchprüfung meines Buches wiederum als solche erschienen sind. Ich rechne dahin, dass die Lehren von der Affinität, Aehnlichkeit und Congruenz der Gebilde zweiter und dritter Stufe nicht trotz der vielfachen Beiträge der beiden ersten Theile noch in zusammenfassender Wiederholung im dritten Theil bei §. 159 und §. 167 als Specialfälle der Collineation eingehend behandelt worden sind — eine solche Behandlung hätte auch Anlass gegeben zur Erörterung der Specialitäten, welche den Erzeugnissen der projectivischen Verbindung solcher Gebilde eigen sind, also den bezüglichen Congruenzen und Complexen, Curven dritter Ordnung, Developpabeln dritter Classe etc., sie bietet für die Anwendung der gemischten Methode ein ausge-

zeichnet lehrreiches Beispiel in den Chasles'schen Sätzen über die Bewegung starrer Systeme. Auch hätten die Complexe, welche sich bei so wichtigen Gelegenheiten wiederholt darbieten, vielleicht noch etwas eingehender behandelt werden dürfen. Der Uebergang von den Parameter- zu den Coordinaten-Gleichungen konnte weiter verfolgt werden. Oder es hätte bei der Theorie von zwei vereinigten Polarsystemen in der Ebene (§. 162) auf die noch nirgends angegebenen interessanten Beziehungen der Tangenten der Directrixkegelschnitte in den gemeinschaftlichen Punkten zum gemeinsamen Tripel und damit auf die Verbindung dieser Lehre mit den Kegelschnitten F und Φ des §. 154 eingegangen werden können, etc. Aber ich habe auf die Vollständigkeit und Systematik der Ideenentwickelung innerhalb des behandelten Gebietes mehr Werth gelegt als auf die des Materials, an welchem sie darzustellen war.

So mag nur noch erwähnt werden, dass über 1500 methodisch geordnete, fast durchweg in eigener Lehrerfahrung erprobte Aufgaben und Beispiele für alle Stufen der Uebung die Entwickelung begleiten; die beiden letzten betreffen die Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten und ihre eindeutige ebene Abbildung durch Inversion, sowie die Congruenz der Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte, ein räumliches Analogon der Curve dritter Classe mit Doppeltangente, der allgemeinen Form der Steiner'schen Hypocycloide (sie wollen überall bis zur eignen Untersuchung hinleiten); ferner, dass über die zu vergleichenden Quellen ein Literaturverzeichniss (p. 731—743) getreue Auskunft gibt, wo auch die ältere Geschichte der darstellenden Geometrie nähere Berücksichtigung gefunden hat; und endlich, dass ein alphabetisches Sachenregister (p. 744—754) zur Bequemlichkeit des Nachschlagens hinzugefügt ist.

Zürich-Unterstrass. Wilh. Fiedler.

W. Fiedler. Notiz über algebraische Raumcurven, deren System zu sich selbst dual oder reciprok ist. (Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. 20. Jahrg. p. 173—79.)

Die einundzwanzig Charaktere des Systems einer Raumcurve — insofern wir dazu auch die bestimmenden Charaktere der sie doppelt berührenden entwickelbaren Fläche und die der Doppelcurve ihrer

eigenen Tangentenfläche rechnen — wie es geschehen muss —, sind bekanntlich durch vierzehn Gleichungen mit einander verbunden, welche ihre darstellend geometrischen Beziehungen ausdrücken. Die Notiz entwickelt, dass es Raumcurven aller Ordnungen gibt, deren System zu sich selbst dual ist, d. h. bei welchen einander gleich sind: Ordnung der Curve und Classe ihrer Tangentenfläche, Ordnung der Doppelcurve und Classe der doppelt berührenden Developpabeln, Zahl der stationären Punkte und der stationären Schmiegungsebenen der Curve, Zahl der Doppelpunkte und Doppelschmiegungsebenen derselben, Zahl der stationären Punkte der Doppelcurve und der stationären Ebenen der doppelt berührenden Developpabeln, der dreifachen Punkte der erstern und der dreifachen Ebenen der letztern, der Classe von jener und der Ordnung von dieser; die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte der Curve und (nach einem uneigentlichen Ausdruck, den ich der Kürze wegen mir erlaube) der scheinbaren Doppelebenen der Developpabeln, die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte der Doppelcurve und der scheinbaren Doppelebenen der doppelt berührenden Developpabeln.

Solche Curven sind die Raumcurve dritter Ordnung und die Raumcurve vierter Ordnung erster Art mit Spitze (Salmon 1849), und die Curve vierter Ordnung zweiter Art mit zwei stationären Tangenten (Cayley 1865). Hier werden die sämmtlichen Curven fünfter und sechster Ordnung aufgezählt, welche dieselben Eigenschaften besitzen und Beispiele von den entsprechenden Curven der Ordnungen sieben bis neun gegeben, speciell die vom Geschlecht Null unter ihnen. Ich zeige, dass unter den Curven fünfter Ordnung allein noch eine Species*) von so vollständiger Dualität des Systems auftritt, wie sie die Cayley'sche Species der Curven vierter Ordnung zweiter Art besitzt; eine Curve nämlich, bei der zu allem Vorigen auch die Ordnung und Classe die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte und der stationären Punkte bei der Originalcurve und der Doppelcurve ihrer Tangentenfläche übereinstimmen, während zugleich diese Doppelcurve keine dreifachen Punkte enthält. Das Problem wird in diesem Falle bestimmt, man erhält sieben Gleichungen für ebenso viele Unbekannte, welche nur diese Lösungen zulassen. Diese beiden sind also die einzigen algebraischen Raumcurven, welche den

*) Sie kommt wohl zuerst vor — jedoch nur mit den 13 Charakteren, die man damals kannte — in der Abhandlung von Schwarz „Crelle's Journal" Bd. 64, p. 14.

Doppelcurve ihrer Developpabeln und der Rückkehrkante ihrer doppelt berührenden Developpabeln gleichartig sind, so dass sie durch diese und die aus ihnen in gleicher Art entspringenden, etc. in steter Selbstwiederholung den Raum anfüllen. Man weiss, dass die Schraubenlinie dasselbe nur hinsichtlich der Doppelcurve ihrer Developpabeln thut.

Zürich-Unterstrass. Wilh. Fiedler.

E. Hess: Ueber zwei Erweiterungen des Begriffs der regelmässigen Körper. (Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg. 1875. S. 1—20.)

I. Die *erste* Erweiterung des Begriffs der regelmässigen Körper besteht darin, die Beschränkung, dass die Oberfläche eines solchen Körpers *continuirlich* sein soll, aufzuheben.

Die Betrachtung der höheren Arten der *ebenen regulären Polygone* führt bereits darauf, ein System von p concentrischen n Ecken der $a$ten Art, deren Umfang continuirlich ist und deren Kanten als innersten Flächentheil ein reguläres pn Eck der 1ten Art einschliessen, während zugleich die Eckpunkte vermöge ihrer Verbindung durch die äussersten Diagonalen ein reguläres pnEck der 1ten Art bilden, als ein reguläres pnEck der paten Art mit *discontinuirlichem Umfange* aufzufassen.

Analog lassen sich auch im *Raume* die möglichen Systeme, welche durch entsprechende concentrische Anordnung der regulären Polyeder mit continuirlicher Oberfläche entstehen, als *reguläre* Körper mit *discontinuirlicher Oberfläche* ansehen.

Ein solches discontinuirliches, reguläres Polyeder kann nur aus einem der Platonischen Polyeder *entweder* durch passende Erweiterung der Grenzflächen *oder* durch Legen von Diagonalebenen erhalten werden. Denn *einmal* müssen die Grenzflächen solcher Polyeder als innersten Körpertheil (innerste Zelle) ein Platonisches Polyeder einschliessen, und *zweitens* müssen die Ecken so auf einer Kugel liegen, dass sie, durch Ebenen verbunden, gleichfalls ein Platonisches Polyeder bilden. Bemerkenswerth ist, dass die eine dieser beiden Eigenschaften hier nicht, wie in der Ebene, die andere bedingt.

Nach diesen Festsetzungen ergeben sich als mögliche discontinuirliche, reguläre Polyeder nur *drei*, nämlich die concentrisch-regelmässigen Anordnungen des regulären Tetraeders zu 2, zu 5 und zu 10.

Der erste dieser Körper (*Keplers* stella octangula) lässt sich aus dem regulären Octaeder oder dem Würfel, die beiden anderen aus dem Icosaeder oder dem Pentagondodecaeder leicht herleiten. Die beiden Systeme von je 5 concentrischen regulären Tetraedern, die aus dem Icosaeder oder dem Pentagondodecaeder entstehen und die sich, während bezüglich ihre Eckpunkte und die Ebenen ihrer Grenzflächen zusammenfallen, zu einander wie rechts und links verhalten, bilden, während jedes von ihnen ein discontinuirlicher, regulärer Körper ist, *zusammen* ein System von 10 concentrischen regulären Tetraedern, den dritten der erwähnten Körper. Bei demselben fällt in jedem der 20 Eckpunkte, die den Ecken eines Pentagondodecaeders entsprechen, je eine Ecke des ersten und zweiten Systems, und ebenso in jeder der 20 Grenzflächen (des innern Icosaeders) je eine Grenzfläche des ersten und zweiten Systems zusammen.

Dieser letztere Körper lässt sich auch durch 5 Systeme von je 2 sich regelmässig kreuzenden Tetraedern gebildet ansehen, oder endlich auch als ein durch 20 Flächen begrenztes 20Eck, wobei jede Grenzfläche als ein aus zwei sich kreuzenden regulären Dreiecken bestehendes (discontinuirliches) Sechseck der 2ten Art, jede Ecke als eine durch zwei sich kreuzende reguläre, dreiflächige Ecken gebildete (discontinuirliche) sechsflächige Ecke der 2ten Art zu betrachten ist. Nach dieser letzten Auffassung sind die Grenzflächen und Ecken dieses Körpers, der im Uebrigen alle Eigenschaften eines regulären Polyeders besitzt, nicht in dem üblichen Sinne regulär — ein Umstand, der für die zweite, unter II zu besprechende Erweiterung des Begriffs eines regelmässigen Körpers von Bedeutung ist.

Bei den bisher festgehaltenen Definitionen sind die erwähnten drei Systeme von regulären Tetraedern, welche sich selbst polarreciprok in Beziehung auf eine concentrische Kugel entsprechen, die einzig möglichen discontinuirlichen, regulären Polyeder. Denn die allein noch in Betracht kommenden Systeme von je 5 regulären Octaedern und je 5 Würfeln, die sich auf bekannte Weise aus dem Icosaeder oder Pentagondodecaeder herleiten lassen, besitzen immer nur je eine der beiden oben erwähnten Eigenschaften.

II. Die zweite Erweiterung des Begriffs eines regelmässigen Körpers besteht darin, einen regelmässigen Körper als einen solchen

zu definiren, der *zugleich gleicheckig* und *gleichflächig* ist, der also lauter gleiche (congruente oder symmetrisch gleiche), aber nicht nothwendig (im üblichen Sinne) *reguläre* Ecken hat und von lauter gleichen (congruenten oder symmetrisch gleichen), aber ebenfalls nicht nothwendig *regulären* Flächen begrenzt ist.

Die *gleicheckigen* Polyeder, deren *erste* Arten zuerst *Hessel* betrachtet hat, und die ihnen in Beziehung auf eine concentrische Kugel polar entsprechenden *gleichflächigen* Polyeder enthalten die s. g. *halbregulären* oder *Archimedeischen* Körper als besondere Fälle in sich, indem bei den gleicheckigen Polyedern die von einander verschiedenen Grenzflächen, bei den gleichflächigen die von einander verschiedenen Ecken *regulär* sein müssen. Die Construction der gleicheckigen, wie der gleichflächigen Polyeder lässt sich auf bestimmte Eintheilungen der Oberfläche der Kugel, welche bezüglich dem gleicheckigen Körper *um-*, dem gleichflächigen *ein*geschrieben ist, in entsprechende sphärische Polygone zurückführen.

Die *zugleich gleicheckigen* und *gleichflächigen* Polyeder umfassen *einmal* die bekannten 5 Platonischen, sowie die 4 von Kepler und Poinsot entdeckten regulären Polyeder höherer Art, indem bei diesen die gleichen Ecken, wie die gleichen Flächen beide *regulär* sind.

Was die *übrigen* zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder anlangt, so wird in der Abhandlung gezeigt, dass unter denen *erster Art* nur noch die Gruppen der s. g. *rhombischen* und *quadratischen Sphenoide* den aufgestellten Bedingungen genügen, wobei die quadratischen Sphenoide einen besonderen Fall der rhombischen darstellen und als weitere Specialität das reguläre (Platonische) Tetraeder enthalten.

Von den ausserdem möglichen, zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyedern *höherer Art* und zwar zunächst den *continuirlichen* werden alsdann vorläufig *vier* solcher wie es scheint, bisher noch nicht berücksichtigter Polyeder abgeleitet und beschrieben, und in Betreff der sämmtlichen hierher gehörigen Körper, sowie der genauen und vollständigen Entwickelung auf eine demnächst erscheinende grössere Abhandlung verwiesen.

Schliesslich wird auch noch kurz auf die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder mit *discontinuirlicher Oberfläche* eingegegangen, zu denen ausser den unter I aufgeführten zahlreiche andere Gruppirungen, u. A. die ebenfalls schon erwähnten Systeme

von je 5 sich kreuzenden Octaedern und Würfeln, sowie bestimmte Gruppirungen von rhombischen und quadratischen Sphenoiden gehören.

Marburg. E. Hess.

E. Hess: Ueber die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder. Kassel 1876. Theodor Kay. 95 S. 11 Fig. auf 2 Tafeln.

Die genannte Schrift enthält die vollständige Ableitung und Beschreibung derjenigen *convexen* und *continuirlichen* Polyeder, welche *zugleich gleicheckig* und *gleichflächig* sind.

In Betreff der Definitionen der gleicheckigen und der gleichflächigen Körper erlaube ich mir hier, auf den zweiten Theil des vorstehenden Berichtes über meine Abhandlung: „*Ueber zwei Erweiterungen des Begriffs der regelmässigen Körper*" zu verweisen.

Die Schrift beschränkt sich auf die Betrachtung der hierher gehörigen *convexen* und *continuirlichen* Körper, d. h. solcher, deren Grenzflächen und Ecken einerseits nur ausspringende ebene und Flächen-Winkel darbieten, andererseits ununterbrochen zusammenhängen, während die Ableitung und Beschreibung der hierher gehörigen *nicht convexen* und *discontinuirlichen* Polyeder einer weiteren Abhandlung vorbehalten wird.

Im §. 1 werden die derartigen Polyeder *erster* Art hergeleitet, zu denen, wie bereits in der erwähnten Abhandlung gezeigt wurde, ausser den 5 Platonischen Körpern die Gruppen der *rhombischen* und *quadratischen Sphenoide* gehören.

Um die hierher gehörigen Polyeder *höherer Art* zu erhalten, werden im §. 2 zunächst die verschiedenen Arten der Herleitung vermittelst der synthetischen und analytischen Methode besprochen. Das für die folgenden Untersuchungen gewählte Verfahren besteht darin, die vollständigen Raumfiguren zu betrachten, die durch die Ebenen der Grenzflächen der *gleichflächigen Polyeder erster Art* gebildet werden, ein Verfahren, das sich zugleich constructiv sehr einfach und vortheilhaft handhaben lässt, indem man nur auf der Ebene einer der gleichen Grenzflächen die Spuren aller übrigen zu construiren braucht.

Im §. 3 wird von der Bestimmung der *Art* eines Polygons, einer Ecke, eines Polyeders gehandelt, und bietet sich hierbei häufig Gelegenheit, auf Beziehungen, die in einer früher erschienenen Schrift

des Verfassers (*E. Hess: Ueber gleicheckige und gleichkantige Polygone.* Kassel 1874. Theodor Kay) entwickelt sind, zu verweisen. Die s. g. *erweiterte* Euler'sche Formel wird sodann in weit grösserer Allgemeinheit abgeleitet, als es bisher geschehen ist, und endlich werden die Fälle genauer erörtert, in denen das polar-reciproke Entsprechen der Polyeder ein vollständiges und ungestörtes ist.

Durch die Anwendung der angegebenen Methoden der Untersuchung auf die verschiedenen gleichflächigen Polyeder hat sich das Resultat ergeben, dass nur bestimmte Körper *einer* Gruppe desselben, nämlich der des $(12 + 20 + 30)$*eckigen* (2×60) *Flachs* solche zugleich gleicheckige und gleichflächige Körper liefern. Es wird daher im §. 4 diese Gruppe der gleichflächigen und der ihnen polar entsprechenden gleicheckigen Körper genauer besprochen, indem die sämmtlichen hierher gehörigen Körper zusammengestellt und die wichtigsten auf die Lage und Beschaffenheit der Ecken, Flächen, Radien und Axen bezüglichen Relationen übersichtlich angegeben werden. Auch werden die Eckencoordinaten und Flächengleichungen der 3 einfachsten und im Folgenden vorzugsweise in Betracht kommenden Körper, des Pentagondodecaeders, Icosaeders und Triacontaeders in Beziehung auf ein rechtwinkliges, durch 3 s. g. 2gliedrige Axen gebildetes Coordinatensystem aufgestellt.

In den §§. 5, 6 und 8 folgt sodann die genaue und systematische Untersuchung der vollständigen Figuren, welche durch die Ebenen der Grenzflächen eines Pentagondodecaeders, Icosaeders und Triacontaeders entstehen. Aus denselben ergeben sich, abgesehen von den nicht convexen und discontinuirlichen Polyedern, die beiläufig erwähnt werden, im Ganzen 8 zugleich gleicheckige und gleichflächige Körper höherer Art. Vier (mit (I) bis (IV) numerirte) sind die Kepler-Poinsot'schen Körper, die sich zu je zweien polarreciprok entsprechen, zwei weitere, (V) und (VII), entstehen aus der vollständigen Figur des Icosaeders und ferner zwei, (IX) und (XI), aus der des Triacontaeders. Die den Körpern (V) und (VII) bezüglich polar entsprechenden (VI) und (VIII) werden im §. 7, und ebenso die den Körpern (IX) und (XI) bezüglich polar entsprechenden (X) und (XII) im §. 9 auf zweifache Weise hergeleitet und beschrieben. Die Gesammtzahl der hierher gehörigen Körper beträgt also 12, und sind dieselben auch die einzig möglichen derartigen Körper, wie am Schlusse der Schrift gezeigt wird.

Ich begnüge mich, diese 8 neuen Körper ((V) bis (XII)) im Folgenden in übersichtlicher Zusammenstellung aufzuführen:

(V). *Das 60eckige Stern-20Flach der 5ten Art;* dasselbe ist begrenzt von 20 Neunecken der 2ten Art, die als innersten Körpertheil ein Icosaeder einschliessen, und hat 60 gleichschenkelig-dreiflächige Ecken, die den 60 Ecken einer bestimmten Varietät eines (12 + 20 + 30) flächigen 60Ecks entsprechen.

(VI). *Das 60flächige Stern-20Eck der 5ten Art,* welches dem vorigen polar entspricht; seine 20 Ecken sind neunflächig von der 2ten Art und entsprechen den Pentagondodecaederecken, seine 60 Grenzflächen sind gleichschenkelige Dreiecke und schliessen als innersten Körpertheil ein bestimmtes (12 + 20 + 30) eckiges 60Flach ein.

(VII). *Das 60eckige Stern-20Flach der 25sten Art,* welches von 20 Neunecken der 4ten Art (Icosaederflächen) begrenzt ist und 60 gleichschenkelig-dreiflächige Ecken hat, die wie die Ecken einer bestimmten Varietät eines (12 + 20) flächigen (12 × 5) Ecks liegen.

(VIII). *Das 60flächige Stern-20Eck der 25sten Art,* dem vorigen polar entsprechend, mit 20 neunflächigen Ecken der 4ten Art, welche wie die Ecken eines Pentagondodecaeders liegen und 60 gleichschenkelig-dreiseitigen Grenzflächen, die ein bestimmtes (12+30) eckiges (12×5) Flach (ein Pyramidendodecaeder) einschliessen.

(IX). *Das (2 × 60) eckige Stern-30Flach der 15ten Art,* dessen 30 ein Triacontaeder einschliessende Grenzflächen Zwölfecke der 3ten Art, dessen 60 rechte und 60 linke Ecken ungleichseitig dreiflächig sind und wie die Ecken eines bestimmten (12 + 20 + 30)-flächigen (2 × 60) Ecks liegen.

(X). *Das (2 × 60) flächige Stern-30Eck der 15ten Art,* der polare Körper des vorigen, mit 30 zwölfflächigen Ecken der 3ten Art und (2 × 60) (d. h. 60 rechten und 60 linken) ungleichseitigen dreieckigen Grenzflächen. Die Ecken entsprechen den Ecken eines (12 + 20) flächigen 30Ecks, die Flächen schliessen eine bestimmte Varietät eines (12 + 20 + 30) eckigen (2 × 60) Flachs ein.

(XI). *Das (2 × 60) eckige Stern-30Flach der 45sten Art,* welches von 30 Zwölfecken der 5ten Art (Triacontaederflächen) begrenzt ist und (2 × 60) ungleichseitig-dreiflächige Ecken hat, die wiederum den Ecken eines bestimmten (12 + 20 + 30) flächigen (2 × 60) Ecks entsprechen.

(XII). *Das (2 × 60) flächige Stern-30Eck der 45sten Art,* dem vorigen polar entsprechend. Seine Ecken, welche wie die des Körpers (X) liegen, sind zwölfflächig von der 5ten Art, und seine (2 × 60) ungleichseitig-dreieckigen Grenzflächen schliessen als inner-

sten Körpertheil wiederum eine bestimmte Varietät eines (12 + 20 + 30)eckigen (2 × 60)Flachs ein.

Mit Rücksicht auf die Entstehung dieser Körper kann man die (V) bis (VIII) und die (IX) bis (XII) je in eine Gruppe von zwei Paaren passend vereinigen.

Auf weitere Einzelheiten der Schrift einzugehen, gestattet der Umfang dieses Berichtes nicht. Es sei daher nur noch erwähnt, dass für die meisten dieser Körper die Anzahl der Doppelpunkte, Flächen- und Eckendoppelkanten, Doppelebenen (über die Definitionen s. S. 29—34) bestimmt und Beziehungen zwischen diesen Werthen und den die Art der Polyeder bestimmenden Zahlen entwickelt sind.

In den beigegebenen Figuren sind die Grenzflächen dieser Körper mit Benutzung der Entstehung derselben aus den die innersten Kerne bildenden gleichflächigen Polyedern erster Art gezeichnet; und endlich ist am Schlusse der Schrift auch die zwiefache Art der Darstellung dieser Körper durch Papp- oder Fadenmodelle kurz angegeben.

Marburg. E. Hess.

Dr. J. Weyrauch: **Festigkeit und Dimensionenberechnung der Eisen- und Stahlconstructionen mit Rücksicht auf die neueren Versuche.** Ein elementarer Anhang zu allen Lehrbüchern über Eisen- und Stahlconstructionen von Dr. phil. Jakob J. Weyrauch, Professor an der polytechnischen Schule in Stuttgart. (Mit 4 lithographirten Tafeln. Leipzig 1876. B. G. Teubner.)

In neuerer Zeit sind in Deutschland, England, Schweden, Amerika umfassende und zum Theil ausgezeichnete Versuche über die Festigkeitseigenschaften von Eisen und Stahl als Constructionsmaterial angestellt worden. Vorstehende Brochüre soll zunächst die greifbaren Resultate dieser Versuche übersichtlich, ohne viel Details, aber soweit vorführen, dass der ausführende Ingenieur damit auf den heutigen Standpunkt der Beurtheilung gestellt wird. Hieran schliesst sich eine systematische Darstellung der Dimensionenberechnung von Eisen- und Stahlconstructionen, wie sie den neuen Resultaten entsprechend vorzunehmen ist.

Wenn man von der Festigkeit eines Stabes bei irgend einer Beanspruchungsart (Zug, Druck u. s. w.) spricht,*) so versteht man darunter gewöhnlich diejenige Beanspruchung pro Quadrateinheit, welche gerade an der Zerstörungsgrenze liegt, setzt aber dabei stillschweigend eine ruhende oder doch ganz allmählich anschwellende Belastung voraus. In Wirklichkeit ist die Festigkeit t bei einmaliger Beanspruchung eine Function der Geschwindigkeit des Anschwellens der Belastung, so zwar, dass t von unendlich langsam anschwellender (ruhender) bis zu möglichst schnell anschwellender (stossender) Belastung stetig abnimmt.

Indessen die Veränderlichkeit von t ist doch nur gering, solange die Anschwellung nicht sehr schnell erfolgt, und es kann dann für praktische Bedürfnisse t als constant angenommen werden. Ganz falsch aber war die bis vor Kurzem allgemein gemachte Voraussetzung, dass ein Körper, der eine gewisse Beanspruchung *einmal* aushält, diese Beanspruchung auch *beliebig oft* aushalten müsste, gleichgültig in welchen Intervallen die einzelnen Beanspruchungen auf einander folgen.

Schon die alltägliche Erfahrung lehrt das Fehlerhafte dieser Anschauung. Will man einen eingespannten Stab mit der Hand abbrechen, und es genügt ein einfacher Zug nicht, so lässt man mehrmals nach und zieht von Neuem, und wenn auch das nicht hilft, so tritt vielleicht der Bruch durch Hin- und Herbiegen ein. Die Kraft unsers Armes ist im letzten Falle nicht grösser wie im ersten, aber man braucht eben nicht dieselbe Kraft, die Festigkeit hat *nicht* immer denselben Werth, sie nimmt mit der Anzahl der Beanspruchungen ab, und ist auch von anderen Umständen abhängig.

Wie wichtig dieser Umstand für unsre grossen Bauwerke z. B. für Brücken ist, braucht nicht erst auseinandergesetzt zu werden. Es ist nun das Verdienst von A. Wöhler, schon im Jahre 1858 darauf hingewiesen zu haben, dass es für eine zuverlässige Grundlage der Berechnung von Eisen- und Stahlconstructionen nöthig sei, Versuche über die Widerstandsfähigkeit des Materials gegen häufig wiederholte Anstrengungen zu machen. Diese Versuche wurden von Wöhler selbst in den Jahren 1859—70 auf Veranlassung des preussischen Handelsministeriums in umfassender Weise ausgeführt. Sie zeigten, dass allerdings eine gewisse Beanspruchung t das Ma-

*) Auf einige Verhältnisse, welche nicht nur für die Ingenieurmechanik von Bedeutung sind, mag hier kurz hingewiesen werden.

terial schon bei einmaliger Wirkung zu zerstören im Stande ist, dass aber auch geringere Beanspruchungen als t (unter Umständen bis weit unter $\frac{1}{2}t$, bei Wechsel von Zug und Druck sogar bis fast $\frac{1}{4}t$) die Zerstörung bewirken können, wenn sie genügend oft wiederholt werden.

Damit war definitiv der neue Gesichtspunkt gewonnen. Der Wechsel in der Gruppirung der Molecüle, welcher durch die wechselnde Beanspruchung bedingt ist, wirkte offenbar ungünstig auf die Widerstandsfähigkeit des Materials ein; dann muss die Zerstörung um so leichter möglich sein, je grösser die *Differenzen* in der Beanspruchung, weil dem entsprechend auch die Stellungsänderungen der Molecüle wachsen, Wöhler konnte folgendes allgemeine Gesetz aufstellen und experimentell nachweisen:

Der Bruch des Materials lässt sich nicht nur durch eine den Werth t überschreitende ruhende Belastung, sondern auch durch vielfach wiederholte Spannungen, von denen keine diesen Werth erreicht, herbeiführen. Die Differenzen der Spannungen sind dabei für die Zerstörung des Zusammenhangs insofern massgebend, als mit ihrem Wachsen die Minimalspannung, welche den Bruch noch herbeiführen kann (die Festigkeit), sich verringert.

Durch die Beanspruchung t wird das Material schon bei einmaliger Wirkung zerstört, kleinere Beanspruchungen als t können durch vielfache Wiederholungen zerstören, je kleiner die Beanspruchung, um so mehr Wiederholungen sind nöthig. Umgekehrt darf die Beanspruchung um so grösser sein, je weniger Wiederholugen wir beabsichtigen. Man sieht also, dass es bei Beurtheilung des Sicherheitsgrades einer Construction auch abgesehen von Stössen und andern Einflüssen sehr darauf ankommt, ob die Construction nur eine gewisse Zeit in Betrieb bleiben soll, wie Eisenbahnschienen, Axen, oder ob unbeschränkte Dauer von ihr verlangt wird, wie von Brücken, Gebäuden u. s. w.

Zur weiterer Präcisirung des Wöhler'schen Gesetzes, besonders in theoretischer Beziehung, bleibt noch Raum genug. Es fragt sich, welchen Einfluss Schnelligkeit der Aufeinanderfolge, Geschwindigkeit des Anschwellens und Dauer der einzelnen Beanspruchungen haben. Die beiden letzten Einflüsse sind übrigens auch in Bezug auf den Specialfall t der Festigkeit noch nicht festgestellt und gleichwohl ging man von dieser Grösse bisher bei fast allen Dimensionenberechnungen aus. Genügende Vorsicht vorausgesetzt, ist die Kennt-

niss der hier erwähnten Verhältnisse praktisch von geringer Bedeutung.

Soviel ging aus den Wöhler'schen Versuchen und aus später von Spangenberg (ebenfalls im Auftrage des preussischen Handelsministeriums) angestellten hervor, dass die bisherige Dimensionenberechnung trotz bedeutender Materialverschwendung unter Umständen geradezu gefährlich werden kann. Es wurden denn auch bald von verschiedenen Seiten neue Verfahren vorgeschlagen, wobei es sich zunächst darum handelte, die je nach den Umständen zu erwartende Festigkeit anzugeben. Alle Verfahren, von denen indess keines genügend ausgebildet ist, sind in einem Anhange zu meiner Brochüre vorgeführt und einer Kritik unterworfen worden.

Bei Aufstellung neuer Formeln für die Festigkeit hat man natürlich vom Wöhler'schen Gesetze auszugehen; die speciellen Versuchsresultate Wöhler's jedoch sind nur mit Vorsicht zu verwenden, und es darf ihnen nicht mehr Gewicht beigelegt werden, wie etwa den Resultaten Rondelets oder Brunels oder eines Andern für die frühere Dimensionenberechnung. Die allgemeinen Formeln ändern sich dann nicht durch neue Versuche, ebenso wenig wie *früher* eine neue Versuchsreihe den *damaligen* Gang der Dimensionenberechnung ändern konnte.

Die in der Brochüre angewandte, äusserst einfache Berechnungsweise gründet sich auf zwei Formeln für die Festigkeit, von welchen die erste von Launhardt, die zweite mit ähnlichem Gedankengang vom Verfasser aufgestellt ist.

Fassen wir eine bestimmte Construction ins Auge. Ein Constructionstheil kann entweder immer in gleicher Richtung oder abwechselnd in entgegengesetzten Richtungen (z. B. auf Zug und Druck oder auf Schub in zweierlei Sinn) beansprucht werden. Es bedeute für die zu erwartende Beanspruchungs*art*, sagen wir für *Schub*, t die gewöhnliche Festigkeit bei ruhender Belastung („Tragfestigkeit"), u die Festigkeit, wenn der Körper nach jeder Beanspruchung in einerlei Richtung wieder in den spannungslosen Zustand übergeht („Ursprungsfestigkeit"), s die Festigkeit, wenn abwechselnd gleich grosse Beanspruchungen in entgegengesetzten Richtungen stattfinden („Schwingungsfestigkeit"). Ist nun φ das Verhältniss der äussersten Grenzspannungen, welche der Constructionstheil zufolge der statischen Berechnung auszuhalten hat — der kleineren zur grösseren —, so ist die zu erwartende Festigkeit („Arbeitsfestigkeit")

bei Beanspruchung in einerlei Richtung, φ positiv,

$$a = u\left(1 + \frac{t-u}{u}\varphi\right)$$

bei Beanspruchung in entgegengesetzten Richtungen, φ negativ,

$$a = u\left(1 + \frac{s-u}{u}\varphi\right)$$

t, u, s sind specielle Fälle der Arbeitsfestigkeit a, sie müssen durch Versuche ermittelt werden.

Um zu zeigen, wie gut die Launhardt'sche Formel mit den Versuchen, soweit solche vorliegen, stimmt, diene Folgendes. Hat der Stab einen Querschnitt von einer Quadrateinheit, und wechseln die Beanspruchungen auf Zug allein zwischen c und a, so hat man $\varphi = \frac{c}{a}$. Es ist nun z. B. für Krupp'schen Federgussstahl,

wenn $c =$	0	250	400	600	1100
a nach Versuchen	500	700	800	900	1100
a nach Formel	500	711	800	900	1100,

wobei, da es sich nur um einen Vergleich handelt, die Originalzahlen Wöhlers, Centner per Quadratzoll angebend, stehen geblieben sind.

Nachdem die Festigkeit, welche ein bestimmter Constructionstheil den zu erwartenden Beanspruchungen entgegensetzen wird, ermittelt werden kann, hat es keine Schwierigkeit mehr, unter Berücksichtigung sonstiger Einflüsse und nach Wahl geeigneter Sicherheitscoefficienten die zulässige Beanspruchung b pro Quadratcentimeter festzustellen. So kann man für *eiserne* Brücken- und Hochbauconstructionen, von welchen unbeschränkte Dauer verlangt wird, und wobei die neuen Resultate besonders wichtig sind, allgemein setzen.

$$b = 700\,(1 + 0{,}5\,\varphi)\ \text{Kil.}$$

wonach b zwischen 350 und 1050 Kil. variirt, während bisher constant $b =$ ca. 700 angenommen wurde. — Die Besprechung der Festigkeitseigenschaften und praktische Erfahrung liefern Anhaltspunkte genug, die Sicherheitscoefficienten für alle Fälle passend zu wählen.

Nach Ableitung der zulässigen Beanspruchung wird die Anwendung der vorgeführten Berechnungsweise bei den verschiedenen Constructionssystemen angedeutet und durch Beispiele erläutert. Eine ganz besondere Aufmerksamkeit ist den Nietverbindungen zugewandt, die derselben sehr bedürftig waren. Obschon auch hier der gegenwärtige Standpunkt der Theorie volle Berücksichtigung

fand, glaube ich nicht, dass die Einfachheit der Anwendung gelitten hat.

Die gewohnten Methoden der statischen Berechnung bleiben durch die neue Dimensionenfeststellung ganz ungeändert. Für diejenigen, welche die statische Berechnung graphisch vorzunehmen pflegen, enthält die besprochene Brochüre Alles, was zur vollständigen Berechnung einer Brücken- oder Hochbauconstruction nach Vollendung des Kräfteplans zu thun übrig bleibt. Bei der bisherigen rohen *Dimensionen*berechnung waren die genauen *statischen* Berechnungen ziemlich zwecklos.

In den Werken über Eisen- und Stahlconstructionen findet sich gewöhnlich nur sehr wenig über die Festigkeitseigenschaften des Materials und eine neue Dimensionenberechnung konnte natürlich noch nicht berücksichtigt werden. Der Verfasser darf daher hoffen, mit dieser Brochüre, welche sich als Anhang zu jedem Lehrbuche benutzen lässt, einem wirklichen Bedürfnisse entsprochen zu haben.

Genf, August 1876. J. Weyrauch.

F. Klein: Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve. Math. Annalen. X. p. 199—209. (Erlanger Berichte. Dec. 1875.)

Anknüpfend an Zeuthen's Untersuchung der Curven vierter Ordnung (Math. Ann. VII) entwickelt der Verf. mit Hülfe elementarer Continuitätsbetrachtungen den folgenden Satz:

Wenn eine Curve von der Ordnung n und der Classe k nur einfache Singularitäten besitzt, und es bezeichnet r' die Zahl der reellen Spitzen, w' die Zahl der reellen Wendepunkte, d'' die Zahl der isolirten reellen Doppelpunkte und t'' diejenige der isolirten reellen Doppeltangenten, so ist:

$$n + w' + 2t'' = k + r' + 2d''.$$

Es scheint diese Relation, sobald es sich um gestaltliche Untersuchung algebraischer Curven handelt, eine fundamentale Bedeutung zu besitzen.

München. F. Klein.

F. Klein: Ueber den Verlauf der Abel'schen Integrale bei den Curven vierten Grades. (Math. Annalen. X. p. 365—397.)

— **Ueber eine neue Art von Riemann'schen Flächen.** (Zweite Mittheilung.) (Math. Annalen. X. p. 398—416.)

— **Ueber den Verlauf der Abel'schen Integrale bei den Curven vierten Grades.** (Zweiter Aufsatz, noch nicht erschienen.) (Math. Annalen. XI.)

Die Absicht, welche ich mit den vorgenannten Arbeiten verfolge, ist zunächst die, die mannigfachen Resultate, welche die Functionentheorie für die Lehre von den algebraischen Curven geliefert hat, an den Curven selbst möglichst zur unmittelbaren Anschauung zu bringen. Ich kann aber nicht zweifeln, dass dieser Weg, je länger man ihn verfolgt, um so mehr über sein nächstes Ziel hinausführt; indem neue Fragestellungen entstehen, kann ein Fortschritt der Theorie nicht ausbleiben. In dieser Hinsicht möchte ich hier vor Allem auf die von mir in den genannten Aufsätzen festgehaltene, dem geometrischen Vorstellungskreise entnommene Methode der *Continuität* aufmerksam machen; ich lasse die Curven vierten Grades, welche zu untersuchen sind, bald in ein Kegelschnittpaar, bald (in dem zweiten Aufsatze) in einen doppelt zählenden Kegelschnitt mit acht Scheiteln (sommets) übergehen [der dann als eine hyperelliptische Curve vom Geschlechte 3 zu betrachten ist] und studire die Fragen, welche zu erledigen sind, vorab an diesen speciellen Fällen, um von ihnen zum allgemeinen Falle aufzusteigen.

Bereits bei einer früheren Gelegenheit (Math. Annalen VII. p. 558) habe ich die Riemann'schen Flächen, welche ich in den hier vorliegenden Aufsätzen fortwährend gebrauche, definirt und an einigen speciellen Fällen erläutert; sie werden von denjenigen reellen Punkten gebildet, welche den imaginären Tangenten der algebraischen Curve angehören. In der speciell auf sie bezüglichen, diesmaligen Mittheilung erläutere ich gewisse allgemeine Fragen; ich bespreche die Anordnung ihrer Blätter und deren Verzweigung; ich bestätige durch directe Abzählung die Richtigkeit derjenigen Zusammenhangszahl, welche den betr. Flächen vermöge ihrer Beziehung zu den gewöhnlichen Riemann'schen Flächen beizulegen ist. Ich erläutere diese Verhältnisse insonderheit an den Curven dritter Ordnung, die, als Curven sechster Classe bereits sechs übereinander liegende Flächen-Blätter darbieten können, und erhalte

dadurch namentlich auch eine Discussion der Lage ihrer imaginären Wendetangenten, die vielleicht an sich von Interesse ist.

In dem ersten Aufsatze: Ueber den Verlauf der Abel'schen Integrale etc. benutze ich sodann diese neue Riemann'sche Fläche, um bei den Curven vierter Classe den Verlauf der überall endlichen Integrale zur Anschauung zu bringen, indem ich nämlich diejenigen auf der Fläche verlaufenden Curven zeichne, längs deren der reelle oder der imaginäre Theil der, einer bestimmten Zerschneidung der Fläche entsprechenden, Normalintegrale constant ist. Es waren dazu einige gestaltliche Untersuchungen über Curven vierter Classe nothwendig, auf die ich hier nur verweisen kann, ohne auf sie näher einzugehen. Ich habe sodann meine Aufmerksamkeit namentlich darauf gewandt, die imaginären Bestandtheile zu bestimmen welche in den Perioden der Normalintegrale enthalten sind. In solcher Weise gelang es mir, Sätze über die Realität gewisser Berührungscurven zu gewinnen. Eine Curve vierter *Ordnung* (und von solchen mag jetzt die Rede sein) besteht, wenn sie keinen singulären Punkt hat, aus 4 oder 3, 2, 1, 0 Ovalen, und, wenn die Zügezahl 2 ist, muss man unterscheiden, ob sich die betr. 2 Ovale einschliessen oder ausschliessen. Im ersteren Falle nenne ich die Curve (nach Zeuthen) eine Gürtelcurve und bezeichne sie mit V, während die Zahlen I, II, III, IV den anderen Curven bez. mit 4, 3, 2, 1 Zügen beigelegt sein mögen (wobei dann die Curven ohne reelle Züge vorab noch ausgeschlossen sind). Dies vorausgesetzt, gelten folgende Sätze (p. 396):

Von den 63 Systemen viermal die Curve berührender Kegelschnitte sind in den Fällen I, II, III, IV, V bez. reell:

63, 31, 15, 7, 15.

Für die 64 Systeme sechsmal berührender Curven dritter Ordnung werden diese Zahlen:

64, 32, 16, 8, 16.

Unter den 728 Systemen viermal osculirender Curven dritter Ordnung sind immer und nur:

26

reell.

Endlich finden sich unter den 4096 dreimal hyperosculirenden Curven dritter Ordnung in den verschiedenen Fällen

512, 256, 128, 64, 128

reelle.

Bei diesen Untersuchungen war ich noch nicht auf diejenigen Fragen eingegangen, welche mit der Unterscheidung der sogenannten ϑ-Charakteristiken zusammenhängen. Sie nehme ich in dem zweiten Aufsatze „Ueber Abel'sche Integrale etc." in Angriff, beschränke mich aber dabei zunächst auf Curven mit vier reellen Zügen. Unter Voraussetzung derjenigen Zerschneidung der zugehörigen Riemann'schen Fläche, welche ich in dem ersten Aufsatze angab, schreibe ich die Charakteristiken wirklich an, welche den 28 (in diesem Falle reellen) Doppeltangenten zukommen, und bestimme den ausgezeichneten Kegelschnitt, dessen drei Berührungspunkte nach Clebsch-Gordan als untere Grenzen der Normalintegrale beim Jakobi'schen Umkehrprobleme zu wählen sind.

München. F. Klein.

K. Becker: Die Grundlagen der Geometrie. (Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, XX, 6, p. 445.)

Die Untersuchungen Riemann's „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" zerfallen in einen rein wissenschaftlichen und einen speculativ philosophischen Theil. Man kann nun in dem letzteren Theile, wie der Verfasser, ein entschiedener Gegner Riemann's und seiner Nachfolger, sowie aller „absoluten" Geometrie sein, ohne das grosse Verdienst zu verkennen, welches sich Riemann erworben hat durch Aufwerfung der Frage:

> „Welches sind die nothwendigen und hinreichenden Voraussetzungen, die wir über den Raum selbst machen müssen, damit die Sätze der Geometrie ohne weitere Axiome begründet werden können?"

Es ist Helmholtz gewesen, welcher vor allem die Beantwortung dieser Frage zum Gegenstande seiner Untersuchungen „über die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie" gemacht hat, Untersuchungen, die leider wegen ihrer rein analytischen Natur bisher ohne Einfluss auf die wissenschaftliche Bearbeitung der Geometrie selbst bleiben mussten. Verfasser sucht nun dasselbe Ziel auf rein geometrischem Wege zu erreichen, indem er sechs Postulate aufstellt, und zeigt, dass dieselben hinreichen, die übrigen Axiome Euklids zu beweisen. Dabei geht er von dem Gedanken aus: *„Sollen die Eigenschaften der geometrischen Figuren als nothwendige Folgen der Natur des Raumes erscheinen, was sie doch ohne Zweifel sind, so*

dürfen auch keine anderen Voraussetzungen gemacht werden, als solche, welche sich auf den Raum selbst beziehen."

Mannheim. Johann Karl Becker.

Die Laplace'sche Methode der Ausgleichung von Beobachtungsfehlern bei zahlreichen Beobachtungen. Von Dr. J. Dienger in Karlsruhe. (Denkschriften der math. naturwiss. Klasse der k. Akademie der Wissenschaften in Wien. Bd. XXXIV.)

In dem 4. Kapitel der Théorie analytique des probabilités (1812, S. 304 ff.) hat Laplace von der „Wahrscheinlichkeit der Fehler der mittlern Resultate einer grossen Zahl von Beobachtungen, und von den vortheilhaftesten mittlern Resultaten" gehandelt. Er ist jedoch thatsächlich nicht über den Fall zweier Unbekannten hinausgegangen, so dass es immerhin wünschenswerth schien, die Aufgabe in voller Allgemeinheit, natürlich ermöglicht durch die jetzigen Hilfsmittel der Algebra, zu lösen. Diese Auflösung hat sich die vorliegende Abhandlung gestellt.

Die Aufgabe selbst stellt sich in folgender Form dar. Die Werthe der n Grössen

$$u_1, u_2, \ldots, u_n \tag{1}$$

sollen bestimmt werden unter der Voraussetzung, man habe für die s Grössen

$$p_1^{(r)}u_1 + p_2^{(r)}u_2 + \ldots + p_n^{(r)}u_n + A_r, \text{ wo } r = 1, 2, \ldots, s \tag{2}$$

durch unmittelbare Beobachtung die Werthe $B_1, \ldots, B_s$ erhalten. Die p und A sind bekannte Zahlen; $s > n$ und schliesslich s eine sehr grosse Zahl.

Da, wenn die B genau richtig gefunden wären, zwischen den p und A Bedingungsgleichungen bestehen müssten, was nicht angenommen wird, so müssen wir nothwendig die B als mit Fehlern behaftet ansehen. Ist ε_r der Fehler, den man bei der Beobachtung, welche B_r ergab, begeht, und kennt man die richtigen Werthe der u, so ist

$$\varepsilon_r = p_1^{(r)}u_1 + p_2^{(r)}u_2 + \ldots + p_n^{(r)}u_n + A_r - B_r, \tag{3}$$

wo diese richtigen Werthe von u eingesetzt sind. Da man letztere nicht kennt, so muss man sich mit Wahrscheinlichkeiten behelfen,

und die Laplace'sche Methode besteht nun darin, dass man die u derart bestimmt, dass die n Grössen

$$E_a = \gamma_1^{(a)}\varepsilon_1 + \gamma_2^{(a)}\varepsilon_2 + \ldots + \gamma_s^{(a)}\varepsilon_s, \quad a = 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

die unter den gegebenen Umständen wahrscheinlichsten Werthe annehmen, wobei die ns Grössen γ vorläufig noch beliebig (aber bestimmt gedacht) bleiben. Dabei soll die Wahrscheinlichkeit, bei der r^{ten} Beobachtung einen Fehler x zu begehen, durch $f_r(x)dx$ bezeichnet werden.

Die Methode, die zur Auflösung der so ausgedrückten Aufgabe angewendet wird, weicht von der Laplace'schen ab, und ist in ihrem Wesen die von Poisson in seinem bekannten Werke befolgte, natürlich für diesen allgemeinen Fall erweiterte. So wird gefunden, dass

$$W = \frac{dq_1 \ldots dq_n}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \!\!\cdots\! \int \varrho \cos(\varphi - \alpha_1 q_1 - \ldots - \alpha_n q_n)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n \tag{5}$$

die Wahrscheinlichkeit angiebt, es sei zugleich

$$E_1 = q_1, \; E_2 = q_2, \; \ldots, \; E_n = q_n, \tag{6}$$

wo

$$\varrho_r^2 = \left[\int_{x_1}^{x_2} f_r(x) \cos(\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \cdots + \alpha_n \gamma_r^{(n)}) x\,dx\right]^2 + \left[\int_{x_1}^{x_2} f_r(x) \sin(\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \cdots) x\,dx\right]^2,$$

$$\cos\varphi_r = \frac{1}{\varrho_r} \int_{x_1}^{x_2} f_r(x) \cos(\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \cdots) x\,dx, \quad \sin\varphi_r = \frac{1}{\varrho_r} \int_{x_1}^{x_2} f_r(x) \sin(\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \cdots) x\,dx;$$

$$\varrho = \varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_s, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots \varphi_s,$$

und wo x_1 und x_2 die äussersten Grenzen bedeuten, zwischen denen die Beobachtungsfehler schwanken können.

Wird vorausgesetzt, dass s sehr gross ist, so findet sich nun, dass die Grösse (5) ein Maximum ist, wenn

$$q_1 = \Sigma k_r \gamma_r^{(1)}, \; \ldots, \; q_n = \Sigma k_r \gamma_r^{(n)}, \tag{7}$$

wo $k_r = \int_{x_1}^{x_2} x f_r(x) dx$ und das Summenzeichen sich auf $r = 1, 2, \ldots, s$ bezieht. Führt man diese Werthe in (6) ein, so ergeben sich n Gleichungen zur Bestimmung der u, welche die lineare Form haben — ein Vorzug, der mit der hier beliebten Art der Auflösung unserer Aufgabe bezweckt war.

In Bezug auf die Wahrscheinlichkeit der u selbst ist damit Nichts entschieden, und es muss dies bei der ganzen Untersuchung wesentlich festgehalten werden.

Setzt man in (6)

$$q_m = \Sigma k_r \gamma_r^{(m)} + \xi_m, \tag{8}$$

so ist hiernach der wahrscheinlichste Werth von ξ_m Null. Werden überdies die vorhin bestimmten Werthe der u durch $U_1, \ldots, U_n$ bezeichnet, so ergiebt das Einsetzen von (8) in (6) ein System von Gleichungen, die für die u die Werthe

$$U_1 + \eta_1, \cdots, U_n + \eta_n$$

liefern, wo nun

$$\begin{aligned} \eta_1 \Sigma\gamma_r^{(1)} p_1^{(r)} + \cdots + \eta_n \Sigma\gamma_r^{(1)} p_n^{(r)} &= \xi_1, \\ &\vdots \\ \eta_1 \Sigma\gamma_r^{(n)} p_1^{(r)} + \cdots + \eta_n \Sigma\gamma_r^{(n)} p_n^{(r)} &= \xi_n, \end{aligned} \tag{9}$$

Gleichungen, welche den Zusammenhang zwischen den η und ξ geben. Erstere Grössen haben offenbar den Charakter von Verbesserungen (Fehlern), welche an die U anzubringen sind, wenn die E um die ξ von ihren wahrscheinlichsten Werthen abweichen.

Für die weitere Entwickelung war es nun von Wichtigkeit in dem Ausdrucke von W, der durch Einführung von (8) umgestaltet war, und hiess

$$W = \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_n}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int e^{-\Sigma h_r^2 (\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \cdots + \alpha_n \gamma_r^{(n)})^2} \cos(\alpha_1 \xi_1 + \cdots + \alpha_n \xi_n) d\alpha_1 \cdots d\alpha_n,$$

die ξ durch die η zu ersetzen. Darin war

$$2h_r^2 = \int_{x_1}^{x_2} x^2 f_r(x) dx - \left[\int_{x_1}^{x_2} x f_r(x) dx\right]^2.$$

Diese Einführung verwandelt

$$\Sigma h_r^2 (\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \cdots + \alpha_n \gamma_r^{(n)})^2 \text{ in } SS\, A_{i,k}\, \alpha_i \alpha_k,$$

wo $A_{i,k} = \Sigma h_r^2 \gamma_r^{(i)} \gamma_r^{(k)}$, und die Summenzeichen S sich auf $i = 1, \cdots, n$; $k = 1, \cdots, n$ beziehen. Diese Summe lässt sich bekanntlich in der Form $S p_i z_i^2$ darstellen, und um nicht Fremdes citiren zu müssen, wurde die Umwandlung allgemein betrachtet (§. 3). Diese, der Natur der Sache nach, sehr weitläufige Untersuchung mag hier übergangen werden. So findet sich nun

$$W = \frac{M}{\sqrt{P}} \frac{d\eta_1 \cdots d\eta_n}{(2\sqrt{\pi})_n} e^{-\frac{1}{4P} \underset{\alpha}{S} \underset{\beta}{S} D_{\alpha,\beta} \eta_\alpha \eta_\beta}, \tag{10}$$

$$M = \begin{vmatrix} \Sigma \gamma_r^{(1)} p_1^{(r)}, & \cdots, & \Sigma \gamma_r^{(1)} p_n^{(r)} \\ \vdots & & \\ \Sigma \gamma_r^{(n)} p_1^{(r)}, & \cdots, & \Sigma \gamma_r^{(n)} p_n^{(r)} \end{vmatrix}, \quad P = \begin{vmatrix} A_{1,1}, & \cdots, & A_{1,n} \\ \vdots & & \\ A_{n,1}, & \cdots, & A_{n,n} \end{vmatrix},$$

$$D_{\alpha,\beta} = \underset{i}{S} \underset{k}{S} P_{i,k} \Sigma_r \gamma_r^{(i)} p_\alpha^{(r)} \Sigma_r \gamma_r^{(k)} p_\beta^{(r)}, \quad P_{i,k} = \frac{\partial P}{\partial A_{i,k}}.$$

Die (10) drückt die Wahrscheinlichkeit aus, dass den U die Verbesserungen η beizulegen seien — immer natürlich in dem hier gemeinten Sinne.

Daraus wird dann in bekannter Weise abgeleitet, dass

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho_r} e^{-z^2} dz \tag{11}$$

die Wahrscheinlichkeit ist, es liege die an U_i anzubringende Verbesserung zwischen

$$-2\varrho_r \sqrt{\frac{P \frac{\partial T}{\partial D_{i,i}}}{T}} \text{ und } +2\varrho_r \sqrt{\frac{P \frac{\partial T}{\partial D_{i,i}}}{T}}, \tag{12}$$

wo

$$T = \begin{vmatrix} D_{1,1}, & \cdots, & D_{1,n} \\ \vdots & & \\ D_{n,1}, & \cdots, & D_{n,n} \end{vmatrix};$$

ϱ_r ist natürlich eine beliebige Grösse.

Die Grössen γ sind bis jetzt ganz beliebig. Es wird nun gezeigt, dass die Grösse

$$\frac{P \frac{\partial T}{\partial D_{i,i}}}{T} \tag{13}$$

zu einem Minimum wird, wenn

$$\gamma_r^{(i)} = \frac{\mu p_i^{(r)}}{h_r^2}. \tag{14}$$

Den Nachweis führt die Abhandlung in der Weise, dass sie zeigt, es sei dann jeder Differentialquotient von (13) nach jedem γ Null. Die Art der Nachweisung ist eine dem besonderen Falle angepasste, die sich nicht mit kurzen Worten anführen lässt.

So gelangt endlich die ganze Untersuchung zu dem folgenden Hauptergebnisse.

Bestehen s-Beobachtungsgleichungen

$$p_1^{(r)}u_1 + \cdots + p_n^{(r)}u_n + A_r = B_r;\; r = 1, 2, \cdots, s,$$

in denen die B durch unmittelbare Beobachtungen gefunden wurden, und wo die durch (3) bestimmten ε die Beobachtungsfehler darstellen, wenn die u genau bekannt sind, und man will nun die u so bestimmen, dass n lineare Funktionen (4) dieser Beobachtungsfehler ihre theoretisch wahrscheinlichsten Werthe [die (7)] annehmen, so wird dies am *zweckmässigsten* geschehen aus folgendem System:

$$\begin{aligned} u_1\eta_{1,1} + \cdots + u_n\eta_{1,n} &= \Sigma_r g_r p_1^{(r)}(k_r - \delta_r), \\ &\vdots \\ u_1\eta_{n,1} + \cdots + u_n\eta_{n,n} &= \Sigma_r g_r p_n^{(r)}(k_r - \delta_r), \end{aligned} \tag{15}$$

wo $\eta_{i,k} = \Sigma_r g_r p_i^{(r)} p_k^{(r)}$, $g_r h_r^2 = h^2$, $\delta_r = A_r - B_r$.

Diese Bestimmung der u hat die Eigenschaft, dass, wenn die linearen Formen (4) etwas von ihren wahrscheinlichsten Werthen abweichen, die Aenderungen der u, die davon die Folge sind, in den möglichst engsten Grenzen eingeschlossen bleiben. Die Grösse h, die in (15) wegfällt, bleibt unbestimmt. In dem besonderen Falle: $f_r(-x) = f_r(+x)$, ist $k_r = 0$.

Es wird nun noch gezeigt, dass man auf einem durchaus verschiedenen Wege zu demselben Ergebnisse gelangen kann, indem man die unbestimmten Grössen α so bestimmt, dass der mittlere Werth von $\Sigma\alpha_r^2\varepsilon_r^2$ ein Minimum wird.

Nunmehr wird (§. 8) die Aufgabe derart behandelt, dass man die wahrscheinlichsten Werthe der u selbst ermitteln will. Für den Fall, dass

$$f_r(x) = \frac{\sqrt{g_r}}{2h\sqrt{\pi}} e^{-\frac{g_r x_r^2}{4h^2}}, \tag{16}$$

fallen die jetzt ermittelten Werthe mit obigen zusammen (wobei jedoch s nicht sehr gross sein muss). Die „zweckmässigsten" Werthe sind also jetzt auch die wahrscheinlichsten.

Zum Schluss wird nun noch die Bestimmung von h vorgenommen, wenn man (16) voraussetzt (Methode der kleinsten Quadrate). Doch muss hier s immerhin als sehr gross angenommen werden. Für die eigentliche Laplace'sche Methode bleibt h^2 unbestimmbar, kommt übrigens in dem Hauptergebniss (15) thatsächlich nicht vor. — Damit ist die gestellte Aufgabe vollständig gelöst.

Karlsruhe. J. Dienger.

S. Günther: Zur Geschichte der deutschen Mathematik im fünfzehnten Jahrhundert. (Zeitschrift für Mathematik und Physik. 20. Jahrgang.)

Die an mathematischen Antiquitäten reiche Stadtbibliothek zu Nürnberg bewahrt auch eine interessante geometrische Incunabel, die „Geometria deutsch“, ein Büchlein von nur 8 Blättern, ohne irgendwelche Angabe über Entstehungszeit, Verfasser, Druckort etc. Aus äusseren und inneren Gründen erschien es angezeigt, anzunehmen, dass das Schriftchen in den letzten Jahren des angegebenen Jahrhunderts in einer oberdeutschen Stadt gedruckt worden sei; der Inhalt bezieht sich auf einige geometrische Aufgaben einfachster Natur: Verzeichnung einer Senkrechten, Theilung eines Winkels in zwei gleiche Theile etc. Für π findet sich der Werth $3\frac{1}{7}$, das reguläre Achteck wird richtig mit Hülfe eines geometrischen Satzes verzeichnet, auf dessen Genesis durch die neuesten Untersuchungen M. Cantor's ein unerwartet helles Licht gefallen ist, für das Siebeneck gilt die bekannte Näherung, dass seine Seite der halben Dreiecksseite gleich sei, das Fünfeck wird in der später durch den Namen Albrecht Dürer's bekannter gewordenen Weise gebildet. Zum Schluss wird dem Zeitgeist durch Verfertigung des Risses für einen Wappenschild und einen Turnierhelm Rechnung getragen.

In der angeführten Arbeit wird der Originaltext vollständig wiedergegeben und mit Anmerkungen begleitet. Im Anschluss an die Thatsache, dass jene Verzeichnung des regelmässigen Fünfecks mit Hülfe nur einer einzigen Zirkelöffnung geleistet wird, schliesst sich eine kurze geschichtliche Entwickelung der früher in hohem Ansehen stehenden Geometrie Einer Zirkelöffnung an, welche der Namen Abul-Wasa, Cardanus, Tartaglia, Benedictus etc. Erwähnung zu thun hat und mit Steiner's berühmtem Werke ihren natürlichen Abschluss findet. Bei Gelegenheit der erwähnten Siebeneckconstruktion wird ferner gezeigt, wie sich dieselbe aus einem von Weihrauch für das reguläre Vierzehneck aufgestellten Theoreme naturgemäss herleiten lässt.

München. S. Günther.

M. Curtze: Bemerkungen zu dem Aufsatze Günther's: „Zur Geschichte der deutschen Mathematik im fünfzehnten Jahrhundert." (Schlömilch, Zeitschrift, XX., 3, Hist. Lit. Abth. 57—60.)

Zum Theil Berichtigungen, zum Theil weitere Ausführungen der Arbeit Günther's. Nachweis, dass das Buch „*Geometria deutsch*" den Bibliographen wohl bekannt, dass es handschriftlich noch ältere in deutscher Sprache verfasste Geometrieen giebt, und Darlegung des Weges, durch welchen Egen zur Kenntniss der Thatsache kam, dass Cardan durch Tartaglia zu den Problemen, die Aufgaben der Geometrie mit nur einer Zirkelöffnung auszuführen, angereizt wurde. Nebenbei wird die Erfindungsgeschichte der Auflösung der Gleichungen 3. Grades dem Werke von Hankel gegenüber richtig gestellt.

Thorn. M. Curtze.

M. Curtze: Reliquiae Copernicanae. Nach den Originalen in der Universitäts-Bibliothek zu Upsala herausgegeben. Mit einem Holzschnitt und einer lithographirten Tafel. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner. 1875. IV. 67 S. gr. 8. Preis 1,60 ℳ.

Bei Gelegenheit der von dem Herausgeber besorgten Säcularausgabe der Revolutiones von Copernicus waren demselben die dem grossen Astronomen einst gehörenden, jetzt in Upsala aufbewahrten Bücher auf hohe Verwendung des Fürsten Reichskanzlers zur Disposition gestellt. Obschon nun in denselben eine ziemliche Anzahl von Notizen sich finden, die für die oben erwähnte Ausgabe mit Nutzen hätten gebraucht werden können, so liessen die Umstände die Benutzung damals nicht zu. Deshalb hat der Verfasser in diesem Büchlein, das ein Separatabdruck aus Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik ist, nachträglich die betreffenden Notizen herausgegeben und mit ausführlichen historischen und sachlichen Bemerkungen versehen. Das Buch zerfällt in 5 Capitel nach den verschiedenen Büchern, denen die handschriftlichen Notizen des Copernicus entnommen sind. Das erste betrachtet die Randbemerkungen in dem *Λεξικὸν κατὰ στοιχείων* des Johannes Crastonus (Mutinc 1499), soweit dieselben nicht rein philologischen Werth haben; d. h. vorzugsweise Bemerkungen über den altgriechischen Kalender. Das

zweite nimmt von einer Note des Copernicus in der Editio Princeps des Euklides von 1482 ausgehend, worin derselbe von dem Werke des Nikomedes περὶ κογχοειδῶν γραμμῶν als einem ihm bekannten handelt, Veranlassung, die Geschichte der Trisection des Winkels bei den Griechen und Arabern näher zu erläutern. Dabei wird aus dem *Liber trium fratrum* zum ersten Male ein Abschnitt über die Trisection veröffentlicht, der im Wesentlichen mit dem von Copernicus commentirten identisch ist, und dem letztern Abschnitte wahrscheinlich als Quelle gedient hat. Das dritte Capitel handelt über die Einzeichnungen des Copernicus in die *Tabule Astronomice Alfonsi Regis* und der *Tabule directionum profectionumque* des Regiomontan. Hierin sind die Notizen sehr zahlreich und für das Verständniss der Revolutiones und deren Entstehungsgeschichte von höchster Wichtigkeit. Darunter finden sich auch Beobachtungen aufgezeichnet, die gleichfalls ihre Verwendung in dem grossen Werke gefunden haben, dazu eine Venusbeobachtung vom Jahre 1532, die späteste, welche bis jetzt von ihm bekannt geworden. Eine grosse Reihe von astronomischen Tafeln, Vorarbeiten für die Tafeln der Revolutionen, sowie eine ältere Form des letzten Capitels dieses Werkes kommen ebenfalls zum Abdruck. Auch wird der Nachweis geführt, dass weder Maurolykus noch Rheticus die Einführung der Secanten in die Trigonometrie gebührt, sondern Copernicus, dessen Secantentafel, an die bekannte Tangententafel, die Tabula foecunda des Regiomontan, angelehnt, ebenfalls abgedruckt ist. Eine Tafel benutzt schon zweite Differenzreihen zur Interpolation. Capitel 4 enthält dann astrologische Bemerkungen des Copernicus zu dem Albohazen Hali filius Abenragel von 1485; das erste Mal, dass solche Notizen entdeckt und veröffentlicht worden sind. Sie sind sämmtlich astrologisch-medicinischen Inhalts und aus dem Quadripartitum des Ptolemaios entnommen. Daran schliessen sich im fünften und letzten Capitel noch einige Bemerkungen über den Folianten V. I. 1. 17. der Universitätsbibliothek zu Upsala an, der Werke des Pontanus, des Bessarion und Arati phaenomena graece enthält. Mit wenigen Ausnahmen sind die von Copernicus hier abgedruckten Notizen zum ersten Male veröffentlicht; sie bilden eine nothwendige und wichtige Ergänzung zu der Säcularausgabe der Revolutionen. Ein Namen- und Sachregister schliesst den Band.

Thorn. M. Curtze.

M. Curtze: Hat Copernicus die Einleitung in sein Werk selbst gestrichen oder nicht?

In der Originalhandschrift der Revolutiones des Copernicus befindet sich eine von den frühern Ausgaben unterdrückte Einleitung, die erst 1854 von den Polen veröffentlicht wurde. Cantor hatte die Ansicht aufgestellt, diese Einleitung sei von Copernicus selbst gestrichen und an ihre Stelle die Widmung an Papst Paul III. getreten. Der Verfasser der kurzen Note versucht seine abweichende Meinung in Kürze darzulegen und kommt zu dem Schlusse, dass diese Einleitung ohne Erlaubniss des Copernicus, ja ohne dass er davon wusste, durch Rheticus auf Anrathen des Osiander gestrichen sei.

Thorn. M. Curtze.

G. Sidler: Zur Dreitheilung eines Kreisbogens. (Programm der Kantonschule in Bern, 1876.)

Die Lösung der Aufgabe, von einem gegebenen Kreisbogen den dritten Theil abzuschneiden, wird durch drei Punkte dargestellt, die Ecken eines dem Kreis eingeschriebenen regulären Dreiecks, oder algebraisch ist die Aufgabe vom dritten Grade. Es wird geometrisch gezeigt, dass die bekannten Hülfskurven, Conchoiden des Nikomedes, Kreisconchoiden, rechtwinklige Hyperbel, jedesmal alle drei Lösungen ergeben.

Von den Sätzen, die dabei abfallen, hebe ich hervor: Eine Hyperbel, deren Excentricitätsverhältniss $= 2$ sei, werde von einem Kreisbüschel geschnitten, dessen Grundpunkte der eine Brennpunkt E der Hyperbel und der Scheitel O des zu diesem Brennpunkt convexen Zweiges seien: so trifft jeder Büschelkreis die Hyperbel ausser in O noch in den Ecken eines regulären Dreiecks ABC; die Strahlen, die von E nach A, B, C gehen, treffen die Hyperbel je noch in einem zweiten Punkte A', B', C', dies Dreieck $A'B'C'$ ist ebenfalls ein reguläres, der demselben umschriebene Kreis gehört demselbenBüschel an und schneidet den Kreis ABC orthogonal.

Eine Hypocykloide mit vier Rückkehrpunkten (Astroiden) ist von der vierten Klasse. Wählt man den Punkt P auf dem der Curve eingeschriebenen concentrischen Kreise, so kann man von

den vier durch P gehenden Tangenten die eine sofort angeben, es ist die Gerade, für welche P die von den beiden Rückkehrtangenten begrenzte Strecke halbirt. Die drei übrigen Tangenten treffen den Kreis ausser in P noch in den Ecken A, B, C eines regulären Dreiecks. Sei Q der Symmetriepunkt von P in Bezug auf die eine Rückkehrtangente und O ein Schnittpunkt der andern Rückkehrtangente mit dem Kreise, so ist Bogen $(OA, OB, OC) = \frac{1}{3}$ Bogen OQ.

Bern. G. Sidler.

Mischer: Die Bewegung materieller Punkte auf vorgeschriebenen beweglichen Bahnen.

(Zeitschr. f. Math. u. Physik, Juniheft 1876.)

Sind q die independenten Coordinaten eines auf eine bestimmte irgendwie bewegliche Fläche oder Curve angewiesenen materiellen Punktes, der dem Einfluss beliebiger Kräfte unterliegt, und hängen seine auf ein festes System bezogenen Coordinaten: x, y, z mit den q und der Zeit t ganz allgemein durch die Gleichungen:

$$x = A_1(t, q_1, q_2),$$
$$y = A_2(t, q_1, q_2),$$
$$z = A_3(t, q_1, q_2),$$

zusammen, so findet man, durch Anwendung der zweiten Lagrange'schen Form des d'Alembert'schen Princips, als erste Bewegungsgleichung, der die, für den Fall, dass der q zwei sind, hinzutretende zweite ganz analog ist:

$$q_1'' \left(\frac{\partial A}{\partial q_1}\right)^2 + q_2'' \frac{\partial A}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial A}{\partial q_2} + q_1' \frac{\partial A}{\partial q_1} \frac{d \frac{\partial A}{\partial q_1}}{dt} + \frac{\partial A}{\partial q_1} \frac{d \frac{\partial A}{\partial t}}{dt} + q_2' \frac{\partial A}{\partial q_1} \frac{d \frac{\partial A}{\partial q_2}}{dt} - Q_1 \ddagger 0.$$

Hier deuten die Accente die Differentiation nach der Zeit, das Zeichen $\ddagger$ aber das nur durch ein A ohne Index angezeigte Vorkommen dreigliedriger Summen links an; Q ist gleich $\frac{\partial U}{\partial q}$.

Es ergeben sich nun die folgenden Resultate:

1.

Die Bewegungsgleichungen sind linear, wenn die Bahn des Punktes eine Gerade oder eine Ebene, oder die Fläche eines Kreiscylinders oder eine auf einer solchen Fläche verzeichnete Curve ist.

Es hängt also nur von den geometrischen Eigenschaften der Bahn ab, ob die Gleichungen zu den linearen gehören oder nicht.

2.

Die Zeit kommt dann nicht explicite in den Bewegungsgleichungen vor, wenn der Punkt von constanten Kräften beeinflusst wird und die Bahn eine ausschliesslich translatorische Bewegung hat, die mit constanter Beschleunigung — welche auch gleich Null sein kann — erfolgt.

Von den nicht ausschliesslich translatorischen Bewegungen der Bahn ist (mit einer einzigen Ausnahme) die Rotation mit constanter Winkelgeschwindigkeit um eine feste Axe, längs welcher allein Kräfte wirken dürfen, eine Rotation, mit welcher ein constant beschleunigtes Fortschreiten in der Richtung jener Axe verbunden sein kann, diejenige, unter deren Voraussetzung t nicht explicite in den Bewegungsgleichungen erscheint. Es kommt hierbei also auf die mechanischen Eigenschaften des Systems an.

Minden i. Westf. Mischer.

Heinr. Streintz: Ueber die Temperaturvertheilung im Leitungsdrahte eines galvanischen Stromes.

(Auszug aus dem am 12. Aug. 1876 der Redaction von Pogg. Ann. d. Phys. u. Chemie eingesandten Manuscripte.)

Wird durch einen Draht ein galvanischer Strom geleitet, so erhöht sich dessen Temperatur so lange, bis der stationäre Zustand eintritt, bis nämlich in jedem körperlichen Elemente des Drahtes durch den Strom gerade so viel Wärme erregt wird, als durch die umliegenden Theilchen gegen die Oberfläche, und durch diese in das umgebende Medium abgeführt wird.

Sieht man von den Enden des Drahtes ab, so ist die Rechnung ein Problem der Ebene. Bezeichnet man mit k das Wärmeleitungsvermögen, mit u die Temperatur in irgend einem Punkte des Querschnittes, so stellt der Ausdruck

$$k\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}\right)dx\,dy\,dt$$

die Menge dar, um welche einem Flächenelemente von den umliegenden mehr Wärme zugeführt als abgeführt wird.

Durch den galvanischen Strom wird nach dem Joule'schen Gesetze während derselben Zeit erregt

$$wi^2\,dx\,dy\,dt.$$

Für den stationären Zustand muss die Summe beider Ausdrücke der Null gleich sein, daher

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + J = 0; \; J = \frac{\varkappa i^2}{k}.$$

Als Integral der Gleichung ergibt sich

$$u = A - \frac{J}{4} r^2 + B \log nr.$$

Da aus leicht erkennbaren physikalischen Gründen $B = 0$ sein muss, so bleibt nur A zu bestimmen.

Ist die Oberflächentemperatur τ des Drahtes gegeben, und heisst der Halbmesser a, so wird

$$u = \tau + \frac{J}{4} (a^2 - r^2). \quad \text{I.}$$

Führt man aber statt τ den Coefficienten der *äusseren* Wärmeleitungsfähigkeit H ein, so tritt die Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=a} + h (u - U)_{r=a} = 0; \; h = \frac{H}{k}$$

hinzu, in welcher U die Temperatur des umgebenden Mediums bedeutet, und man erhält

$$u = U + \frac{J}{2h} a + \frac{J}{4} (a^2 - r^2). \quad \text{II.}$$

Zur numerischen Berechnung müssen h und J bekannt sein J, ursprünglich durch Widerstand, Stromstärke und Leitungsvermögen ausgedrückt, kann aber auch durch die erreichte Oberflächentemperatur und h ausgedrückt werden. Aus dem Vergleiche von I und II folgt nämlich

$$J = \frac{2h}{a} (\tau - U).$$

h bestimmte ich experimentell dadurch, dass ich durch eine dickwandige Messingröhre heisses Wasser von bekannter Temperatur strömen liess und an der äusseren Mantelfläche die Temperatur beobachtete. Die Theorie ergibt für diesen Fall

$$h = \frac{\tau_2 - \tau_1}{c_1 (\tau_1 - U) (\log n\, c_1 - \log n\, c_2)}$$

worin τ_1 und τ_2 die Temperaturen, c_1 und c_2 die Halbmesser des äusseren und inneren Umfanges bezeichnen; aus den Beobachtungen folgt dann

$$h = 0 \cdot 00078$$

Man kann nun für einen Messingdraht berechnen, um wie viel die Temperatur im Centrum höher ist als an der Oberfläche, und

erhält wenn $\dot{a} = 0 \cdot 25$ Mm., $\tau = 55^0 \cdot 5$ C., $U = 18^0$ C.

$$u_c - \tau = 0^0 \cdot 0037 \text{ C.}$$

Ohne weitere Beobachtungen zu machen, kann man nun die angegebene Temperaturdifferenz auch für andere Drähte rechnen.

Schliesslich muss ich noch erwähnen, dass auch Edlund im Maihefte von Pogg. Ann. eine Berechnung der Temperaturvertheilung im galvanisch erwärmten Drahte geliefert hat, doch ist seine Ableitung von der hier gegebenen gänzlich verschieden; auch sind die erhaltenen Gleichungen nicht so allgemein, und endlich basiren die numerischen Daten auf ganz anderen Experimenten, als den von mir angewendeten, so dass ich keinen Anstand nahm, meine schon vor dem Erscheinen von Edlunds Arbeit fertigen Untersuchungen dennoch der Oeffentlichkeit zu übergeben.

Graz. Heinr. Streintz.

Merriman: On the Moments and Reactions of Continuous Girders. By Mansfield Merriman, C. E., Instructor in Civil Engineering in the Sheffield Scientific School at New Haven, U. S. A. — From Journal of the Franklin Institute 1875. vol. LXIX, p. 206, p. 255.

This is an investigation of the relations of the moments and reactions of continuous girders of equal spans. The girder is considered as loaded uniformly troughout its whole length, uniformly in a single span, or with a single load applied at any point, and tables are given exhibiting the moments and reactions at all supports due to either of there loads. The tables or triangles are shown to be subject to simple laws resulting from the properties of the Clapeyronian numbers, by which they may be readily extendend to include any number of spans. Girders with the two end spans different in lenght from the central ones are also discursed and general formulae for the moments and reactions due to any kind of loading are presented.

New-Haven. Merriman.

Merriman: On the Flexure of Continuous Girders. By Mansfield Merriman C. E., Instructor in Civil Engineering in the Sheffield Scientific School at New Haven, U. S. A. — From Lond. Edin. and Dubl. Philosophical Magazine 1875. 4. vol. 50, p. 179.

This article discusses in a general manner the determination of exterior and interior forces due to any kind of loading in a continuous girder of any number and lengths of spans. Formulae for the moments at the supports are deduced in terms of two kinds of quantities, one defending upon the load and its position and the other only upon the numbers and lengths of the spans. The method is entirely general and is shown to be applicable even to the discussion of girders with horizontally fastened ends. A number of problems are given to show the readiness with which the formulae apply to particular cases.

New-Haven. Merriman.

Gordan: Ueber den Fundamentalsatz der Algebra.
(Mathematische Ann. 10. Bd.)

Der Verfasser hat den 2. Beweis (algebraischen) von Gauss des Satzes:

„Jede rationale und ganze Function einer Variabeln x ist in lineare Factoren zerlegbar"

in einigen wesentlichen Punkten vereinfacht.

Gauss untersucht solche Resolventen einer Gleichung $f(x) = 0$ mit reellen Coefficienten, aus deren Wurzeln sich die Werthe von Summe und Produkt von zweien der Wurzeln von f berechnen lassen. Unter denselben befindet sich, wie Gauss zeigt, mindestens eine, deren Discriminante nicht verschwindet, von deren Wurzeln also Summe und Produkt zweier Wurzeln von f rational abhängen.

Der Verfasser dagegen untersucht die Resultante $R(u)$ von: $f(x)$ und $f(x+u)$. Es gibt stets einen Werth von u, für welchen $R(u) = 0$ ist und daher $f(x)$ und $f(x+u)$ einen gemeinsamen Factor haben; $f(x)$ ist also in Factoren zerlegbar. Wir setzen $f(x) = g(x)\,h(x)$ und unterscheiden die beiden Fälle, wo die Coefficienten in g (also auch in h) reell oder imaginär sind.

Jedesmal kann die Auflösung von f auf die einer Gleichung niedrigeren Grades zurückgeführt werden. Ist g reell, so ist dies sofort klar; andern Falls ist auch u imaginär und zwar, wie sich zeigt, rein imaginär, so dass $g\left(x+\frac{u}{2}\right)$ nur reelle Coefficienten besitzt.

Erlangen. P. Gordan.

P. Gordan und M. Noether: Ueber die algebraischen Formen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet.

(Math. Ann. X. pag. 547.)

Die Frage nach der Bedeutung des identischen Verschwindens der Hesse'schen Determinante einer Form, welche wir in diesem Aufsatze erledigen, ist schon seit lange gestellt: Hesse hat sie zuerst im 42sten, dann im 56sten Bd. des Crelle-Borch. J. behandelt und sie dahin beantwortet, dass sich die homogene Form von r Variabeln durch lineare Substitution in eine solche von weniger als r Variabeln transformiren lasse, oder, was dasselbe ist, dass die Beziehungen zwischen den Polaren der Form lineare seien. Wie mir H. Christoffel vor längerer Zeit, zugleich unter Angabe des Satzes, dass sich jene Transformation jedenfalls durch eine rationale, eindeutig umkehrbare Substitution erreichen lasse, mitgetheilt hat, sind die Mängel des Hesse'schen zweiten Beweises, die in einer unzulässigen Auflösung eines Systems linearer Gleichungen liegen, gleich nach dem Erscheinen dieses Aufsatzes bemerkt worden, und wurde damals von H. Weierstrass ein Zweifel an der Richtigkeit des Hesse'schen Satzes geäussert. Indess sind die falschen Beweise in mehrere Lehrbücher übergegangen.

Zur Behandlung der Frage nach der Richtigkeit des Satzes boten sich sehr verschiedenartige Methoden dar, die das Gemeinsame hatten, zwar je eine Reihe von Eigenschaften der Formen zu liefern oder einzelne Formengebiete zu erledigen, ohne aber den letzten Schluss zuzulassen. Eine solche Erledigung der cubischen ternären und quaternären Formen im Sinne des Hesse'schen Satzes, mittelst einiger Determinantenrelationen, ist von H. Pasch (Borch. J. 80) veröffentlicht worden. Die ternären Formen überhaupt hat H. Gordan, ebenfalls unter Bestätigung des Satzes, erledigt (Sitz.-Ber. der phys.-med. Soc. Erlangen v. 13. Dec. 1875), hauptsächlich durch

eine besondere Darstellung der Determinante eines Products von Formen und einzelne Schlüsse über die Gestalt der zwischen den Polaren bestehenden Relation.

Nachdem H. Gordan und ich durch eine Vergleichung unserer verschiedenen, einzeln nicht zum Ziele führenden, Methoden erkannt hatten, dass die Betrachtung der Relation zwischen den Polaren selbst, nicht der Determinante, den Ausgangspunkt der Untersuchung zu bilden hat, nahmen wir die Untersuchung nun gemeinsam von dieser Seite her auf, indem wir die Frage nach allen Formen stellten, zwischen deren Polaren Relationen bestehen. Das *Resultat* zunächst ist Folgendes:

„Der Hesse'sche Satz gilt für alle binären, ternären und quaternären Formen, dagegen *nicht* mehr für die Formen von mehr als vier Variabeln und zugleich von höherer als der zweiten Ordnung. Für diese Fälle lassen sich ganze Classen von Formen aufstellen, deren Determinante verschwindet, ohne dass zwischen ihren Polaren lineare Relationen stattfinden."

Ich deute auch den Weg an, auf welchem dieses Resultat erhalten wird:

Wir nehmen unter den Relationen zwischen den Polaren f_i der Form f eine solche von möglichst niedriger Dimension in den f_i, $\pi(f_i) = 0$ heraus. Wenn nun die $\frac{\partial \pi}{\partial f_i}$ den Functionen $h^{(i)}(x)$, welche keinen Factor gemeinsam haben sollen, proportional sind, so dass sich die Relation auch $\sum_i h^{(i)} f_i = 0$ schreibt, so betrachten wir die lineare partielle Differenzialgleichung

$$\sum_i h^{(i)} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0.$$

Die wesentliche Eigenschaft der ganzen Lösungen Φ dieser Gleichung ist in der für alle λ gültigen Relation ausgesprochen:

$$\Phi\left(x_i + \lambda h^{(i)}\right) = \Phi(x_i).$$

Diesen Gleichungen genügen auch die Functionen $h^{(i)}$ selbst, was z. B. durch die Beziehung $h^{(i)}(h) = 0$ ohne Weiteres zur Erledigung aller ternären Formen führt. Im Allgemeinen dienen die Gleichungen

$$\sum_i h^{(i)} \frac{\partial h^{(k)}}{\partial x_i} = 0$$

zur Begrenzung der Functionen $h^{(i)}$. Zur weiteren Ausscheidung der *ganzen* Functionen $h^{(i)}$ wird eine *Transformation* verwandt:

$$\xi_i = h^{(i)}(x) \equiv h^{(i)}(x + \lambda \xi),$$

in welcher die Substitutionsdeterminante und eine Reihe ihrer Unterdeterminanten verschwinden, bei der also jedem Werthe ξ unendlich viele Werthsysteme x entsprechen. Diese Beziehung muss unter den verschiedenen Annahmen verfolgt werden, dass das ξ-Gebiet eine, zwei, drei .... Dimensionen hat. Wir erhalten indess die allgemeine Erledigung dieses h-Problems nur für ein *einfach*-unendliches ξ-Gebiet, für mehr Dimensionen nur Eigenschaften der $h^{(i)}$-Functionen.

Zu einem Theil solcher Functionen $h^{(i)}$ gehören neue Functionen f zu, definirt durch die partiellen Differentialgleichungen für f:

$$\sum_i f_i \frac{\partial h^{(i)}}{\partial x_k} = 0.$$

Die Lösungen ergeben sich in demselben Umfange, wie das h-Problem gelöst ist. So erwähne ich, dass für die allgemeinste quinäre Form f, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet, entweder der Hesse'sche Satz gilt, oder sie muss von der Form sein:

$$f = \varphi(Q, x_1, x_2),$$

wo
$$Q = x_3 P_1 + x_4 P_2 + x_5 P_3$$

die P_i beliebige ganze homogene Functionen gleicher Ordnung von x_1 x_2 und die Function φ von Q, x_1, x_2 ebenfalls beliebig ist.

Erlangen. M. Noether.

Gundelfinger: Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung, von Otto Hesse. Revidirt und mit Zusätzen versehen von S. Gundelfinger. Dritte Auflage.

(Leipzig, B. G. Teubner 1876.)

Unter den Aenderungen, welche der Herausgeber der dritten Auflage bei der Revision vorgenommen, sind ausser zahlreichen kleineren Zusätzen — vgl. beispielsweise SS. 85. 88. 129. 164—165. 179—180. 249 — besonders folgende hervorzuheben:

Der Verfasser hatte mehrere wichtige Sätze über die Focalcurven und die reellen Kreisschnitte der Oberflächen zweiter Ordnung entweder nur historisch angeführt oder ungenügend bewiesen. Diese Lücken wurden durch theilweise Umarbeitung der Vorlesungen 24. und 28. ausgefüllt. (Cfr. SS. 349—353. 399. 402. 403. 406 bis 409.) Gleichzeitig ist als eine unmittelbare Anwendung von Formeln aus der letzterwähnten Vorlesung 28 eine Untersuchung über die partielle Differentialgleichung für den Parameter einer Dupin'schen Flächenschaar auf den Seiten 441—448 eingefügt worden.*)

Da die Theorie der quadratischen Formen als die Quelle fast sämmtlicher Ausführungen des Werkes zu betrachten ist, so hat der Herausgeber den weiteren Ausbau dieser Theorie auf Grund der Arbeiten von Kronecker und Weierstrass unternehmen zu müssen geglaubt, und zwar in besonderen Supplementen, um die Originalität der darauf bezüglichen Untersuchungen Hesse's nicht zu schädigen. Es würde dem Zwecke der vorliegenden Mittheilung widersprechen, im Einzelnen anzuführen, was diesen Supplementen im Vergleiche mit bereits bekannten Ergebnissen eigenthümlich ist. Nur so viel möge im Allgemeinen bemerkt werden, dass es dem Herausgeber bei sämmtlichen Zusätzen überhaupt weniger darauf ankam, neue geometrische Sätze zu gewinnen, als vielmehr die algebraischen Entwickelungen weiter zu führen oder wenigstens formal zu vereinfachen. Derselbe verweist in dieser Hinsicht namentlich auf das dritte Supplement, in welchem die Lehre vom Flächenbüschel zweiter Ordnung *ohne Zuhilfenahme von Theoremen aus der analytischen Geometrie der Ebene* behandelt ist.

Tübingen. S. Gundelfinger.

*) Bei dieser Gelegenheit sei auf ein sinnentstellendes Versehen aufmerksam gemacht, das leider in einigen Exemplaren nicht mehr berichtigt werden konnte. Auf Seite 448, Z. 13 v. u. ist nämlich anstatt *„dass“* zu lesen: *dass unter anderen.*

H. Weissenborn: Grundzüge der analytischen Geometrie der Ebene für orthogonale und homogene Punkt- und Linien-Coordinaten. Von Dr. Hermann Weissenborn, Professor am Grossherzoglichen Realgymnasium zu Eisenach. (Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1876. 236 S. 8.)

Nachdem schon früher Möbius und Plücker sich trimetrischer Coordinaten bedient hatten, ward neuerdings, namentlich durch Salmon-Fiedler's „Analytische Geometrie der Kegelschnitte", die Aufmerksamkeit wieder auf diese Methode gelenkt und der Vortheil, den sie bei geometrischen Untersuchungen bietet, besonders wenn die Gleichungen in homogener Form dargestellt werden, immer mehr anerkannt. Da jedoch in dem Fiedler'schen Werke seiner ganzen Anlage nach die Lehre von den trimetrischen und homogenen Coordinaten nur verwebt und verflochten in diejenige der Cartesischen Coordinaten vorkommen konnte, so regte sich der Wunsch, erstere für sich als ein zusammenhängendes Ganzes dargestellt zu sehen. Dies bezwecken denn auch zwei in den letzten Jahren erschienene Werke: die „Elemente der analytischen Geometrie in homogenen Coordinaten, von R. Heger. 1872", und die „Elemente der analytischen Geometrie in homogenen Coordinaten, von L. Schendel. 1874". Aus gleicher Absicht auch ist meine Schrift hervorgegangen. Sie verfolgt daher dasselbe Ziel, wie die bisher genannten, unterscheidet sich aber gleichwohl von ihnen in mehrfacher Beziehung.

Hinsichtlich der Darstellung nämlich schien es mir nicht zweckmässig, die Lehre von den homogenen Coordinaten für sich allein zu geben, wie es Heger und Schendel thun, vielmehr knüpfe ich lieber, wie Fiedler, an die Theorie der orthogonalen Coordinaten als die bekanntere an, schicke aber alle diejenigen Sätze, auf welche später Bezug genommen wird, zu einem Ganzen zusammengefasst, im 1. Abschnitt voraus, und nehme in diesen auch die Lehre von den orthogonalen Linien-Coordinaten auf. Im 2. Abschnitt, der Theorie der homogenen Coordinaten, sehe ich nicht, wie Schendel, Flächen als Coordinaten an, sondern es schien mir natürlicher, den Weg einzuschlagen, welchen Heger betreten hat. Dieser nämlich bedient sich der von Plücker angewandten homogenen Linien-Coordinaten, jedoch mit der Modification, dass als solche nicht die Abstände einer Geraden von den drei Ecken eines Fundamentaldreiecks angesehen werden, sondern die Quotienten dieser Abstände und der Entfernung der Geraden vom Coordinaten-Anfangspunkt.

Unter dieser Voraussetzung wird die Lage einer Geraden durch ihre Coordinaten eindeutig bestimmt. Während ich mich daher in dieser Hinsicht an das Verfahren Heger's anschliesse, gehe ich noch einen Schritt weiter und nehme auch bei den trilinearen Punktcoordinaten nicht die linearen Entfernungen eines Punktes von den Seiten eines Fundamentaldreiseits, sondern die Quotienten aus diesen und den Abständen des Coordinaten-Anfangspunktes von den Seiten des Dreiseits als Coordinaten des Punktes an. Denn es war mir im Voraus gewiss, dass eine Uebereinstimmung der Gesetze über Punkt- und Linien-Coordinaten nicht erzielt werden könne, wenn unter ersteren lineare Strecken, unter letzteren aber Verhältnisse zweier Strecken verstanden werden, und die weitere Untersuchung, namentlich rücksichtlich der Beständigkeit der Coefficientensumme bei der Transformation einer Kegelschnittsgleichung auf ein neues Dreieck, bestätigte diese Ansicht.

Hinsichtlich des Inhalts unterscheidet sich meine Schrift von den oben genannten dadurch, dass ich den Gegenstand in einer andern Richtung behandele. Es lag nämlich nicht in meiner Absicht, auf das Einzelne einzugehen, sondern nur den Leser bekannt zu machen mit dem Gebrauche der verschiedenen hier angewandten Coordinaten, und ihn in den Stand zu setzen, die speciellen Lehren der ebenen analytischen Geometrie selbst abzuleiten. Meine Schrift soll daher nur die „Grundzüge“ dieser Disciplin, oder die wichtigsten allgemeinen Sätze enthalten. Zu diesen rechne ich einmal diejenigen, welche dazu dienen, die bei analytisch-geometrischen Untersuchungen auftretenden nächsten Fragen zu beantworten. Eine der ersten derselben schien mir die zu sein, ob und unter welchen Umständen eine Gleichung 2. Grades einen Kegelschnitt, und wann sie den einen oder anderen repräsentirt. Aus diesem Grunde habe ich, unter besonderer Berücksichtigung der Discriminante und ihrer Partial-Determinanten, die Classification der Kegelschnitte ausführlich behandelt, wobei ich in dem Falle, dass ihre Gleichung in orthogonalen Linien-Coordinaten gegeben ist, um die Analogie mit der bei orthogonalen Punkt-Coordinaten durchgeführten Untersuchung aufrecht zu erhalten, ein anderes Verfahren einschlagen musste, als Plücker im 2. Theile seiner „Analytisch-geometrischen Entwickelungen“. Als ebenfalls wichtige allgemeine Sätze erschienen mir ferner diejenigen, welche die harmonischen und anharmonischen Verhältnisse betreffen, da sie den Ausgangspunkt für die Lehre von den polaren und collinearen Eigenschaften bilden; von einer Erörte-

rung der letzteren habe ich jedoch, wenigstens vorläufig, abgesehen, um so mehr, als man dieselbe bei Heger und in synthetischer Darstellung in meiner „Projection in der Ebene. 1862" durchgeführt findet. Sodann glaubte ich auch, da von den hier in Betracht gezogenen vier Arten von Coordinaten-Systemen, orthogonale und homogene Punkt- und Linien-Coordinaten, die eine leichter zur Auffindung der einen, die andere leichter zur Auffindung der anderen Eigenschaft führt (wofür der letzte Artikel je vom 1. und 2. Abschnitt ein Beispiel bietet), den Weg angeben zu sollen, wie man von dem einen System zu einem anderen übergeht. Ich habe deshalb der Transformation der Gleichungen, namentlich derjenigen 2. Grades, auf eine andere Art von System besondere Aufmerksamkeit geschenkt und die auch hier sich zeigende Bedeutung der Discriminante und ihrer Partial-Determinanten hervorgehoben. Da endlich auch bei Beibehaltung derselben Art von Coordinaten-System die Wahl der Axen bei orthogonalen, des Fundamental-Dreiseits oder -Dreiecks bei homogenen Coordinaten nicht gleichgültig ist, so habe ich diese Fälle mit in das Bereich meiner Untersuchung gezogen; und zwar beschränke ich mich beim Uebergange von einem orthogonalen Punkt- oder Linien-System auf ein gleichartiges anderes auf den für meine Zwecke allein in Betracht kommenden Fall, dass die neuen Axen den ursprünglichen parallel laufen, ausführlich dagegen behandele ich die Verhältnisse, welche stattfinden, wenn eine homogene Gleichung in eine ebensolche, aber auf ein anderes Dreiseit oder Dreieck bezogene, transformirt wird. Sind nämlich die Seiten g_k des ursprünglichen, und die Seiten g'_k des neuen Dreiseits repräsentirt durch die Gleichungen bezüglich

$$g_k \equiv \mathfrak{y}_k y + \mathfrak{x}_k x - 1 = 0, \qquad g'_k \equiv \mathfrak{y}'_k y + \mathfrak{x}'_k x - 1 = 0,$$

setzt man die Determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{x}_1 & \mathfrak{y}_1 \\ 1 & \mathfrak{x}_2 & \mathfrak{y}_2 \\ 1 & \mathfrak{x}_3 & \mathfrak{y}_3 \end{vmatrix} = \mathfrak{D}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{x}'_1 & \mathfrak{y}'_1 \\ 1 & \mathfrak{x}'_2 & \mathfrak{y}'_2 \\ 1 & \mathfrak{x}'_3 & \mathfrak{y}'_3 \end{vmatrix} = \mathfrak{D}',$$

und bezeichnet man ferner mit $\mathfrak{D}_{tp}$ den Werth von $\mathfrak{D}$, welcher entsteht, wenn $\mathfrak{y}'_p$, $\mathfrak{x}'_p$ statt $\mathfrak{y}_t$, $\mathfrak{x}_t$ eingesetzt wird, mit $\mathfrak{D}'_{tp}$ den Werth von $\mathfrak{D}'$, welcher entsteht, wenn $\mathfrak{y}_p$, $\mathfrak{x}_p$ statt $\mathfrak{y}'_t$, $\mathfrak{x}'_t$ eingesetzt wird (wo t und p je eine der Ziffern 1, 2, 3 sind), so dass also z. B.

$$\begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{x}'_2 & \mathfrak{y}'_2 \\ 1 & \mathfrak{x}_2 & \mathfrak{y}_2 \\ 1 & \mathfrak{x}_3 & \mathfrak{y}_3 \end{vmatrix} = \mathfrak{D}_{12}; \qquad \begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{x}_2 & \mathfrak{y}_2 \\ 1 & \mathfrak{x}'_2 & \mathfrak{y}'_2 \\ 1 & \mathfrak{x}'_3 & \mathfrak{y}'_3 \end{vmatrix} = \mathfrak{D}'_{12}$$

ist, so finden zwischen den beiden Arten von Determinanten $\mathfrak{D}_{tp}$, $\mathfrak{D}'_{tp}$ eine Reihe gegenseitiger Beziehungen statt, deren Bedeutung bei der Transformation besonders hervortritt, welche aber wohl auch für andere Untersuchungen von Interesse sein könnten. Indem ich so die Umformung der Gleichungen ausführlich behandelt habe, gedachte ich zugleich dem Leser gewissermassen einen praktischen Dienst zu erweisen dadurch, dass er in den Stand gesetzt wird, ohne Weiteres, falls es wünschenswerth erscheint, von einem System auf ein anderes überzugehen, indem er Alles, was in diesem Falle zu wissen nöthig ist, gegeben vorfindet, so dass er der Mühe des Transformirens überhoben ist und das Buch gleichsam zum Nachschlagen benutzen kann. Vielleicht auch darf ich hoffen, dass die Ergebnisse der Transformationen als Beispiele für die Gesetze der linearen Substitution nicht unwillkommen sein werden, obschon sie ohne Anwendung dieser Theorie gefunden worden sind.

Ich habe nämlich absichtlich keine anderen Vorkenntnisse vorausgesetzt als die ersten Begriffe der Cartesischen Geometrie und die Elemente der Lehre von den Determinanten. Denn ich war der Ansicht, je leichter verständlich die Schrift sei, um so mehr werde sie zur weiteren Ausbildung des hier befolgten Verfahrens anregen und zur Förderung analytisch-geometrischer Forschungen beitragen. In wie weit es mir gelungen ist, dieses Ziel durch meine Arbeit, bei welcher mir ausser den oben genannten Werken von Heger und Fiedler noch Stammer's „Lehrbuch der analytischen Geometrie. 1863", sowie die Werke über Determinanten von Baltzer und Günther von Nutzen gewesen sind, zu erreichen, möge der Leser entscheiden.

Eisenach. H. Weissenborn.

Moshammer, C.: Zur Geometrie der Schraubenbewegung und einer Regelfläche dritter Ordnung.

— Zur Geometrie ähnlicher Systeme und einer Fläche dritter Ordnung.

(Sitzungsberichte der k. k. Academie d. W. in Wien, März- und Juni-Heft 1876.)

Die Achsen, mittelst welcher durch Schrauben-Bewegung eine Strecke MN auf der Geraden G in eine vorgeschriebene Lage $M'N'$

auf G' gebracht wird, erfüllen *eine Regelfläche F_3 dritter Ordnung*, deren einfache Leitende durch die Stellung der den $\sphericalangle (MN, M'N')$ normal halbirenden Ebenen E und deren Doppelgerade ox normal zu E durch das Centrum der Strecke zwischen den Punkten der (kürzesten) Distanz, G von G', bestimmt ist.

Die Doppelebenen des involutorischen Büschels, welches aus ox die Erzeugenden projicirt, sind *Symmetralebenen zur* F_3; die orth. Projectionen der F_3-Curven zweiter Ordnung auf die Ebenen E sind *Kreise* etc.

Die Rotationsachsen, mittelst welcher eine (unbegrenzte) Gerade G in eine vorgeschriebene Lage G' gebracht wird, bilden die beiden Regelschaaren eines hyperbolischen Paraboloids, dessen Asymptot-Ebenen den $\sphericalangle (G, G')$ und seinen Nebenwinkel normal halbiren.

Die Bestimmung der eingangs genannten Achsen zu zwei sich *schneidenden* Geraden G, G' führt auf ein, gegenüber dem bisher Bekannten, sehr einfaches Verfahren, zur *Ermittlung der sich selbst entsprechenden Geraden zweier einstimmig congruenter Raumsysteme (Centralachse der Bewegung).*

Bezüglich zweier allgemein liegender *entgegengesetzt congruenter* (symmetrischer) *Raumsysteme* S, S' gilt der Lehrsatz:

„*Entspricht dem ebenen Systeme e in S das System e' in S' und dreht man S' um die Linie (e, e'), so beschreibt der Doppelpunkt (Symmetralcentrum) zu S, S' eine Gerade normal zu e, welche den sich selbst entsprechenden Punkt m der beiden durch Umklappung von e' nach e einstimmig congruenten ebenen Systeme enthält. Die sich selbst entsprechende Gerade zu S, S' erzeugt in einer Ebene normal zu e einen Strahlbüschel zweiter Ordnung, welcher eine Parabel vom Scheitel m umhüllt, deren Brennpunkt auf jener Geraden liegt, die durch Umklappung von e' nach e im entgegengesetzten Sinne in den vereinten Systemen e, e' sich selbst entspricht*“; woraus eine einfache Bestimmung der Doppelelemente zu S, S' (Punkt, Gerade, Ebene) resultirt.

Sind MN, $M'N'$ homologe Strecken zweier im Quotienten v ähnlicher Reihen auf G, G' und benennt man die Stellung der Ebenen, welche $\sphericalangle (MN, M'N')$ und seinen Nebenwinkel normal halbiren beziehungsweise mit u, u', ferner die durch die Leitenden G, G', u und G, G', u' bestimmten Regelschaaren mit $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, so werden durch eine Gerade $\begin{Bmatrix} ox \\ o'x' \end{Bmatrix}$ die zwischen G, G' liegenden Strecken

der Schaar $\begin{Bmatrix} \mathfrak{S} \\ \mathfrak{S}' \end{Bmatrix}$ im Verhältniss $\begin{Bmatrix} -v \\ +v \end{Bmatrix}$ getheilt und *die Achsen, mittelst welcher durch Rotation von G um je eine derselben* (*A*) *durch* $\sphericalangle \begin{Bmatrix} MAM' \\ MAM' + 2R \end{Bmatrix}$ *beide Reihen in* $\begin{Bmatrix} \text{einstimmig} \\ \text{entgegengesetzt} \end{Bmatrix}$ *perspectivische Lage kommen, erfüllen eine Regelfläche* $\begin{Bmatrix} F_3 \\ F'_3 \end{Bmatrix}$, welche die $\begin{Bmatrix} ox \\ o'x' \end{Bmatrix}$ als Doppelgerade und die Stellung $\begin{Bmatrix} u \\ u' \end{Bmatrix}$ sowie einen Kreis *K* (Ort der Aehnlichkeitscentra zu *G*, *G'*) als einfache Leitende hat.

Die orth. Projectionalen der F_3-Curven zweiter Ordnung auf die Ebene *K* sind *Kreise* etc.

Bezüglich zweier allgemein liegender $\begin{Bmatrix} \text{einstimmig} \\ \text{entgegengesetzt} \end{Bmatrix}$ *ähnlicher Raumsysteme S, S'* resultirt der Lehrsatz:

„Entspricht dem ebenen Systeme e in S das System e' in S' und dreht man S' um die Linie (*e, e'*), *so beschreibt der Doppelpunkt (Aehnlichkeitscentrum)* $\begin{Bmatrix} d \\ d' \end{Bmatrix}$ *zu S, S' einen Kreis K normal zur Ebene e, dessen Durchmesser-Endpunkte die zwei sich selbst entsprechenden Punkte der beiden in der Ebene e, durch zweifache Umklappung von e' nach e, vereinten ebenen Systeme sind.*

Bei genannter Drehung des Systems S' erzeugt die sich selbst entsprechende Gerade $\begin{Bmatrix} A \\ A' \end{Bmatrix}$ *zu S, S' eine Regelfläche* $\begin{Bmatrix} F_3 \\ F'_3 \end{Bmatrix}$ *mit dem Kreisschnitte K und der Doppelgeraden in e normal zur Ebene K etc.* Auf Grund dieses Gesetzes ergiebt sich ebenfalls eine sehr einfache Bestimmung der Doppelelemente zu zwei allgemein liegenden $\begin{Bmatrix} \text{einstimmig} \\ \text{entgegengesetzt} \end{Bmatrix}$ ähnlichen Raumsystemen.

Graz. C. Moshammer.

C. A. Bjerknes: Forelöbige Meddelelser om de Kräfter, der opstaa, naar kugleformige Legemer, idet de ùdföre Dilatations- og Kontraktions-Svingninger, beväge sig i et inkompressibelt Fluidum. (Videnskabsselskabets Forhandlinger i Christiania, Aar 1875. Pag. 386—401.)

Die unten besprochenen „vorläufigen Mittheilungen über die Kräfte (Druckkräfte), die entstehen, wenn kugelförmige Körper,

indem sie Dilatations- und Contractions-Schwingungen ausführen, in einer incompressiblen Flüssigkeit sich bewegen", wurden im September 1875 der Wissenschaftsgesellschaft in Christiania vorgelegt. Sie können als Fortsetzung einer anderswo — bei Gelegenheit der Versammlung der skandinavischen Naturforscher in Christiania im Sommer 1868 — gegebenen Mittheilung aufgefasst werden, welche die gleichzeitige Bewegung mehrerer Kugeln zum Gegenstand hatte; der betreffende Aufsatz wurde in den in dem folgenden Jahre herausgegebenen Verhandlungen unter dem Titel: „om den samtidige Bevägelse af kugleformige Legemer i et inkompressibelt Fluidum" publicirt, Pag. 205—257.

Den erwähnten neuen Mittheilungen schliessen sich ferner zwei frühere, beide in den Verhandlungen der Wissenschaftsgesellschaft veröffentlichte, Abhandlungen an, von welchen die erste, aus dem Jahre 1863, eine Verallgemeinerung des Dirichlet'schen Kugelproblems giebt, indem jetzt die in der Flüssigkeit bewegte Kugel zugleich das Volumen ändern darf. Sie ist unter dem Titel: „om de indre Tilstande i et inkompressibelt Fluidum, hvori en Kugle beväger sig, idet den forandrer Volum", Pag. 13—43, erschienen. Die zweite, die im Jahre 1871 der Gesellschaft vorgelegt wurde, setzt ein System von gleichzeitig bewegten und veränderlichen Kugeln voraus; und in dieser letzten Abhandlung, betitelt: „sur les mouvements simultanés de corps sphériques variables dans un fluide indéfini et incompressible", premier mémoire, Pag. 327—406, wie in den zukünftigen folgenden Memoiren, werden dann die Beweise der in den beiden oben genannten Mittheilungen gegebenen Resultate sowohl als die Vervollständigung derselben zu suchen sein.

I.

Es gehört eine Kugel S_g einem System von m Kugeln, die sich gleichzeitig unter Aenderung ihrer Volumen in einer unendlichen, inkompressiblen Flüssigkeit bewegen. Die 5ten Potenzen der Verhältnisse zwischen Radien und Centraldistanzen sollen ausser Betracht gelassen werden. Alsdann bestehen die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$(1)\quad \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{M}_g \frac{da_g}{dt}\right) = \frac{d\Omega_g}{da_g},\quad \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{M}_g \frac{db_g}{dt}\right) = \frac{d\Omega_g}{db_g},\quad \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{M}_g \frac{dc_g}{dt}\right) = \frac{d\Omega_g}{dc_g},$$

wo

$$(2)\qquad \Omega_g = \frac{d}{dt}\left(2\pi q d_g^3 \cdot \sum_g^k \varphi_k \frac{1}{r_{kg}}\right) + 4\pi q \sum_g^k \varphi_k \varphi_g \frac{1}{r_{kg}}$$

und

$$\mathfrak{M}_g = M_g + \tfrac{1}{2} m_g .$$

M bedeutet die Masse der Kugel S_g, m_g diejenige der von ihnen verdrängten Flüssigkeit; $\mathfrak{M}_g$ ist somit eine ideelle Masse, indem man sich die wirkliche mit der halben von ihrer Stelle verdrängten Flüssigkeitsmasse vergrössert zu denken habe. q ist die Dichtigkeit der Flüssigkeit, q_g übrigens die veränderliche Dichtigkeit der Kugel selbst. Von den Grössen a_g, b_g, c_g, d_g bezeichnen die drei ersten die Coordinaten in einem rechtwinkligen Coordinatensystem des Mittelpunkts g, die letzte den Radius der Kugel S_g. r_{kg} ist der Abstand zwischen den den Kugeln S_k und S_g zugehörigen Mittelpunkten k und g; t bedeutet, wie gewöhnlich, die Zeit. Der am Summenzeichen angebrachte untere Index g giebt ferner an, dass dem k der Werth g nicht zu ertheilen sei; sonst darf k unter der Summation sämmtliche übrige Werthe in der Reihe $1, 2, 3, \ldots m$ beigelegt werden.

Die Operation φ_k ist auf folgende Weise zu verstehen:

$$\varphi_k = \varphi_k^{(0)} + \varphi_k^{(1)},$$

wo

$$\varphi_k^{(0)} = - d_k^2 d_k',$$

$$\varphi_k^{(1)} = - \tfrac{1}{2} d_k^3 \left(a_k' \frac{d}{da_k} + b_k' \frac{d}{db_k} + c_k' \frac{d}{dc_k} \right),$$

die accentuirten Buchstaben Derivirten nach der Zeit bezeichnend: $\varphi_k^{(0)}$ hiernach nur ein Factor. Die zusammengesetzte Operation $\varphi_k \varphi_g$ wird endlich dem Obigen zufolge durch

$$\varphi_k \varphi_g = \varphi_k^{(0)} \varphi_g^{(0)} + \varphi_k^{(0)} \varphi_g^{(1)} + \varphi_k^{(1)} \varphi_g^{(0)} + \varphi_k^{(1)} \varphi_g^{(1)}$$

zu definiren sein.

Führt man die Rechnungen aus, wird man einerseits

$$\varphi_k^{(0)} \frac{1}{r_{kg}} = - d_k^2 d_k' \cdot \frac{1}{r_{kg}},$$

$$\varphi_k^{(1)} \frac{1}{r_{kg}} = - \tfrac{1}{2} d_k^3 s_k' \frac{1}{r_{kg}^2} \cos (s_k', r_{kg}),$$

andererseits

$$\varphi_k^{(0)} \varphi_g^{(0)} \frac{1}{r_{kg}} = d_k^2 d_k' \cdot d_g^2 d_g' \cdot \frac{1}{r_{kg}},$$

$$\varphi_k^{(0)} \varphi_g^{(1)} \frac{1}{r_{kg}} = \tfrac{1}{2} d_k^2 d_k' \cdot d_g^3 s_g' \cdot \frac{1}{r_{kg}^2} \cos (s_g', r_{gk}),$$

$$\varphi_k^{(1)} \varphi_g^{(0)} \frac{1}{r_{kg}} = \tfrac{1}{2} d_g^2 d_g' \cdot d_k^3 s_k' \cdot \frac{1}{r_{kg}^2} \cos (s_k', r_{kg}),$$

$$\varphi_k^{(1)} \varphi_g^{(1)} \frac{1}{r_{kg}} = \tfrac{1}{4} d_k^3 s_k' \cdot d_g^3 s_g' \cdot \frac{1}{r_{kg}^3} \left(\cos (s_k', s_g') + 3 \cos (s_k', r_{kg}) \cos (s'_g, r_{gk}) \right)$$

erhalten.

s_g' ist dann die absolute Geschwindigkeit des Mittelpunkts g; (s_g', r_{gk}) bedeutet den Winkel, welchen die Geschwindigkeitsrichtung in g mit der Centrallinie r_{gk} bildet, von g nach k gerichtet; (s_k', r_{kg}) ebenso den Winkel, welchen die Geschwindigkeitsrichtung in k mit r_{kg} bildet, die Centrallinie jetzt umgekehrt gerichtet, von k nach g. Man hat sodann auch $\cos(s_g', r_{gk}) = -\cos(s_g', r_{kg})$.

Mittelst dieser Formeln wird man nun $\varphi_k \frac{1}{r_{kg}}$ und $\varphi_k \varphi_g \frac{1}{r_{kg}}$ erhalten, und, indèm man ferner in der Gleichung (2) einsetzt, den Werth von Ω_g. Diese Grösse lässt sich übrigens auch entwickelt auf folgende neue Weise schreiben:

$$
(2')\quad \begin{aligned}
\Omega_g = -\sum_g^k \Big(& 2\pi q d_g^2 \cdot \frac{d}{dt}(d_g d_k^2 d_k') \cdot \frac{1}{r_{kg}} \\
& + \pi q (5 d_g^3 \cdot d_k^2 d_k' + d_k^3 \cdot d_g^2 d_g') \cdot \frac{1}{r_{kg}^2} s_k' \cos(s_k', r_{kg}) \\
& + \pi q d_g^3 \cdot d_k^3 \cdot \frac{1}{r_{gk}^2} \cdot j_k \cos(j_k, r_{kg}) \\
& + \pi q d_g^3 d_k^3 \cdot \frac{1}{r_{kg}^3} s_k'^2 \left(3\cos^2(s_k', r_{kg}) - 1\right)\Big).
\end{aligned}
$$

j_k in der obigen Gleichung bedeutet die Totalacceleration im Mittelpunkte k.

Den Gleichungen (1) zufolge werden die partiellen Derivirten von Ω_g

$$\frac{d\Omega_g}{da_g}, \quad \frac{d\Omega_g}{db_g}, \quad \frac{d\Omega_g}{dc_g}$$

als die drei Componenten nach den Achsen X, Y, Z einer auf der ideellen und veränderlichen Masse $\mathfrak{M}_g$ wirkenden äusseren Kraft aufgefasst werden können. Als die auf derselben Masse $\mathfrak{M}_g$ oder $M_g + \frac{m_g}{2}$ wirkenden Componenten der beschleunigenden Kraft dürfen dann

$$\frac{d}{dt}\left(\mathfrak{M}_g \frac{da_g}{dt}\right), \quad \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{M}_g \frac{db_g}{dt}\right), \quad \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{M}_g \frac{dc_g}{dt}\right)$$

angesehen werden.

Das Potential Ω_g der eingeführten *ideellen, äusseren Kraft* ist in dem Vorstehenden unter zwei verschiedenen Formen dargestellt (2) und (2'). Die letzte Darstellung des Potentialausdrucks, (2'), eignet sich besonders für die Untersuchung der *Kraft selbst in dem gegebenen Zeitmomente*; die erste (2) ist bequemer um *die mittleren Werthe derselben Kraft* oder der Kräfte, aus welchen sie weiter besteht, im Laufe eines Intervalls zu bestimmen, in welchem gewisse

Wege durchlaufen werden und die Intensität der veränderlichen, besonders periodisch veränderlichen Kraftwirksamkeit gewisse Aenderungen erleidet.

Die Ausdrücke des Potentials Ω_g in den beiden Formen zeigen, dass man, *sofern nur*, wie eben vorausgesetzt, *die 5ten Potenzen der Verhältnisse zwischen den Radien und Centraldistanzen ausser Betracht gelassen werden*, den Fall, wo mehrere Kugeln vorhanden sind, unmittelbar auf den einfacheren zurückführen kann, wo es bloss zwei giebt, S_g und S_k; denn *die Kräfte* sind dann *von einander unabhängig*. In Allgemeinheit wird somit im Folgenden nur die Wirksamkeit zweier Kugeln auf einander in Betracht gezogen werden.

Der Potentialausdruck in der letzten Form (2') zeigt ferner an, dass *die Kraft auch unabhängig von der Geschwindigkeit ist, womit die von jener angegriffene Kugel S_g sich fortbewegt.*

Sie ist aber nicht unabhängig von der Geschwindigkeit, womit das Volumen derselben Kugel sich ändert. Auch besteht, wie aus dem Potentialausdruck in der ersten Form erhellt, die Unabhängigkeit von der fortschreitenden Bewegung der Kugel S_g nicht mehr für die mittlere Kraft im Laufe eines Zeitintervalls. Das Princip der gleichen Wirkung und Gegenwirkung ist endlich für die Wechselwirkung der zwei Kugeln nur in besonderen Fällen gültig.

Nach der Gleichung (2) besteht das Potential Ω_g aus zwei Theilen, von welchen der erste eine vollständige Derivirte in Beziehung auf die Zeit ist; der letzte

$$\Omega_g^* = 4\pi q \sum_g^k \varphi_k \varphi_g \frac{1}{r_{kg}}$$

bestimmt einen *andern, mehr symmetrisch-gebildeten Theil der ideellen, äusseren Kraft*, welche dadurch bemerkenswerth ist, dass sie *nach dem Principe der gleichen Wirkung und Gegenwirkung* für sich allein agirt.

Es seien nun nach dem Vorhergehenden nur die zwei Kugeln S_g und S_k gegeben. Der Abstand zwischen den Mittelpunkten k und g darf so gross im Verhältniss zu deren Geschwindigkeiten, oder also zu den Wegen, die sie in der Zeiteinheit beschreiben, angenommen sein, dass diese letzten mit dem Cubus des Centralabstandes dividirt ausser Betracht gelassen werden können. Auf die veränderliche Masse $\mathfrak{M}_g$ wirkt dann eine *Kraft der ersten Art*

$$\frac{3}{8\pi q} \cdot \frac{d}{dt}(m_g m_k') \cdot \frac{1}{r_{kg}^2}$$

und ebenso *eine der zweiten Art*

$$-\frac{1}{4\pi q}\cdot m'_g m'_k \cdot \frac{1}{r_{kg}^2},$$

beide folglich *umgekehrt wie die Quadrate der Abstände.* Diese Kräfte sind abstossend oder anziehend, je nachdem die obigen Ausdrücke entweder positiv oder negativ sind.

Es soll *besonders* angenommen werden, dass die Kugeln gleichzeitig wachsen und abnehmen, oder auch, dass das Volumen der einen wächst, während dasjenige der andern abnimmt oder umgekehrt, anders ausgedrückt, dass sie *eins oder entgegengesetzt pulsiren.* Die Volumänderungen sollen ferner in kurzen Perioden vor sich gehen, und der Einfachheit wegen zugleich die Erweiterungen und Zusammenziehungen der beiden Kugeln dasselbe Gesetz befolgen, nur durch ihre Grösse modificirt, so dass

$$\frac{m'_g}{m_g} = \pm \frac{m'_k}{m_k}.$$

Man wird dann die erste der eben genannten Kräfte als eine *oscillatorische* — Oscillationen hervorbringende — *Kraft* auffassen können, während die zweite dagegen eine *stetig fortbewegende* ist.

Wegen der *oscillatorischen Theilkraft* wird S_k gegen S_g eine Abstossung ausüben, wenn das Volumen der ersten am kleinsten ist; in den Zeiten aber, da sein Volumen wieder am grössten wird, zieht sie die S_g-Kugel an. Es findet dieses auch statt, wenn S_g, welche der Kraftthätigkeit von S_k ausgesetzt ist, sein Volumen darunter nicht ändern möchte. Diese Kraft, für sich allein, bringt doch nur eine Oscillation hervor; denn der mittlere Werth im Laufe einer Schwingungsperiode ist Null.

Ganz anders verhält sich die zweite, *die stetig fortbewegende Kraft.* Dieser zufolge werden für *eins-Pulsationen* eine *Anziehung* für *entgegengesetzte* eine *Abstossung* zu Stande kommen. Die Einwirkung auf S_g ist Null, wenn unter den Pulsationen von S_k das Volumen von S_g ungeändert bleibt.

Am Anfang und am Ende der *halben* Schwingungsperioden ist die oscillatorische Kraft dominirend. Sind also S_k und S_g eins pulsirende Kugeln, so wird das Verhältniss das folgende sein. Unter der gleichzeitigen Erweiterung fangen sie trotz der stetig wirkenden Anziehung an sich von einander zu entfernen, aber schon ehe das Maximum von Volumen erreicht ist, kehren sie dann wieder um, und nehmen eine Bewegung gegen einander an. Am Ende der ersten halben Periode sollten sie hiernach, wenn jetzt die Pulsationen aufhörten, und damit auch die Kraft selbst, mit gleichmässiger Ge-

schwindigkeit sich gegen einander bis zum Contact bewegen; an diesem Zeitmomente können sie doch möglicherweise sich noch im grösseren Abstande von einander befinden als am Anfang der Zeit. Unter der gleichzeitigen Zusammenziehung werden sowohl die oscillatorische als die stetig fortbewegende Kraft eine Näherung der zwei Kugeln veranlassen. *Die Kugeln werden* somit in der ganzen Zeit, *wenn sie eins pulsiren, von einander weg und gegen einander oscilliren,* indem sie doch darunter einander stets anziehen. Werden die Anziehungen gestört, treten die Oscillationen hervor.

Man sieht auf ähnliche Weise, dass andererseits *unter den entgegengesetzten Pulsationen, die Kugeln mit einander oscilliren müssen,* beide zu derselben Seite, so beide zu der entgegengesetzten, die Kugel, deren veränderliches Volumen sein Minimum erreicht hat, immer die andere, welche gleichzeitig am grössten ist, forttreibend, während diese ihrerseits die kleinste in ihrer Bewegung nach sich ziehen wird. Unter diesen Oscillationen aber werden die zwei Kugeln einander zugleich abstossen. Auch hier besteht sonst ein Unterschied zwischen den beiden Halbtheilen einer Schwingungsperiode. Wenn an ihrem Anfang z. B. das Volumen von S_k ein Minimum, dasjenige von S_g ein Maximum ist, so wird in der ersten halben Periode die Kugel S_g sowohl wegen der oscillatorischen als der stetig fortbewegenden Kraft sich von S_k entfernen. Die anfänglich grosse S_g-Kugel dagegen wird die kleine S_k in den ersten Momenten nach sich ziehen, bringt aber dann eine Umkehrung zu Stande, und so dass S_k am Ende derselben halben Periode, wenn die Pulsationen und folglich auch die Kraft aufhört, mit gleichmässiger Geschwindigkeit, ob auch möglicherweise von einer näher liegenden Stellung ab, sich schliesslich von der Kugel S_g entfernen wird. In der zweiten Halbperiode werden die Rollen vertauscht.

Auch *die Kräfte vierten Grades* sind von Interesse zu studiren, namentlich wegen der Aehnlichkeit, welche zwischen diesen und denjenigen, womit zwei Magnete in der Ferne auf einander einwirken, zum Vorschein kommt. Denkt man sich, dass *die beiden Kugeln S_g und S_k jede nach ihren Richtungslinien oscilliren*, so wird die mittlere Wirkung einer auch hier auftretenden oscillatorischen Kraft, sofern man von einer begleitenden fortschreitenden Bewegung absieht — anfänglich weil diese noch sehr klein ist, später weil ihre Wirkung besonders betrachtet werden kann — gleich Null, und es bleibt allein eine stetig fortbewegende Kraft zurück, die dem Potentiale

$$4\pi q\, \varphi_k^{(1)}\, \varphi_g^{(1)}\, \frac{1}{r_{kg}}$$

entspricht. Sind nun, unter den gleichzeitigen periodischen Schwingungen — die schon existirenden fortschreitenden Bewegungen wie früher nicht berücksichtigt — zur selben Zeit die Richtung der Bewegung der Kugel S_g gg', diejenige der Kugel S_k, kk', so kann man sich *die Kugeln als Magnete vorstellen, deren Orientation durch gg' und kk' bestimmt sei,* g' und k' zum Beispiel die beiden Nordpole angebend. Nur darf man sich alsdann die Erscheinung *umgekehrt* denken: *gleiche Polen ziehen einander an, ungleiche stossen einander ab.*

Hier wie bei der Anziehung einer Kraft zweiten Grades bei eins Pulsationen, der Abstossung bei entgegengesetzten kommt also ein sehr bemerkenswerthes *Gegensatzverhältniss zu den Kräften der Natur* hervor.

Wenn man *nicht den mittleren Werth* im Laufe einer Schwingungsperiode, wodurch ein Theil der ganzen Kraft, der für die fortschreitende Bewegung ohne Einfluss ist, abgesondert wird, *sondern den Werth selbst der Kraft vierten Grades* sucht, so hat man diese durch das Theilpotential

$$-\pi q d_g^3\, d_k^3 \cdot \frac{1}{r_{kg}^3}\, s_k'^2 \left(3 \cos^2 (s_k', r_{kg}) - 1\right)$$

zu bestimmen. *Auch hier kann man die Kraft mit derjenigen vergleichen, welche ein Magnet S_k gegen einen anderen S_g ausübt;* nur darf man sich jetzt denken, dass der letzte, wie auch seine Bewegung sein mag, immer in Beziehung auf den ersten *parallel und entgegengesetzt orientirt* sein soll; die magnetische Achse in S_k darf ferner zu jeder Zeit mit der Geschwindigkeitsrichtung des Mittelpunkts k zusammenfallen.

Diese Kraft vierten Grades hat übrigens die beachtungswerthe und sehr wichtige Eigenschaft, auf welche sonst schon in 1868 aufmerksam gemacht worden ist, dass eine Summe von drei, jede von derselben Intensität, aber drei gegen einander senkrecht stehenden Richtungen entsprechend, den Werth Null hat. Die Summe der zugehörigen $\cos^2(s_k', r_{kg})$ wird nämlich alsdann 1, und das obige Theilpotential muss somit verschwinden.

II.

Um die *mittelst Pulsationen* zweier Kugeln *entstehenden oscillatorischen Kräfte experimentell nachzuzeigen*, wurde durch Einblasen oder Aussaugung von Luft durch vertical aufsteigende Kautschukröhre, die in zwei ursprünglich gleich grosse von Wasser ganz umgebene und in derselben Tiefe liegende Ballons einmündeten,

gleichzeitige Pulsationen hervorgebracht. Der kleinste Diameter der Ballons war hierunter 1″ (Zoll), der grösste 2⅛″. Der Abstand zwischen den Rohrachsen 2⅞″. Zwei horizontal mit der Centrallinie parallel laufende Glasstangen auf jeder Seite der Kautschukrohre, wo eben diese in die Ballons einmündeten, dienten dazu, vier quer über den Stangen angebrachte sehr leichte Messinghaken zu führen. Diese wurden unter den Versuchen gegen die Seiten der Rohre angelegt, um deutlicher zu zeigen, indem sie der eine nach dem andern zur Seite geworfen würden, wie die Rohre und mithin auch die Ballons zum Anfang bewegt wurden.

Wurde nun im Laufe einer kurzen Zeit der eine Ballon A angeblasen, so dass sein Volumen plötzlich wuchs, während dasjenige der andern B ungeändert blieb, so wurde bei A selbst in horizontaler Richtung nur eine sehr schwache Bewegung bemerkt, während B dagegen in starke Bewegung kam; B wurde von A entfernt und nachher angezogen; der äussere Haken an dem B-Rohre wurde somit erst zur Seite geworfen, darauf der innere. Wurde nun wieder der Ballon A mit grosser Geschwindigkeit ausgeleert, während B wie früher am Volumen ungeändert war, so blieb die A Kugel, deren Volumen jetzt plötzlich abnahm, wie in dem vorigen Fall beinahe ganz ruhig; während B sich erst A näherte, und späterhin sich wieder davon entfernte: es wurde jetzt der innere an dem B-Rohre anliegende Haken zur Seite geworfen, alsdann der äussere. Uebrigens wurde die sodann eingeleitete Oscillation wegen der Elasticität der Röhre in einiger Zeit fortgesetzt.

Sehr deutlich und in Uebereinstimmung mit der vorigen Theorie zeigten sich auch die Oscillationen, wenn die beiden Ballons gleichzeitig ausgeblasen oder geleert wurden, indem man sie entweder eins oder entgegengesetzt pulsiren liess. Im ersten Fall oscillirten sie dann von einander weg und gegen einander, im zweiten dagegen mit einander, erst zur einen, demnächst zu der anderen Seite u. s. w. Anders ausgedrückt, *eins pulsirende Kugeln oscillirten entgegengesetzt, entgegengesetzt pulsirende oscillirten eins.* Eine in dem Zeitmomente kleine Kugel suchte die andere, gleichviel ob gross oder klein, hierunter wegzutreiben, und die grosse schien ihrerseits die andere Kugel stets in ihrer Bewegung nach sich ziehen zu wollen; ganz so wie in der obigen Theorie vorausgesetzt worden war.

Bei diesen Versuchen konnten dagegen die stetig wirkenden Attractionskräfte für eins-Pulsationen, die stetig wirkenden Repulsionskräfte für entgegengesetzte nicht mit Bestimmtheit beob-

achtet werden. Es müsste dann dieses unter dem einzelnen Pulsationsschlag der Fall sein, bei welchem die beiden Kugeln vom kleinsten zum grössten Volumen übergingen. Die Haken wurden dann zu jeder Seite $\frac{1}{8}''$ geworfen, zuerst auf der äusseren, dann auf der inneren Seite. Die Ballone aber schlugen unter der Bewegung gegen einander bestimmt an und bildeten später, in ihrer grössten Grösse schliesslich in Ruhe gekommen, einen bleibenden Kanal zwischen einander $\frac{1}{4}''$ breit. Nachdem die Ballons in dem ersten Augenblicke von einander abgestossen waren, wurden sie also später über die ursprüngliche Gleichgewichtstellung wieder zurückgeführt, als ob die Attraction in den letzten Zeitmomenten das Uebergewicht erhalten hatte, wenigstens so weit, dass eine nach innen (gegen einander) gerichtete Bewegung beim Aufhören der von den Pulsationen bedingten Kraft dadurch eingeleitet worden war. Genauer besichtigt, hatte man doch hier noch keinen Beweis; denn wegen der Elasticität der Rohre, wie klein sie auch war, und der Wirkung des Auftriebes, musste doch nach der ersten Abstossung ein Uebergang über die Gleichgewichtslage, ob auch möglicherweise weniger hervortretend, in der That eintreten; auch war kein Unterschied in den Längen, in welchen die Haken zu beiden Seiten geworfen wurden. Die Versuche dürfen übrigens mit tiefer eingesenkten Ballons wiederholt werden.

Die mit den *Pulsationen* verbundenen *stetig wirkenden Attractionen oder Repulsionen* experimentell nachzuweisen, scheint überhaupt nicht geringen Schwierigkeiten unterworfen zu sein. Eine *Illustration* der hierher gehörenden Sätze wird man dennoch mit Leichtigkeit erhalten, indem man die Bewegungen genauer studirt, die eintreten werden, *wenn man gleichzeitig oder nach bestimmten Zeitverläufen Kugeln in Wasser niederfallen lässt.* Hat man hier nicht eigentliche Volumveränderungen der Körper selbst, so werden doch die weggedrängten Wasservolumina geändert, und das namentlich so, dass die Geschwindigkeit, womit diese Aenderungen vor sich gehen, an zwei Zeitmomenten Null ist, wenn die Kugeln die Oberfläche des Wassers zuerst berühren, und wenn sie eben vollständig eingetaucht worden sind. Man wird sich auch die Vorstellung von zwei veränderlichen Kugelsegmenten machen können, deren Massen constant seien, gleich denjenigen der Kugeln selbst, wozu sie gehören. Sonst werden an der Seite der *Pulsationen* auch die vermittelst der Fallbewegungen und zum Theil der folgenden Aufsteigungen wegen des Auftriebs entstandenen parallelen Geschwindigkeiten oder *Oscillationen* das

Ihrige beitragen, um die neuen Bewegungen hervorzubringen; denn so wie die Versuche angestellt worden sind, werden infolge der hier benutzten Theorie die Wirkungen der beiden Ursachen leider wesentlich dieselben sein, und eine Absonderung namentlich der letzten von ihnen ist uns bis jetzt nicht gelungen.

Lässt man eine Kugel A ganz in der Nähe einer auf die Oberfläche des Wassers ruhenden B-Kugel niederfallen, oder wird sie langsam und mit gleichmässiger Geschwindigkeit herunter geführt, so findet für die B-Kugel keine andere Bewegung statt als eine sehr schwache Oscillation; sie entfernt sich anfänglich ganz wenig und kehrt so beinahe in die vorige Lage zurück; erst späterhin wird sie mit einer Strömung des Wassers etwas von der A-Kugel weggetrieben. Nach der oben dargestellten Theorie darf auch keine stetig wirkende Attraction oder Repulsion vorhanden sein, wenn von den zwei Kugeln nur die eine pulsirt, die andere aber zur selben Zeit das Volumen nicht verändert.

Lässt man dagegen zwei gleich grosse und schwere Kugeln (Esche) A und B, z. B. in einem Abstande von einander etwas geringer als der Diameter und übrigens von einer geringen Höhe über der Oberfläche, gleichzeitig ins Wasser niederfallen, so werden sie sich gegen einander bis zum Contact bewegen. Man hat hier die *Analogie mit den eins-pulsirenden Kugeln, die einander anziehen sollen.* Nach dem Vorigen dürften ja unter dem einzelnen Pulsationsschlag, wobei sowohl A als B — hier die weggedrängten Wassermassen — vergrössert wurden, die beiden erst ein kleines Stück entfernt werden, und dann wieder, etwas früher als das Ende der halben Periode, umkehren, so dass sie schliesslich, wenn jetzt die Kraft aufhörte, mit gleichmässiger Geschwindigkeit sich gegen einander bewegen mussten. Was man besonders sieht, ist sodann nur die nach vollendetem Durchbruch eingeleitete annähernde Bewegung der beiden Kugeln, nachdem die Kraft selbst schon aufgehört hat zu wirken. Nach dieser Zeit wirkt doch noch stets eine Kraft vierten Grades, um dieselbe annähernde Bewegung zu befördern.

Ist B etwas schwerer als A, und lässt man sie wieder gleichzeitig niederfallen, während sie in Berührung sind oder doch in grösserer Nähe von einander — B sonst ein wenig höher liegend als A —, so bewegt B sich halb und oft ganz rund um die Kugel A herum und kommt auf der andern Seite auf. Die zwei Kugeln vertauschen also hierunter ihre Plätze; selbstverständlich trägt die A-Kugel, die als die leichtere eigentlich am stärksten bewegt wird,

durch ihre Bewegung auch zu diesem Rundgehen bei. Ist A wesentlich leichter als B, A z. B. eine Kugel von Guttapercha, während B von Holz ist, so wird man die A-Kugel sehen, sich mit grosser Geschwindigkeit über die schwerere B-Kugel hinbewegen. Diese Erscheinungen treten dagegen, wie früher bemerkt, gar nicht ein, ob die eine, selbst die ganz leichte Guttaperchakugel, sich auf der Oberfläche des Wassers in Ruhe befand, während man die schwerere Kugel, und zwar in grosser Nähe der ersten, darin niederfallen liess.

Ist die eine der Kugeln im Verhältniss zu der andern klein, so ist es ferner diese kleine Kugel, die überhaupt, wie in dem oben beschriebenen Falle, unter der gleichzeitigen Bewegung sich der andern mit der grössten Geschwindigkeit nähern wird.

Statt die Kugeln niederfallen zu lassen, kann man sich auch so einrichten, dass sie von unten gegen die Wasserfläche heraufsteigen müssen. Werden gegen die Wände des Gefässes zwei hohle und leichte Guttaperchakugeln sehr nahe an einander mit unbedeutendem Druck festgehalten, und werden sie dann beide auf einmal losgelassen, so sieht man sie kurz nachher, indem sie die Oberfläche des Wassers durchbrechen, gegen einander bis zum Contact zu bewegen. Die weggedrängten Wasservolumina nehmen hier, dem vorigen Falle entgegengesetzt, gleichzeitig ab, man hat aber wieder, was den eins-Pulsationen entspricht.

In dem Obigen hat man allein die Wirkungen der einzelnen Pulsationsschläge untersucht; die verdrängten Wasservolumina wurden zu gleicher Zeit entweder vergrössert oder verkleinert. Macht man aber die Fallhöhe hinlänglich klein, so tritt gleich eine Oscillation der Kugeln ein, das heisst, es kommt auch eine fortgesetzte Pulsation der verdrängten Wasservolumina zu Stande; und obwohl die Intensität der Kraft im Zeitmomente bedeutend abgeschwächt werden muss, wird man doch sehr deutlich die scheinbare Anziehung der beiden Kugeln beobachten können.

Auch *Abstossungen* wird man in ähnlicher Weise darstellen können, indem man die Kugeln, die eine nach der andern, von einer geringen Höhe fallen lässt, so dass die letzte die Wasserfläche in demselben Augenblicke auf dem Niedergehen berührt, wo die erste unter dem Aufsteigen dieselbe wieder durchbricht. Die eine Kugel kann auch ganz hinabgetaucht gehalten werden, während die andere beispielsweise mit einem Viertel ihres Volumens niedergesenkt ist; werden sie dann losgelassen, so kommt eine entgegengesetzte Oscillation der beiden zu Stande, die weggedrängten Wasservolumina pulsiren auch

entgegengesetzt, und man wird die zwei Kugeln sich von einander entfernen sehen.

Wie im Falle der Anziehung bei eins-Pulsationen zugleich eine Kraft vierten Grades attractiv auftritt — indem die Kugeln dann auch eins-oscilliren würden, beide gegen die Centrallinie senkrecht —, so wird ebenso im Falle der Abstossung wegen entgegengesetzter Pulsationen — infolge der damit verbundenen entgegengesetzten Oscillationen senkrecht gegen dieselbe mittlere Centrallinie — eine Repulsion vierten Grades hinzukommen. Zwei verschiedene Kräfte werden einander mithin auch diesmal in ihrer Wirksamkeit unterstützen; denn wegen des geringen Abstandes darf man wohl die Kraft des höheren Grades nicht als verschwindend gegen die erste ansehen. Streng genommen hat man sodann in den letzten Versuchen, eben so wenig als in den früheren, welche die Anziehungen illustriren sollten — abgesehen selbst von andern Einwänden —, einen experimentellen *Beweis* einer *gesonderten* Wirkung gefunden der aus den Pulsationen allein entstandenen Kraft zweiten Grades einerseits und derjenigen vom vierten auf der andern Seite, die mehr unmittelbar mit den Oscillationen in Zusammenhang steht. Bis weiter werden wir sie darum, wie schon früher gesagt, eher als *Illustrationen* wie als eigentliche Verificationen der gewonnenen Sätze ansehen.

Es wird sich doch zeigen, indem wir sie späterhin, mit Hilfe des Herrn Prof. Schiötz, vervollständigen und genauer beschreiben wollen, wie genau sie in der That unsern hydrodynamischen Theoremen sich anschliessen. Auch die eigenthümlichen Anziehungen und Abstossungen bei gleich tönendem Glasrohre, die nach den Dvorak'schen Versuchen stattfinden (Poggendorfs Annalen 1876), können hier zur Bestätigung dienen; sie sollen zugleich in Verbindung mit unsern Sätzen gebracht werden. Doch muss bemerkt werden, was sonst nicht anders zu erwarten sei, dass die Erscheinungen in grosser Nähe auch die Kenntniss der Kräfte vom 5ten und noch höherem Grade erfordern werden. Die Dvorak'schen Versuche waren übrigens zu der Zeit, als die Mittheilungen der Wissenschaftsgesellschaft vorgelegt wurden, noch nicht veröffentlicht; sie können somit erst später in dieser Verbindung berücksichtigt werden.

Christiania. C. A. Bjerknes.

R. Lipschitz: Beitrag zu der Theorie der Krümmung.

(Borchardt's Journal f. Math. Bd. 81. p. 230.)

Sobald n veränderliche Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ als unabhängige Functionen von n veränderlichen Grössen $y_1, y_2, \dots y_n$ gegeben sind, so kann die Beziehung zwischen dem einen und dem andern System auf eine zweifache Art aufgefasst werden. Entweder man legt der Betrachtung nur eine Mannigfaltigkeit der $n$ten Ordnung zu Grunde und denkt sich, dass dasselbe Individuum der Mannigfaltigkeit sowohl durch das Werthsystem $x_1, x_2, \dots x_n$ wie auch durch das Werthsystem $y_1, y_2, \dots y_n$ bezeichnet sei. Dann drückt die Beziehung zwischen den $x_1, x_2, \dots x_n$ und den $y_1, y_2, \dots y_n$ eine Beziehung zwischen zwei verschiedenen Darstellungen desselben Individuums der einen Mannigfaltigkeit aus. Oder man legt der Betrachtung zwei verschiedene Mannigfaltigkeiten der $n$ten Ordnung zu Grunde, wobei ein Individuum der einen durch das Werthsystem $x_1, x_2, \dots x_n$, ein Individuum der andern durch das Werthsystem $y_1, y_2, \dots y_n$ bezeichnet wird. Alsdann bedeutet die Beziehung zwischen den $x_1, x_2, \dots x_n$ und den $y_1, y_2, \dots y_n$ eine Beziehung eines Individuums der einen Mannigfaltigkeit auf ein Individuum der andern Mannigfaltigkeit.

Beide Arten der Auffassung haben sich an der Untersuchung von räumlichen Gebilden entwickelt. Ein Beispiel der ersten Art entsteht, indem ein Punkt im Raume durch drei Coordinaten x_1, x_2, x_3 eines Systems und durch drei Coordinaten y_1, y_2, y_3 eines andern Systems bestimmt wird; ein Beispiel der zweiten Art, indem zwei Oberflächen so auf einander bezogen werden, dass ein Punkt der einen einem Punkte der andern entspricht. Wenn man das Quadrat der Entfernung von zwei benachbarten Punkten im Raume, oder, was dasselbe ist, das Quadrat des Linearelements im Raume zuerst durch die Coordinaten x_1, x_2, x_3 und dann durch die Coordinaten y_1, y_2, y_3 von einem und demselben der benachbarten Punkte ausdrückt, so wird dasselbe bei dem ersten Coordinatensystem gleich einer positiven quadratischen Form der drei Differentiale dx_1, dx_2, dx_3, bei dem zweiten Coordinatensystem gleich einer positiven quadratischen Form der drei Differentiale dy_1, dy_2, dy_3. Sind x_1, x_2, x_3 rechtwinklige Coordinaten, so hat die betreffende Form in Folge des Pythagoräischen Lehrsatzes die Gestalt $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$. Immer geht die erste quadratische Form vermöge der Einführung des zweiten Systems in die zweite quadratische Form über, weil die beiden Formen die verschiedenen Ausdrücke desselben geometrischen

Begriffs sind. Wenn dagegen zwei Oberflächen Punkt für Punkt auf einander bezogen werden, und wenn zu den einander benachbarten Punkten $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ der ersten Oberfläche respective die Punkte $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, $B^{(3)}$ der zweiten Oberfläche gehören, so wird die Beziehung derselben zu einander durch die Forderung, dass das Quadrat des Abstandes von je zwei benachbarten Punkten oder das Quadrat des Linearelements für die erste Oberfläche gleich dem Quadrate des Abstandes der zwei zugehörigen Punkte oder dem Quadrate des betreffenden Linearelements für die zweite Oberfläche gleich sein soll, einer wesentlichen Einschränkung unterworfen. Ist diese Forderung für zwei bestimmte Oberflächen erfüllt, so müssen die Quadrate der elementaren Strecken $A^{(1)}A^{(2)}$, $A^{(2)}A^{(3)}$, $A^{(3)}A^{(1)}$ respective den Quadraten der correspondirenden elementaren Strecken $B^{(1)}B^{(2)}$, $B^{(2)}B^{(3)}$, $B^{(3)}B^{(1)}$ gleich sein, und daher sind die elementaren Dreiecke $A^{(1)}A^{(2)}A^{(3)}$ und $B^{(1)}B^{(2)}B^{(3)}$ einander congruent. Man darf jetzt ein Stück der ersten Oberfläche durch ein System von willkürlich angenommenen Punkten in ein System von elementaren Dreiecken zerlegen. Demgemäss liefern die auf der zweiten Oberfläche befindlichen zugehörigen Punkte ein System von correspondirenden elementaren Dreiecken, diese Dreiecke bilden aber ein bestimmtes Stück der zweiten Oberfläche, und zwar ist bei der getroffenen Voraussetzung jedes Dreieck des ersten Systems dem zugeordneten Dreiecke des zweiten Systems congruent. Alsdann sieht man, wie das betreffende Stück der ersten Oberfläche durch Biegung und ohne Dehnung in die Gestalt des zugeordneten Stückes der zweiten Oberfläche gebracht werden kann.

Es sei nun eine beliebige Oberfläche im Raume gegeben. In irgend einem Punkte derselben werde eine Normale errichtet, durch die Normale eine beliebige Ebene gelegt, für die auf der Oberfläche entstehende Schnittcurve der Krümmungskreis bestimmt, und das System der beiden auf einander senkrecht stehenden Normalebenen aufgesucht, für welche die zugeordneten Krümmungsradien die Eigenschaften des Maximums oder Minimums haben, das heisst, die Hauptkrümmungsradien ausmachen. Hiermit sind die Grundbegriffe der Theorie der Krümmung definirt. Ihre analytischen Ausdrücke richten sich nach der Wahl des Coordinatensystems, und ergeben sich in Bezug auf ein bestimmtes Coordinatensystem x_1, x_2, x_3 unmittelbar, nachdem für dasselbe die quadratische Form der drei Differentiale dx_1, dx_2, dx_3 gebildet ist, welche das Quadrat des Linearelements im Raume bedeutet, und nachdem die in Rede stehende Oberfläche

durch das Constantsetzen einer angemessen gewählten Function der drei Variabeln x_1, x_2, x_3 dargestellt ist. Durch die Anwendung eines neuen Coordinatensystems y_1, y_2, y_3 verwandelt sich vermöge einer vorhin gemachten Bemerkung die quadratische Form der drei Differentiale dx_1, dx_2, dx_3 in eine quadratische Form der drei Differentiale dy_1, dy_2, dy_3, und gleichzeitig die eingeführte constant zu setzende Function der x_1, x_2, x_3 in eine constant zu setzende Function der y_1, y_2, y_3. *Die analytischen Ausdrücke für die Grundbegriffe der Theorie der Krümmung haben aber zu der neuen quadratischen Form und der constant zu setzenden Function der* y_1, y_2, y_3 *eine gleiche allgemeine Beziehung, wie zu der ursprünglichen quadratischen Form und der constant zu setzenden Function der* x_1, x_2, x_3; *sie besitzen deshalb die Eigenschaft, in dieser Hinsicht invariant zu sein.* Dies gilt auch von den Coefficienten der quadratischen Gleichung, deren Wurzeln die negativ genommenen reciproken Werthe der beiden Haupt-Krümmungsradien sind. Zwischen den beiden Coefficienten der erwähnten Gleichungen existirt jedoch ein Unterschied, welcher durch die *Disquisitiones generales circa superficies curvas* von Gauss berühmt geworden ist. Bei einer ohne Dehnung ausgeführten Biegung der Oberfläche ändert sich zwar der erste Coefficient, welcher der Summe der reciproken Werthe der Hauptkrümmungsradien gleich ist, aber nicht der zweite Coefficient, welcher dem Producte der reciproken Werthe der Hauptkrümmungsradien gleich ist, und *das Krümmungsmass der Oberfläche in dem betreffenden Punkte* constituirt. *Denn das Krümmungsmass ist eine Invariante in Bezug auf diejenige quadratische Form von zwei Differenzialen, welche das Quadrat des Linearelements für die betreffende Oberfläche darstellt.*

Nach Hervorhebung dieser allgemeinen Gesichtspunkte ist zu erwähnen, dass die vorliegende Abhandlung an eine Verallgemeinerung der Theorie der Krümmung anknüpft, welche in den Aufsätzen *Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differenzialen*, Borchardt's Journal Bd. 71, pag. 274 und pag. 288 mitgetheilt ist. Daselbst erscheint an der Stelle der drei Coordinaten eines Punktes im Raume ein System von n Variabeln x_1, x_2, ... x_n, an der Stelle von dem Quadrate des Linearelements im Raume eine wesentlich positive quadratische Form der n Differentiale $dx_1, dx_2, \dots dx_n$, bei der die Coefficienten in beliebiger Weise von den Variabeln x_1, x_2, .. x_n abhängen, und die mit $2f(dx)$ bezeichnet ist, an der Stelle der constant zu setzenden Function, welche die Gleichung der Oberfläche ergiebt, ein System von l constant zu setzenden Functionen

der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$. Namentlich zeichnet sich nun der Fall aus, in welchem die Zahl l der gegebenen Functionen gleich der Einheit ist. Alsdann tritt für eine dort mit ω bezeichnete Grösse eine Gleichung des $(n-1)$ten Grades auf

$$D_0\omega^{n-1} + D_1\omega^{n-2} + \cdots + D_{n-2}\omega + D_{n-1} = 0,$$

deren $n-1$ Wurzeln eine Verallgemeinerung der negativ genommenen reciproken Werthe der Hauptkrümmungsradien bilden. Bei der Voraussetzung, dass $n=3$ und $2f(dx) = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ sei, gehen jene Wurzeln in diese Werthe selbst über, und die in Rede stehende Gleichung wird zu einer Darstellung der vorhin besprochenen quadratischen Gleichung.

Die Coefficienten der für einen beliebigen Werth der Zahl n angeführten Gleichung, das heisst die Quotienten $\frac{D_1}{D_0}, \frac{D_2}{D_0} \cdots \frac{D_{n-1}}{D_0}$, haben die Eigenschaft, dass diejenigen unter ihnen, deren Zeiger eine gerade Zahl ist, und die Producte aus irgend zweien von ungeradem Zeiger *in Bezug auf die quadratische Form* $2f(dx)$ *und die hinzugefügte constant zu setzende Function der Variabeln* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *invariant* sind.

In den angeführten Aufsätzen ist auf die quadratische Form von $n-1$ Differentialen hingewiesen, in welche die Form $2f(dx)$ übergeht, sobald die in dem Constantsetzen der bezeichneten Function bestehende Gleichung angewendet wird. Man darf annehmen, dass jene Function, die y_1 heissen soll, zu einem System von n unabhängigen Functionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ gehört, dass die $x_1, x_2, \ldots x_n$ als Functionen der $y_1, y_2, \ldots y_n$ angesehen werden, dass durch die Substitution dieser Variabeln die quadratische Form $2f(dx)$ sich in die quadratische Form $2g(dy)$ der Differentiale $dy_1, dy_2, \ldots dy_n$ verwandelt, und dass aus der letztern, indem $y_1 = \text{const.}$ und $dy_1 = 0$ gesetzt wird, die erwähnte Form der $(n-1)$ Differenziale $dy_2, \ldots dy_n$ entsteht, welche mit $2\overline{g(dy)}$ notirt werden möge. Unter der Voraussetzung, dass $n=3$ und $2f(dx) = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ sei, wird $2\overline{g(dy)}$ der Ausdruck von dem Quadrate des Linearelements für die Oberfläche $y_1 = \text{const.}$, und bei der erwähnten zugehörigen quadratischen Gleichung ist der Coefficient $\frac{D_2}{D_0}$ oder das *Krümmungsmass in einem Punkte der Oberfläche* eine *Invariante der Form* $2\overline{g(dy)}$, während der Coefficient $\frac{D_1}{D_0}$, oder, genauer gesprochen, das Quadrat dieses Coefficienten, diese Eigenschaft nicht hat. Aus dieser Beobachtung entspringt für einen

beliebigen Werth der Zahl n die Frage nach den Merkmalen derjenigen Coefficienten oder derjenigen Verbindungen von Coefficienten, welche *nicht nur mit Rücksicht auf die Form* $2f(dx)$ *und die constant zu setzende Function* y_1, *sondern auch in Bezug auf die Form* $2\overline{g(dy)}$ *von* $n-1$ *Differentialen invariant* sind. Bei der Voraussetzung, dass die Form $2f(dx)$ eine Form mit constanten Coefficienten oder in eine solche Form transformirbar ist, zeigte es sich, dass die *sämmtlichen Coefficienten von geradem Zeiger* $\frac{D_2}{D_0}, \frac{D_4}{D_0}, \ldots$ diese Eigenschaft besitzen.

Unter der gleichen in Betreff der Function $2f(dx)$ geltenden Annahme wird in der gegenwärtigen Abhandlung für *die Coefficienten von ungeradem Zeiger* der Satz bewiesen, *dass alle Producte von zwei solchen Coefficienten* $\frac{D_{2r+1}\,D_{2s+1}}{D_0^2}$, *bei denen die Summe der Zeiger* $2r+2s+2$ *gleich der Zahl* $n+1$ *oder grösser als diese Zahl ist, Invarianten der Form* $2g(dy)$ *sind.* Hieraus folgt eine eigenthümliche Bestimmung für die Coefficienten von ungeradem Zeiger, mit Ausnahme des ersten Coefficienten $\frac{D_1}{D_0}$, vermittelst invarianter Verbindungen. Hier möge nur das Ergebniss angeführt werden, dass, wenn β die grösste ungerade Zahl bedeutet, welche nicht über $n-1$ liegt, und wenn die vermöge des erwähnten Satzes invariante Verbindung $\frac{D_\beta^2}{D_0^2}$ einen von Null verschiedenen Werth hat, der Coefficient $\frac{D_\beta}{D_0}$ durch die Ausziehung der Quadratwurzel aus der so eben charakterisirten Invariante entsteht, und alle übrigen Coefficienten von ungeradem Zeiger, den Coefficienten $\frac{D_1}{D_0}$ ausgenommen, mit Hülfe von dieser Quadratwurzelgrösse und von Invarianten der Form $2\overline{g(dy)}$ rational darstellbar sind. Wenn jetzt die sämmtlichen Coefficienten von geradem und ungeradem Zeiger $\frac{D_2}{D_0}, \frac{D_3}{D_0}, \ldots \frac{D_{n-1}}{D_0}$ ins Auge gefasst werden, so zeigt sich, dass dieselben, wofern die Quadratwurzel aus einer Invariante ebenfalls als eine Invariante betrachtet wird, an der Eigenschaft des Krümmungsmasses Theil nehmen, in Bezug auf die zugehörige Form $2\overline{g(dy)}$ invariant zu sein. Von diesen sämmtlichen Coefficienten trennt sich daher auf das schärfste der Coefficient $\frac{D_1}{D_0}$. Seine Bedeutung für den Fall einer im Raume angenommenen Oberfläche ist vorhin hervorgehoben.

Ausserdem weiss man, dass die charakteristische Bedingung für eine Oberfläche, die bei gegebener Begrenzung den kleinsten Inhalt hat, oder eine Minimalfläche, in dem Verschwinden dieses Coefficienten besteht. Diejenige Gleichung, welche bei der zu Anfang erwähnten Verallgemeinerung der Theorie der Krümmung dieser Gleichung entspricht, liefert aber auch die partiellen Differenzialgleichungen des Variationsproblems, auf welches sich die Ausdehnung der Theorie der Minimalflächen bezieht, die in einem Aufsatze von gleicher Ueberschrift in Borchardts Journal f. Math. Bd. 78 auseinander gesetzt ist.

Boenkeim bei Königsberg i. Pr. R. Lipschitz.

A. Toepler: Zur Theorie der stationären elektrischen Strömung in gekrümmten, leitenden Flächen.

(Herrn Poggendorff für die Annalen übergeben.)

Nachdem schon von Heine (Journal für Mathematik, Bd. 79) auf die Uebereinstimmung des Problems der elektrischen Strömung in ebenen Flächen mit dem der conformen Abbildung aufmerksam gemacht worden war, hat Kirchhoff in einer sehr bemerkenswerthen Abhandlung (Monatsber. d. Kgl. Ak. d. Wissensch. zu Berlin, 19. Juli 1875) gezeigt, dass diese Uebereinstimmung für beliebige gekrümmte, leitende Flächen stattfinden muss, so dass, wenn man in einem bestimmten Falle das eine Problem gelöst hat, man auch die Lösung des anderen besitzt. Ich habe nun in einem wie oben betitelten Aufsatze nachgewiesen, dass sich die in Rede stehende Beziehung auf einfachem Wege unmittelbar aus der Definition der conformen Abbildung einerseits und der Strömung als einer längs der Kraftrichtung verlaufenden Bewegung andererseits ableiten lässt. Aus dieser Betrachtungsweise ergiebt sich zugleich eine sehr einfache Beziehung für den Leitungswiderstand zweier auf einander abgebildeten Flächen.*)

Ich gehe von der Vorstellung aus, dass zwei beliebige, in der leitenden Fläche liegende, geschlossene Curven, welche sich nicht schneiden, mit constantem aber verschiedenem Potential besetzt werden, wodurch eine Strömung in dem Aussenfelde entsteht. Ein

*) Die von mir mitgetheilte Betrachtungsweise habe ich, soweit sie sich auf ein einziges Elektrodenpaar bezieht, schon früher gekannt und in Vorlesungen benutzt, ohne dieselbe indessen zu verallgemeinern und zu publiciren.

System unendlich benachbarter Stromlinien und Linien gleichen Potentials zerlegt das Stromfeld in rechteckige Flächenelemente. Die conforme Abbildung dieses Liniensystems auf eine zweite Fläche zerlegt diese ebenfalls in rechteckige Elemente, welche wegen der Aehnlichkeit mit den entsprechenden Elementen des Originals gleichen Widerstand haben für Elektricitätsbewegung, welche über entsprechende Seiten ein- und austritt, (wobei selbstverständlich gleiches specifisches Leitungsvermögen und gleiche, unendlich kleine Flächendicke vorausgesetzt wird). Dieser Umstand genügt, um zu zeigen, dass das System der Bildcurven wieder ein System von Stromlinien und Linien gleichen Potentials einer möglichen Elektricitätsbewegung in der Bildfläche ist, und zwar derjenigen Elektricitätsbewegung, bei welcher die Elektricität auf den Bildern der Ein- und Ausströmungscurve ein- und austritt. Dies ist in geometrischer Fassung die von Kirchhoff ausgesprochene Beziehung, bei welcher vorausgesetzt wird, dass auch die Grenzen der auf einander bezogenen Flächen Bilder zu einander sind.

Bei der Ableitung des Satzes denke ich mir die Bildfläche längs der Stromlinienbilder aufgeschnitten, so dass getrennte, unendlich dünne Leiterstreifen zwischen den Bildern der Ein- und Ausströmungscurve entstehen. Auf diese Streifen kann man die bekannten Formeln anwenden, welche für die Elektricitätsbewegung zwischen unendlich nahen Stromlinien gelten. Unter der Voraussetzung, dass auf den Enden aller Streifen constante, aber beiderseits verschiedene Potentialwerthe bestehen, dass also die Bilder der Ein- und Ausströmungscurve die Elektricität zu- und abführen, ergibt sich, dass die Bilder aller Linien constanten Potentials selbst constantes Potential annehmen. Hieraus folgt aber sofort, dass die durch jene Formeln ausgedrückte Elektricitätsbewegung fortbesteht, wenn die getrennt gedachten Streifen wieder leitend vereinigt werden, womit der Satz bewiesen ist.

Da diese Schlussfolgerung durchaus unabhängig ist von dem Umstande, ob die Flächenelemente kleine Grössen derselben Ordnung sind oder nicht, so kann man unmittelbar auf die Fälle übergehen, in denen die Ein- und Ausströmung auf ungeschlossenen Curven, durch den Flächenrand, oder durch Punkte erfolgt. Für letztere werden unendlich kleine geschlossene Kreise substituirt. Sind mehr als zwei Curven für die Ein- und Ausströmung vorhanden, so zeigt dieselbe Betrachtungsweise, dass die conforme Abbildung die Elektricitätsbewegung in der Bildfläche für denjenigen Fall

darstellt, dass die constanten Potentialdifferenzen der Ein- und Ausströmungscurven im Bilde proportional sind den Potentialdifferenzen der entsprechenden Curven des Originals.

Für den Leitungswiderstand der Flächen zwischen einem einzigen Elektrodenpaar ergiebt die obige Betrachtung folgende Lehrsätze:

Geschieht die Strömung zwischen Curven, welche Bilder von einander sind, so ist der Widerstand des Bildes gleich dem des Originals.

Geschieht die Ein- und Ausströmung so, dass an die aufeinander bezogenen Flächen dieselben unendlich dünnen Zuleitungsdrähte von cylindrischem Querschnitt senkrecht in entsprechenden Punkten angelegt werden, so ist der Widerstand des Bildes gleich dem des Originals, vermehrt um die Grösse $\frac{1}{2\pi k\delta} lg\beta_1\beta_2$, wobei β_1 und β_2 die bei der Abbildung der Elektrodenkreise stattfindenden linearen Bildgrössenverhältnisse, k und δ das Leitungsvermögen und die unendlich kleine Flächendicke bedeuten. Dieser letztere Satz, welcher selbstverständlich experimentell nur angenähert bestätigt werden könnte, erklärt jenes auffallende Resultat, welches Boltzmann für den Widerstand der Kugelfläche fand, dass derselbe nämlich nicht abhängt vom Kugelradius, sondern nur von der gradlinigen Entfernung derjenigen Punkte, welche man als Elektrodenpunkte wählt. Er ist derselbe für alle durch zwei feste Raumpunkte gelegte Kugelflächen. Es ergiebt sich ferner, dass dieselbe Beziehung auch gültig ist für alle unendlichen Cylinderflächen, wenn die beiden festen Elektrodenpunkte ihrer Querschnittscurve angehören.

Endlich habe ich noch bemerkt, dass ein System von Stromlinien und Linien gleichen Potentials auch nach Vertauschung des Sinnes dieser Curven eine mögliche Elektricitätsbewegung darstellt, ein Umstand, welcher bei physikalischen Untersuchungen meines Wissens bisher keine Anwendung fand. Kirchhoff hat gezeigt, wie man mit grosser Schärfe die Linien gleichen Potentials einer gegebenen Flächenströmung mit dem Galvanometer aufsuchen kann. Würde die eben bemerkte Vertauschung physikalisch vollzogen, so würde dieselbe Methode sich auch für die experimentelle Feststellung der Stromlinien verwenden lassen, und hierdurch wäre die Möglichkeit geboten, Abbildungsprobleme unter Umständen mit erheblicher Genauigkeit in der bereits von Kirchhoff angedeuteten Weise experimentell zu behandeln.

Dresden. A. Toepler.

G. Kirchhoff: Ueber die Reflexion und Brechung des Lichts an der Grenze krystallinischer Mittel. (Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1876.)

Der Zweck dieser Abhandlung ist es, die von F. Neumann entwickelte und später von Mac Cullagh behandelte Theorie der Reflexion und Brechung des Lichts an der Grenzfläche krystallinischer Mittel in einer neuen Form darzustellen, welche die nicht zu übertreffende Einfachheit derselben deutlicher als bisher hervortreten lässt. Diesen Zweck glaubt der Verfasser erreicht zu haben, indem er die Grundhypothese der Theorie anders ausgesprochen und das zu behandelnde Problem etwas allgemeiner gefasst hat, als es von den genannten Forschern geschehen ist. Die Grundlage der durchgeführten Betrachtungen ist die Annahme, dass der Aether in Bezug auf die Lichtschwingungen sich wie ein fester elastischer Körper verhält, auf dessen Theile keine andern Kräfte wirken, als die durch die relativen Verschiebungen bedingten, während auf die Flächen, die die Grenzen heterogener Mittel bilden, auch Druckkräfte, die andern Ursprungs sind, ausgeübt werden, und zwar Druckkräfte, die bewirken, dass bei der Reflexion und Brechung der transversalen Lichtwellen keine longitudinalen Wellen entstehen. Die Bedingungen zwischen den Verrückungen, die hiernach an der ebenen Grenze zweier verschiedenen, krystallinischen Mittel zu erfüllen sind, bestehen in 4 linearen homogenen Gleichungen. Es wird eine partikuläre Lösung der für die Schwingungen geltenden Differentialgleichungen untersucht, die diesen Grenzbedingungen genügt, und die ein System ebener Wellen darstellt, die theils in dem einen, theils in dem andern Mittel sich bewegen. Eine von diesen Wellen kann beliebig gegeben sein: beliebig in Bezug auf ihre Richtung und in Bezug auf das Gesetz, welches die Grösse der Verrückung eines Punktes mit der Zeit verbindet; die Richtungen der andern Wellen sind dann durch die Wurzeln zweier biquadratischen Gleichungen bestimmt, von denen die eine auf Wellen in dem einen, die andere auf Wellen in dem andern Mittel sich bezieht. Eine Wurzel der einen dieser Gleichungen führt auf die gegebene Welle zurück; es besteht daher das ganze System aus 8 Wellen, von denen 4 dem einen, 4 dem andern Mittel angehören. Für jede dieser Wellen ist mit ihrer Richtung die Richtung der Verrückung vollständig, und die Grösse der Verrückung in jedem Augenblick bis auf eine multiplicative Constante bestimmt. Nennt man diese Con-

stante die Amplitüde der Welle (indem man einen bei Sinusschwingungen üblichen Ausdruck auf Schwingungen allgemeinerer Art überträgt), so bestehen zwischen den Amplitüden der 8 Wellen 4 lineare, homogene Gleichungen; neben der Amplitüde der gegebenen Welle können also noch die Amplitüden von 3 andern willkürlich gewählt werden. Haben die beiden biquadratischen Gleichungen nur reelle Wurzeln, so sind in jedem Mittel 2 einfallende Wellen vorhanden und 2, die reflektirt oder gebrochen sind; um Fälle zu erhalten, die durch das Experiment verwirklicht werden können, hat man dann im Allgemeinen die Amplitüden von 3 einfallenden Wellen gleich Null zu setzen, so dass nur *eine* einfallende Welle übrig bleibt. Aber die biquadratischen Gleichungen können auch complexe Wurzeln haben; das Entsprechende tritt bei isotropen Mitteln ein, wenn totale Reflexion stattfindet. Um *dann* auf Fälle zu kommen, die der Beobachtung zugänglich sind, hat man die Constanten, die die Bedingung, dass nur *eine* einfallende Welle da sei, noch unbestimmt lässt, so zu wählen, dass die Verrückung nirgend unendlich wird; es ist dabei die Aufgabe zu lösen, eine Function eines complexen Arguments zu finden, deren reeller Theil für reelle Werthe des Arguments gegeben ist, und die nicht unendlich wird für Werthe des Arguments, deren imaginärer Theil gleich $\sqrt{-1}$, multiplicirt mit einer positiven Grösse, ist.

Bei der Ableitung der Gleichungen zwischen den Amplitüden eines Systemes von 8 zusammengehörigen Wellen brauchte der Begriff der *Strahlen* nicht zu Hülfe gezogen werden. Bei der Entscheidung der Frage, ob eine Welle eine einfallende ist oder eine reflektirte oder gebrochene, kann derselbe nicht umgangen werden. Er ist daher auch in Betracht gezogen und definirt. Sucht man für eine gegebene ebene Welle die auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit des Druckes, der von den relativen Verschiebungen der Aethertheile herrührt und auf ein Element einer beliebigen Ebene wirkt, so ergiebt sich dieselbe gleich Null, falls die Ebene einer gewissen Richtung parallel ist; diese Richtung ist die des Strahles, der zu der Welle gehört.

Berlin. G. Kirchhoff.

R. Clausius: Ueber die Ableitung eines neuen electrodynamischen Grundgesetzes. (Borchardt's Journal Bd. 82.)

In dieser Abhandlung giebt der Verf. die Ableitung des Grundgesetzes, welches er schon im Dec. v. J. und in etwas vereinfachter Form im Febr. d. J. vorläufig veröffentlicht hatte.

Bekanntlich hat zuerst W. Weber versucht, alle electrodynamischen Erscheinungen auf ein Grundgesetz zurückzuführen, welches die Kraft bestimmt, die zwei bewegte Electricitätstheilchen auf einander ausüben. Seien nämlich e und e' die beiden in Puncten concentrirt gedachten Electricitätstheilchen und r ihr gegenseitiger Abstand zur Zeit t, so sollen die Theilchen nach Weber eine Abstossung von der Stärke

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{2}{c^2}r\frac{d^2r}{dt^2}\right]$$

auf einander ausüben, worin c eine Constante ist.

Bei der Ableitung dieser Formel ist Weber von der Vorstellung ausgegangen, dass bei einem galvanischen Strome in jedem Leiterelemente gleiche Mengen von positiver und negativer Electricität sich mit gleichen Geschwindigkeiten nach entgegengesetzten Seiten bewegen. Da diese Doppelbewegung eine sehr complicirte ist, so hat der Verf. sich die Frage gestellt, ob man nicht auch aus einer einfachen strömenden Bewegung alle electrodynamischen Erscheinungen erklären könne.

Dieser letzteren Vorstellung von nur Einer Strömung hat in neuerer Zeit C. Neumann nach dem Vorgange von Riemann eine bestimmtere Form gegeben, indem er annimmt, dass die negative Electricität fest an die ponderablen Atome gebunden sei und nur die positive Electricität im festen Leiter strömen könne, und diese Vorstellung legt der Verf. seinen Betrachtungen zu Grunde.

Er untersucht zunächst, ob die Weber'sche Formel auch mit dieser Vorstellung vereinbar sei, findet aber, dass sie unter der Voraussetzung von nur Einer strömenden Electricität zu Kräften führen würde, welche in der Wirklichkeit nicht stattfinden. Dasselbe stellt sich für eine von Riemann aufgestellte Formel, welche in neuester Zeit von Hattendorff veröffentlicht ist, heraus.

Der Verf. schreitet dann dazu, selbst eine Formel abzuleiten, welche ebenfalls alle bis jetzt bekannten electrodynamischen Erscheinungen erklärt, und auch unter der Voraussetzung von nur Einer strömenden Electricität zu keinen Widersprüchen führt. Er

wählt zuerst ein specielles Coordinatensystem und stellt einen Ausdruck auf, welcher ausser den Coordinaten der Electricitätstheilchen die Geschwindigkeits- und Beschleunigungscomponenten d. h. die Differentialcoefficienten erster und zweiter Ordnung der Coordinaten nach der Zeit enthält, und in welchem alle möglichen Glieder mit Differentialausdrücken bis zur zweiten Ordnung vorkommen, mit Ausnahme solcher Glieder, die sich durch einfache geometrische Betrachtungen sofort als unmöglich ergeben. Diesen Ausdruck überträgt er dann auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem, in welchem die beiden Electricitätstheilchen zur Zeit t die Coordinaten x, y, z und x', y', z' haben, und gelangt dadurch zu folgendem Resultate.

Wenn die drei in die Coordinatenrichtungen fallenden Componenten der Kraft, welche das Theilchen e von dem Theilchen e' erleidet, durch Xee', Yee' und Zee' dargestellt werden, so lässt sich X in nachstehende Summe zerlegen:

$$X = \frac{x - x'}{r^3} + X_1 + X_2 + X_3 \tag{1}$$

und zur Bestimmung von X_1, X_2 und X_3 gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} X_1 = {} & B \frac{dx}{dt} + B_1 \frac{d^2x}{dt^2} + B_2 \frac{dr}{ds} \frac{dx}{dt} \frac{ds}{dt} \\ & + \left\{ C \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} + \left[C_1 \frac{d^2r}{ds^2} + C_2 \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + C_3 \right] \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + C_1 \frac{dr}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} \right\} (x - x'). \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} X_2 = {} & B_3 \frac{dx'}{dt} + B_4 \frac{d^2x'}{dt^2} + B_5 \frac{dr}{ds'} \frac{dx'}{dt} \frac{ds'}{dt} \\ & + \left\{ C_4 \frac{dr}{ds'} \frac{ds'}{dt} + \left[C_5 \frac{d^2r}{ds'^2} + C_6 \left(\frac{dr}{ds'}\right)^2 + C_7 \right] \left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + C_5 \frac{dr}{ds'} \frac{d^2s'}{dt^2} \right\} (x - x'). \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} X_3 = {} & B_6 \frac{dr}{ds} \frac{dx'}{dt} \frac{ds}{dt} + B_7 \frac{dr}{ds'} \frac{dx}{dt} \frac{ds'}{dt} \\ & + \left(C_8 \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} + C_9 \cos \varepsilon \right) (x - x') \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}. \end{aligned} \tag{4}$$

Hierin bedeuten ds und ds' die von den beiden Electricitätstheilchen während der Zeit dt zurückgelegten Bahnelemente, und ε den Winkel zwischen den Richtungen derselben. B, $B_1 \ldots . B_7$ und C, $C_1 \ldots . C_9$ stellen unbestimmte Functionen des Abstandes r dar, um deren Bestimmung es sich im Folgenden handelt.

Um die in X_2 vorkommenden Functionen zu bestimmen wird zunächst der Satz angewandt, *dass ein in einem ruhenden Leiter stattfindender geschlossener und constanter galvanischer Strom auf ein ruhendes Electricitätstheilchen keine bewegende Kraft ausübt.*

Um die in X_1 vorkommenden Functionen zu bestimmen wird der umgekehrte Satz angewandt, *dass eine ruhende Electricitätsmenge auf einen in einem ruhenden Leiter stattfindenden geschlossenen und constanten galvanischen Strom keine Kraft ausübt.*

Um ferner die in X_3 vorkommenden Functionen zu bestimmen wird aus der Ampère'schen Theorie der Ausdruck *derjenigen ponderomotorischen Kraft, welche zwei geschlossene galvanische Ströme auf einander ausüben*, als sicher angenommen, und dann wird noch der Satz angewandt, *dass ein in einem ruhenden Leiter stattfindender geschlossener und constanter galvanischer Strom einen anderen in einem ruhenden Leiter stattfindenden geschlossenen galvanischen Strom in seiner Intensität nicht zu ändern sucht.*

Um endlich in X_2 noch eine weitere Bestimmung von noch unbestimmt gebliebenen Functionen auszuführen, wird für geschlossene Leiter aus der Inductionstheorie der Satz angewandt, *dass, wenn entweder der Leiter s in einer bestimmten Lage in der Nähe des Leiters s' verharrt, aber im letzteren die Stromstärke von Null bis zu einem gegebenen Werthe wächst, oder die Stromstärke in s' unveränderlich diesen Werth hat, aber s sich aus unendlicher Entfernung bis zu jener Lage heranbewegt, in beiden Fällen eine gleich grosse Inductionswirkung in s stattfindet.*

Durch diese Sätze, welche alle als zuverlässig betrachtet werden dürfen, werden die obigen achtzehn unbestimmten Functionen von r auf fünf reducirt, und wenn diese mit E, F, G, H und J bezeichnet werden, so lautet der Ausdruck von X folgendermaassen:

$$(5)\quad X = \frac{x-x'}{r^3} + \frac{d[J(x-x')]}{ds'}\frac{ds'}{dt} + \frac{d^2[G(x-x')]}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2$$
$$+ \frac{d[G(x-x')]}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(H\frac{dx}{dt}\right) - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right)$$
$$+ \left\{\frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{dF}{ds'}\frac{dx}{ds} + \frac{d^2[E(x-x')]}{ds\,ds'}\right\}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

worin k eine Constante bedeutet.

Um die hierin noch vorkommenden unbestimmten Functionen ebenfalls zu bestimmen, wird nun die Annahme gemacht, *dass die Kräfte, welche zwei Electricitätstheilchen e und e' auf einander ausüben, für sich allein dem Princip von der Erhaltung der Energie genügen.* Hierdurch reducirt sich die vorige Gleichung auf folgende:

$$(6)\qquad X = -\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\left(1 + \frac{k}{2}\frac{d^2(r^2)}{ds ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right) - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right)$$
$$+ \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2R}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + \frac{dR}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2}\right],$$

worin R die einzige noch übrig bleibende unbestimmte Function von r ist.

Nennen wir nun die Grösse, deren negatives Differential die während eines Zeitelementes dt bei der Bewegung der Electricitätstheilchen von den Kräften gethane Arbeit darstellt, das *Potential* der Theilchen auf einander, so wird das Potential ausgedrückt durch

$$cc'\left[\frac{1}{r} - \left(\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds ds'} + \frac{d^2R}{ds ds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right].$$

Dieses Potential können wir in zwei Bestandtheile zerlegen, das *electrostatische* Potential U und das *electrodynamische* Potential V. Dann gelten die Gleichungen:

$$(7)\qquad U = \frac{cc'}{r}$$

$$(8)\qquad V = -cc'\left(\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds ds'} + \frac{d^2R}{ds ds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Der hier gegebene Ausdruck des electrodynamischen Potentials ist bei der Annahme von nur Einer im festen Leiter beweglichen Electricität der einzig mögliche.

Die in ihm noch vorkommende, mit R bezeichnete unbestimmte Function von r lässt sich aus den Wirkungen geschlossener Ströme überhaupt nicht bestimmen, und man ist daher, wenn man auch sie noch bestimmen will, für jetzt auf Wahrscheinlichkeitsgründe angewiesen.

Macht man die Annahme, dass die Abhängigkeit der Kraft von der Entfernung nach einem einheitlichen Gesetze stattfinden müsse, so gelangt man zu dem Schlusse, dass

$$(9)\qquad R = k_1 r$$

zu setzen ist, worin k_1 eine Constante bedeutet. Dadurch geht (8) über in:

$$(10)\qquad V = -cc'\left(\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds ds'} + k_1\frac{d^2 r}{ds ds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Sucht man ferner noch durch Bestimmung der Constanten k_1 diesen Ausdruck möglichst einfach zu machen, so findet man zu-

nächst, dass zwei Werthe sich in dieser Beziehung besonders auszeichnen, nämlich $k_1 = 0$ und $k_1 = -k$, welche geben:

$$(11)\qquad V = -k\frac{ee'}{2r}\frac{d^2(r^2)}{dsds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

$$(12)\qquad V = -k\frac{ee'}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Diese beiden Formeln sind äusserlich nahe gleich einfach; benutzt man sie aber zu Rechnungen, indem man aus ihnen die Kraftcomponenten zu bestimmen sucht, so findet man, dass für diese aus der ersteren Formel viel einfachere Ausdrücke entstehen, als aus der letzteren, und man wird also, wenn man dasjenige Kraftgesetz erhalten will, welches, während es allen bis jetzt bekannten Erscheinungen entspricht, zugleich möglichst einfach ist, $k_1 = 0$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, $R = 0$ zu setzen haben.

Da der Ausdruck des electrodynamischen Potentials kürzer und übersichtlicher ist, als diejenigen der Kraftcomponenten, so ist er ganz besonders dazu geeignet, die verschiedenen bis jetzt aufgestellten electrodynamischen Grundgesetze, (mit Ausnahme des Gauss'schen, welches dem Princip von der Erhaltung der Energie nicht genügt,) unter einander zu vergleichen, und es möge hier eine Zusammenstellung der Art Platz finden. Die zur Bestimmung des electrodynamischen Potentials dienende Gleichung ist

1) nach Weber*):

$$V = -\frac{1}{c^2}\frac{ee'}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

2) nach Riemann**):

$$V = -\frac{1}{c^2}\frac{ee'}{r}\left[\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right)^2\right],$$

3) nach den hier ausgeführten Entwickelungen

a) in allgemeinster Form:

$$V = -ee'\left(\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{dsds'}+\frac{d^2R}{dsds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

b) in vereinfachter Form:

$$V = -ee'\left(\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{dsds'}+k_1\frac{d^2r}{dsds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

---

*) Pogg. Ann. Jubelband S. 212.

**) Schwere, Electricität und Magnetismus, nach den Vorlesungen von Bernh. Riemann bearbeitet von Hattendorff, Hannover 1876, S. 326.

c) in einfachster und daher wahrscheinlichster Form:

$$V = -k\frac{ee'}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Dem letzten Ausdrucke kann man auch folgende Gestalt geben:

$$(13)\qquad V = k\frac{ee'}{r}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right),$$

oder, wenn man mit v und v' die Geschwindigkeiten der beiden Electricitätstheilchen und mit ε den Winkel zwischen ihren Bewegungsrichtungen bezeichnet:

$$(14)\qquad V = k\frac{ee'}{r}vv'\cos\varepsilon.$$

Um nun aus dem electrostatischen und electrodynamischen Potential wiederum Kraftcomponenten abzuleiten, hat man Gleichungen anzuwenden, in denen das electrodynamische Potential in derselben Weise vorkommt, wie in den auf allgemeine Coordinaten bezüglichen mechanischen Grundgleichungen von **Lagrange** die lebendige Kraft. Für die in die x-Richtung fallende Componente der Kraft, welche das Theilchen e erleidet, lautet die Gleichung:

$$(15)\qquad Xee' = \frac{d(V-U)}{dx} - \frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{d\frac{dx}{dt}}\right).$$

Durch Ausführung der hierin angedeuteten Differentiationen erhält man für X den unter (6) gegebenen Ausdruck.

Setzt man in diesem Ausdrucke $R = 0$ und nimmt mit ihm noch die vorher bei V angewandten Umformungen vor, so erhält man:

$$X = -\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\left(1+\frac{k}{2}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right) - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right)$$

$$= -\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\left[1-k\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right)\right] - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right)$$

$$= -\frac{d\frac{1}{r}}{dx}(1-kvv'\cos\varepsilon) - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right),$$

und Gleichungen derselben Art lassen sich natürlich auch für die beiden anderen Coordinatenrichtungen bilden.

Will man nun das auf zwei einzelne Electricitätstheilchen bezügliche Grundgesetz dazu anwenden, die ponderomotorische Kraft zwischen zwei galvanischen Stromelementen ds und ds' zu bestimmen,

so hat man in jedem Stromelemente die bewegte positive und die ruhende negative Electricität zu betrachten, und die Kräfte auszudrücken, welche die beiden Electricitätsmengen des einen Stromelementes von den beiden Electricitätsmengen des anderen erleiden. Bestimmt man auf diese Weise die x-Componente der Kraft, welche das Stromelement ds von dem Stromelemente ds' erleidet, und wendet dabei für X den unter (6) gegebenen allgemeinen Ausdruck an, so hebt sich in der zu bildenden Summe die unbestimmte Function R auf, und man erhält folgenden ganz bestimmten Ausdruck, worin i und i' die Stromintensitäten bedeuten:

$$kii'\,ds\,ds'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\cos\varepsilon - \frac{d\frac{1}{r}}{ds}\frac{dx'}{ds'}\right),$$

welcher Ausdruck der einzige ist, der sich mit den beiden Annahmen, dass nur Eine Electricität im festen Leiter beweglich sei, und dass die gegenseitigen Einwirkungen zweier Electricitätstheilchen für sich allein dem Princip von der Erhaltung der Energie genügen, vereinigen lässt.

Bonn. R. Clausius.

A. Weiler: Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung von unbeschränkter Allgemeinheit. (Zeitschr. für Mathem. und Physik 1875, S. 271—299.)

Die Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in ihrer allgemeinsten Form lässt sich auf die Integration partieller Differentialgleichungen zurückführen, in welchen die Differentialquotienten der abhängigen Veränderlichen nur linear vorkommen. Auf diesem Wege hat Lagrange die Integration der partiellen Differentialgleichung $f(z\,y\,x\,q\,p) = 0$ ausgeführt, wo $\frac{dz}{dy} = q$ und $\frac{dz}{dx} = p$ gesetzt ist.

Es handelt sich darum, die partielle Differentialgleichung mit mehr als drei Veränderlichen ebenso zu integriren, wie Lagrange die partielle Differentialgleichung mit drei Veränderlichen integrirt hat. Die von Jacobi gegebene Methode ist erst nach dessen Tode im Druck veröffentlicht worden. Ich hatte schon vorher in Grunert's Archiv, Jahrg. 1859, eine andere Methode gegeben, und da es sich zeigte, dass dieselbe vollkommenere Resultate liefert als die Jacobi'sche, so habe ich sie weiter ausgearbeitet und in der

Zeitschr. für Mathem. und Physik, Jahrg. 1863, veröffentlicht. Wiewohl diese Methode schon damals Anerkennung gefunden hat, so ist sie doch nur theilweise verstanden und gewürdigt worden. In der neuen Bearbeitung, welche ich gleichfalls in der Zeitschr. für Mathem. und Physik, Jahrgang 1875, gegeben habe, ist man meinen Aufstellungen zwar einen Schritt weiter, aber doch wieder nur theilweise gefolgt (vgl. Repert. S. 75). Ich ergreife deshalb gern diese Gelegenheit, diejenigen Resultate, durch welche sich meine Methode vor allen andern auszeichnet, unabhängig von deren Begründung, in Kürze mitzutheilen.

Ich schreibe die zu integrirende Gleichung

$$f(z\, x_1 x_2 \ldots x_n p_1 p_2 \ldots p_n) = 0,$$

wo f eine beliebige Function ist, und die partiellen Differentialquotienten $\frac{dz}{dx_1} \frac{dz}{dx_2} \cdots \frac{dz}{dx_n}$ abkürzend gleich $p_1 p_2 \ldots p_n$ gesetzt sind. Es handelt sich um die Herleitung eines vollständigen Integrals. Man denkt sich unter demselben eine Gleichung zwischen den Veränderlichen $z\, x_1 x_2 \ldots x_n$, welche der partiellen Differentialgleichung $f = 0$ Genüge leistet, und zugleich n willkürliche Beständige enthält. Nachdem man ein vollständiges Integral aufgefunden hat, erhält man das allgemeine Integral durch eine bekannte algebraische Operation.

Man sucht die partiellen Differentialquotienten $p_1 p_2 \ldots p_n$ als Function von $z\, x_1 x_2 \ldots x_n$ darzustellen, und erhält alsdann das vollständige Integral durch die Integration der vollständigen Differentialgleichung

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n.$$

Schreibt man die zu integrirende Gleichung $f = 0$ in der Form $\varphi_1 = c_1$, wo c_1 irgend eine der in der Gleichung $f = 0$ vorkommenden Beständigen ist, so hat man, um die vorliegende Aufgabe zu lösen, $n - 1$ andere ähnliche Gleichungen $\varphi_2 = c_2$, $\varphi_3 = c_3 \ldots \varphi_n = c_n$ aufzustellen, in welchen $c_2 c_3 \ldots c_n$ willkürliche Beständige, und $\varphi_2 \varphi_3 \ldots \varphi_n$ ebenso wie φ_1 bestimmte Functionen der $2n + 1$ Veränderlichen $z\, x_1 x_2 \ldots x_n p_1 p_2 \ldots p_n$ sind. Indem man diese Gleichungen mit der Gleichung $\varphi_1 = c_1$ in Verbindung bringt, erhält man durch die algebraische Auflösung der Gleichungen die partiellen Differentialquotienten $p_1 p_2 \ldots p_n$ als Function der Veränderlichen $z\, x_1 x_2 \ldots x_n$.

Zur Bestimmung der Funktion $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n$ habe ich partielle Differentialgleichungen von linearer Form aufgestellt. Die Function φ_2 ist eine Lösung einer partiellen Differentialgleichung mit $2n$ unabhängigen Veränderlichen. Die Function φ_3 ist eine gemeinsame

Lösung von 2 partiellen Differentialgleichungen mit je $2n-2$ unabhängigen Veränderlichen, die Function φ_4 eine gemeinsame Lösung von 3 partiellen Differentialgleichungen mit je $2n-4$ unabhängigen Veränderlichen. Die Function φ_n schliesslich ist eine gemeinsame Lösung von $n-1$ partiellen Differentialgleichungen mit je $2n-2(n-2)=4$ unabhängigen Veränderlichen. Schreibt man das vollständige Integral in der Form $\varphi=c$, wo c eine willkürliche Beständige ist, so kann man die Function φ als die gemeinsame Lösung von n partiellen Differentialgleichungen mit je 2 unabhängigen Veränderlichen auffassen. Die partiellen Differentialgleichungen der nach einander zu integrirenden Systeme haben also beziehungsweise $2n$, $2n-2$, $2n-4 \ldots 2$ unabhängige Veränderliche.

Wenn ich das in Abrechnung bringe, was ich über die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen in den zu integrirenden Systemen partieller Differentialgleichungen gesagt habe, so sind die im Vorstehenden angegebenen Operationen übereinstimmend mit den nach der Jacobi'schen Methode vorgeschriebenen. Jacobi hat aber die zu integrirenden Systeme nicht in ihrer einfachen Gestalt aufgestellt. Denn die von Jacobi aufgestellten partiellen Differentialgleichungen enthalten ausnahmslos eine unabhängige Veränderliche mehr als die von mir aufgestellten. Dieselben haben nicht, wie die obigen $2n$, $2n-2$, $2n-4 \ldots 2$, sondern $2n+1$, $2n-1$, $2n-3 \ldots 3$ unabhängige Veränderliche.

Für den besonderen Fall, dass die unabhängige Veränderliche z in der Gleichung $f=0$ fehlt, hat auch Jacobi die zu integrirenden Systeme in ihrer einfachen Gestalt gegeben. Für diesen Fall ist die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen der obigen partiellen Differentialgleichungen um die Einheit kleiner als in der allgemeinen Aufgabe. Die partiellen Differentialgleichungen der nach einander zu integrirenden Systeme haben beziehungsweise nur noch $2n-1$, $2n-3$, $2n-5 \ldots 1$ unabhängige Veränderliche. Diese für den besonderen Fall giltigen Systeme sind in der That nicht wesentlich verschieden von denjenigen, welche auch Jacobi für diesen Fall aufgestellt hat.

Die Jacobi'sche Methode beschränkt sich im Wesentlichen darauf, die Systeme partieller Differentialgleichungen aufzustellen, welche nach einander integrirt werden sollen, und überlässt die Integration der Lösung der besonderen Aufgabe, in welcher die Function f nicht mehr unbestimmt ist. Man kann aber die Integration der Systeme auch dann, wenn die Gleichung $f=0$ die un-

bestimmte Form hat, bis zu einem vorgerückten Punkte verfolgen, was Jacobi nicht bemerkt hat. Um dem Leser ein Verständniss von der Beschaffenheit der von mir aufgefundenen Resultate geben zu können, bin ich genöthigt, auf eine Eigenschaft der vorliegenden Systeme einzugehn; und vor Allem muss ich auf die Zählung der unabhängigen Veränderlichen in den zu integrirenden Systemen zurückkommen.

Es ist oben bemerkt worden, dass die Function φ_3 eine gemeinsame Lösung von 2 partiellen Differentialgleichungen mit je $2n-2$ unabhängigen Veränderlichen ist. Diese partiellen Differentialgleichungen enthalten im Ganzen $2n-1$ unabhängige Veränderliche. Wir haben aber von vornherein angenommen, dass jede eine unabhängige Veränderliche weniger, also deren $2n-2$ habe, weil man einen partiellen Differentialquotienten der Function φ_3 durch Elimination wegbringen kann. Die betreffende unabhängige Veränderliche kommt dann freilich noch in den Coefficienten der partiellen Differentialgleichung vor; allein sie hat dann die Bedeutung einer unbestimmten Beständigen oder eines Parameters. Ferner ist die Function φ_4 eine gemeinsame Lösung von 3 partiellen Differentialgleichungen mit je $2n-4$ unabhängigen Veränderlichen. Diese partiellen Differentialgleichungen enthalten im Ganzen $2n-2$ unabhängige Veränderliche. Da man aber je 2 partielle Differentialquotienten der Function φ_4 durch Elimination wegbringen kann, so haben wir von vornherein jeder partiellen Differentialgleichung 2 unabhängige Veränderliche weniger, also deren $2n-4$ gegeben. Diese 2 unabhängigen Veränderlichen kommen dann in der partiellen Differentialgleichung als Parameter vor. Die Function φ_{i+2} ist eine gemeinsame Lösung von $i+1$ partiellen Differentialgleichungen mit je $2n-2i$ unabhängigen Veränderlichen. Im Ganzen enthalten diese partiellen Differentialgleichungen $2n-i$ unabhängige Veränderliche. Da man aber je i partielle Differentialquotienten der Function φ_{i+2} durch Elimination wegbringen kann, so haben wir von vornherein angenommen, dass jede partielle Differentialgleichung i unabhängige Veränderliche weniger, also deren $2n-2i$ habe. Diese i unabhängigen Veränderlichen kommen dann in der partiellen Differentialgleichung als Parameter vor.

Ich kann mich jetzt über eine wichtige Eigenschaft der vorliegenden Systeme verständlich machen. Die Function φ_{i+2} wird durch ein System von $i+1$ partiellen Differentialgleichungen bestimmt mit je $2n-2i$ unabhängigen Veränderlichen. Die Anzahl

der Lösungen einer partiellen Differentialgleichung mit $2n - 2i$ unabhängigen Veränderlichen ist bekanntlich $2n - 2i - 1$. In das System führen wir die $2n - 2i - 1$ Lösungen der letzten Gleichung als neue Veränderliche anstatt derjenigen $2n - 2i - 1$ Veränderlichen ein, welche auch in den andern i partiellen Differentialgleichungen als solche vorkommen. Die letzte Gleichung fällt dann weg, und die eine noch übrige der $2n - 2i$ Veränderlichen dieser Gleichung, welche in den andern i partiellen Differentialgleichungen als Parameter vorkommt, fällt aus denselben von selbst hinaus. Nach vollzogener Transformation hat man ein System von i partiellen Differentialgleichungen anstatt des ursprünglichen von $i + 1$ partiellen Differentialgleichungen. Jede der i partiellen Differentialgleichungen hat wieder $2n - 2i$ Veränderliche; aber die Anzahl der Parameter ist um die Einheit kleiner als in den partiellen Differentialgleichungen des ursprünglichen Systems. In gleicher Weise führt man das neue System von i partiellen Differentialgleichungen zurück auf eines von $i - 1$ partiellen Differentialgleichungen. Die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen ist wieder $2n - 2i$; allein die Anzahl der Parameter ist um 2 Einheiten kleiner als in den ursprünglichen $i + 1$ partiellen Differentialgleichungen. Schliesslich behält man nur eine partielle Differentialgleichung mit $2n - 2i$ unabhängigen Veränderlichen; aber die Anzahl der Parameter ist um i Einheiten kleiner als in den ursprünglichen $i + 1$ partiellen Differentialgleichungen.

Diese Eigenschaft des vollständigen Systems habe ich bei der Integration der Gleichung $\varphi_1 = c_1$ verwerthet. Die Function φ_2 ist durch eine einzige partielle Differentialgleichung bestimmt, die Function φ_3 durch ein System von 2 partiellen Differentialgleichungen, die Function φ_4 durch ein System von 3 partiellen Differentialgleichungen, die Function φ_n schliesslich durch ein System von $n - 1$ partiellen Differentialgleichungen. Indem man das vollständige Integral der Gleichung $\varphi_1 = c_1$ in der Form $\varphi = c$ schreibt, erhält man zur Bestimmung von φ ein System von n partiellen Differentialgleichungen. Bei der Bestimmung von φ_2 und φ_3 habe ich an diesen Systemen Nichts geändert. Bei der Bestimmung der übrigen Functionen $\varphi_4 \ldots \varphi_n$ φ aber ergiebt sich eine wesentliche Vereinfachung, da ich an die Stelle dieser Systeme jedesmal ein System von nur 2 partiellen Differentialgleichungen gesetzt habe. Diese neuen Systeme sind identisch mit denjenigen, welche man auf dem vorstehend beschriebenen Wege aus den ursprünglichen

herleiten könnte. Dieselben sind also vor den ursprünglichen Systemen darin ausgezeichnet, dass die Anzahl der in einer partiellen Differentialgleichung vorkommenden Parameter um ebenso viele Einheiten kleiner geworden ist, als die Anzahl der partiellen Differentialgleichungen abgenommen hat. Zur Herstellung der neuen Systeme bedarf es keiner Integration. Es ergeben sich dieselben durch bestimmte algebraische Operationen aus den ursprünglichen Systemen.

Mannheim. A. Weiler.

H. W. Lloyd Tanner. The solution of partial differential equations of the second order, with any number of variables, when there is a general first integral.

(Proceedings. Lond. Math. Soc. Vol. VII.)

We take z for dependent variable: $x_1, x_2 \dots x_n$ for independent variables: $\frac{dz}{dx_i}$ is represented by p_i: and $\frac{d^2 z}{dx_k\, dx_l}$ by s_{kl}.

In the fiirst part of the paper we seek the form of the equation of the second order which has a first integral of the form

$$(1) \qquad F(u_1, u_2, \dots u_n) = 0$$

where F is arbitrary, and $u_1, u_2 \dots u_n$ are n independent functions of $z, x_1, \dots x_n, p_1 \dots p_n$. Such an equation consists of at most $\frac{1}{2} \cdot \frac{2n!}{(n!)^2} + 2^{n-1}$ terms. One factor of each of these is the determinant

$$\begin{vmatrix} s_{11}, & s_{12}, & \dots & s_{1n} \\ s_{12}, & s_{22}, & \dots & s_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ s_{1n}, & s_{2n}, & \dots & s_{nn} \end{vmatrix}$$

or a minor of this determinant. The other factor is a function of the derivatives of $u_1 \dots u_n$, whose form is specified for each term.

In the second part of the paper we start with an equation of the second order and seek to determine its first integral (1), should there be one; viz. we seek to find $u_1 \dots u_n$. For this purpose, $\frac{2n!}{n+1!\, n-1!}$ linear equations of the first order can be employed. Of this system n, and only n equations are independent: and their

coefficients are expressed directly or indirectly in terms of the coefficients of the given equation of the second order. There is always a second set of equations corresponding to another first integral: but, except possibly in one case, there are not more than two first integrals. The case of the equation with two independent variables is discussed as an example of the general theory.

In the third part we consider the theory of the second integration; viz. the integration of (1). If there be only one first integral (as distinguished from two identical first integrals) we cannot get a general integral of (1) but can find as many particular solutions as we please.

If two first integrals occur, the arguments of one furnish the equations required to integrate the other. In this case it would appear to employ a generalisation of a method proposed by Imschenetsky*) for the case of two independent variables.

If the two first integrals be identical, the complete primitive is found by equating to constants the different arguments of F; hence deducing values of $p_1, p_2 \dots p_n$ in terms of $x_1, x_2, \dots x_n, z$; and integrating the expression

$$dz - p_1\,dx_1 - \dots - p_n\,dx_n$$

which is then an exact differential.

H. W. Lloyd Tanner.

F. Caspary: Die Krümmungsmittelpunktsfläche des elliptischen Paraboloids. (Borchardt's Journ. Bd. 81. S. 143 ff.)

Die Krümmungsmittelpunktsflächen sind seit ihrer Einführung in die Wissenschaft durch Monge in Bezug auf ihre allgemeinen Eigenschaften zwar vielfach behandelt, indess nur diejenigen für die Oberflächen zweiter Ordnung durch Clebsch (Borchardt's Journ. Bd. 62 S. 64 ff.) zum Gegenstande speciellerer Untersuchungen gemacht worden. Jedoch lassen sich die letzteren nur auf die Mittelpunktsflächen zweiten Grades anwenden und sind nicht ausreichend für die anderen, weil die Specialitäten der Flächen zweiter

*) Etude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes. — Chapitre IV.

Ordnung ohne Mittelpunkt durchgehends die Resultate bedeutend modificiren und nicht unerheblich vereinfachen.

Die in der Ueberschrift genannte Abhandlung, aus einer von der philosophischen Facultät der Berliner Universität preisgekrönten Arbeit des Verfassers hervorgegangen, beschäftigt sich ausschliesslich mit der Krümmungsmittelpunktsfläche des elliptischen Paraboloids. Sie stellt in ihrem ersten Theile die Coordinaten durch zwei Parameter dar, zeigt die vorläufige Beziehung der Fläche zum Normalenproblem, leitet eine für die Aufstellung und Discussion der Fläche fundamentale Gleichung ab und giebt in Punktcoordinaten die Darstellung derselben in schliesslicher Endform. In dem zweiten Theile der Arbeit werden die singulären Ebenen, Curven und Punkte der Fläche, und in weiterer Ausführung die Beziehungen derselben zum Normalenproblem entwickelt, ferner wird die Doppelcurve der Fläche nebst ihren Singularitäten, und die polare reciproke Fläche abgeleitet und behandelt. Bemerken möchte ich noch, dass die Discussion der Fläche durch die Untersuchung einer binären Form fünften Grades geschieht.

§ 1. Durch die beiden Grössen u und v, welche die Parameter der beiden zu dem gegebenen Paraboloide

$$\frac{x'x'}{a} + \frac{y'y'}{b} - 2z't' = 0 \tag{1}$$

confocalen Flächen zweiten Grades bedeuten, werden die Coordinaten jeder der zwei Schalen der Fläche der Centra*) *getrennt* ausgedrückt, und nach Einführung des Parameters λ (S. 144) ergiebt sich als *gemeinsame* Gleichung beider Schalen, oder als Gleichung der Fläche der Centra:

$$\begin{aligned} a(a-b)X^2 &= (2Z+3\lambda+b)(\lambda+a)^3 \\ b(a-b)Y^2 &= -(2Z+3\lambda+a)(\lambda+b)^3. \end{aligned} \tag{2}$$

Durch eine einfache lineare Transformation von λ und Z gehen diese Gleichungen, wenn $a - b = 2\delta$ gesetzt wird, in

$$\begin{aligned} 2a\delta x^2 &= (2z+3\mu-\delta)(\mu+\delta)^3 \\ 2b\delta y^2 &= -(2z+3\mu+\delta)(\mu-\delta)^3 \end{aligned} \tag{3}$$

über, und die durch die Formeln (13) der Arbeit definirten Grössen p und q gestatten diese Coordinaten auch in *rationaler* Form darzustellen.

*) So wird, Kürze halber, die Fläche der Krümmungsmittelpunkte genannt.

Drückt man durch die Relationen, welche die Coordinaten des Paraboloids mit denen der Fläche der Centra verbinden, die ersteren durch die letzteren aus, so gehen die Gleichungen des Paraboloids und der confocalen Flächen in

$$(4)\quad \begin{aligned} &\frac{-\Omega(\lambda)}{(a+\lambda)^2(b+\lambda)^2} = \frac{aX^2}{(a+\lambda)^2} + \frac{bY^2}{(b+\lambda)^2} - 2T(Z+T\lambda) = 0, \\ &\text{und} \qquad \frac{aX^2}{(a+\lambda)^3} + \frac{bY^2}{(b+\lambda)^3} + T^2 = 0; \end{aligned}$$

oder in

$$(5)\quad \begin{aligned} &\frac{-\Omega(\mu)}{(\mu+\delta)^2(\mu-\delta)^2} = \frac{ax^2}{(\mu+\delta)^2} + \frac{by^2}{(\mu-\delta)^2} - 2(z+t\mu)t = 0, \\ &\text{und} \qquad \frac{ax^2}{(\mu+\delta)^3} + \frac{by^2}{(\mu-\delta)^3} + t^2 = 0 \end{aligned}$$

über. Die Bemerkung, dass von diesen beiden Formen die zweite die nach μ genommene partielle Ableitung der ersten ist, zeigt, dass das Eliminationsresultat von μ aus (5) mit der Discriminante von $\Omega(\mu)$ identisch ist. Diese ist aber in den Coordinaten x, y, z vom 16. Grade und da sie den Faktor $x^2y^2t^3$ absondert, folgt, dass der andere Faktor nämlich *die Fläche der Centra vom neunten Grade ist.* Andererseits zeigt das Verhältniss der beiden Gleichungen (4) zu einander, *dass die Fläche der Centra die Enveloppe der durch*

$$\frac{aX^2}{(a+\lambda)^2} + \frac{bY^2}{(b+\lambda)^2} - 2T(Z+T\lambda) = 0$$

dargestellten Paraboloidenschaar ist. Dieser Satz wird später (p. 188) dazu benutzt, die Gleichung der Fläche der Centra in Ebenencoordinaten ξ, η, ζ, ϑ zu erhalten, denn es folgt aus ihm, *dass die reciproke Polare der Fläche der Centra die Enveloppe der Paraboloidenschaar*

$$\frac{(a+\lambda)^2}{a}\xi^2 + \frac{(b+\lambda)^2}{b}\eta^2 - 2\zeta(\vartheta - \zeta\lambda) = 0$$

sei, woraus als Gleichung der Polarfläche sich ergiebt:

$$(6)\quad H(\xi,\eta,\zeta,\vartheta) = \xi^2\eta^2(a-b)^2 - 2\zeta\vartheta(b\xi^2+a\eta^2) - 2ab\zeta^2(\xi^2+\eta^2) - ab\zeta^4 = 0.$$

Die Fläche der Centra ist also neunten Grades und vierter Classe. Die erste der Gleichungen (5) bestimmt auch die fünf Normalen, welche von einem Punkte des Raumes an das elliptische Paraboloid gezogen werden können und zeigt in Verbindung mit der zweiten Gleichung, *dass von jedem Punkte der Fläche der Centra zwei dieser Normalen in eine zusammenfallen.* Dadurch ist die vorläufige Beziehung zum Normalenprobleme gegeben.

§ 2. Wie bemerkt, sind durch die Gleichungen (3) *beide* Schalen der Fläche der Centra dargestellt; sollen jene Gleichungen nur *eine* Schale charakterisiren, so schreibe ich für den Parameter μ den Buchstaben m. Substituirt man in $\Omega(\mu)$ für die Coordinaten die aus (3) hervorgehenden Werthe, nachdem man μ durch m ersetzt hat, so erhält man eine Gleichung in μ, m und z, welche für μ vom fünften Grade ist. Diese Gleichung erweist sich für die gesammte Untersuchung von fundamentaler Bedeutung, und um sie in einfachster Form zu erhalten, erwähnt die Arbeit eine zweite Erzeugungsweise der Fläche der Centra, welche für deren schliessliche Darstellung in Punktcoordinaten ebenfalls verwandt wird. Wie bekannt, lassen sich durch die Schnittcurve zweier Flächen zweiten Grades $\psi = 0$ und $\chi = 0$ vier Kegel zweiten Grades legen, deren Spitzen harmonische Pole der Fläche $\lambda\psi + \chi = 0$ sind. Bedeutet $\psi = 0$ das gegebene elliptische Paraboloid und $\chi = 0$ eine Kugel mit dem Mittelpunkte (X, Y, Z) und dem Radius r, so ergiebt sich für die die vier Kegelspitzen liefernde Gleichung vierten Grades:

$$\begin{aligned} &\overline{\Phi}(\lambda) = -\overline{f}(\lambda) + r^2\overline{\varphi}(\lambda) = 0 \\ (6)\quad &\overline{f}(\lambda) = \lambda\,\{(\lambda+b)X^2 + (\lambda+a)\,Y^2 - (2Z+\lambda)(\lambda+a)(\lambda+b)\}, \\ &\overline{\varphi}(\lambda) = \quad (\lambda+a)(\lambda+b). \end{aligned}$$

Hat $\overline{\Phi}(\lambda)$ zwei bezw. drei gleiche Wurzeln, wodurch das Verschwinden ihrer Discriminante, bezw. ihrer beiden Invarianten $\overline{I}_2$ und $\overline{I}_3$ bedingt wird, so berührt die Kugel das Paraboloid einfach bezw. stationär. In dem letztern Falle ist das Kugelcentrum ein Hauptkrümmungsmittelpunkt des Paraboloids. Es wird nun gezeigt, dass die die einfache bezw. stationäre Berührung ausdrückenden Bedingungen $\frac{d(r^2)}{d\lambda} = 0$ bezw. $\frac{d^2(r^2)}{d\lambda^2} = 0$, Gleichungen ergeben, welche mit (4) identisch sind. Jene Bedingungen, vorerst in μ statt in λ ausgedrückt, werden für diese Gleichungen benutzt und liefern, ohne erhebliche Rechnung, $\Omega(\mu)$ in folgender Form:

$$(7)\quad \begin{aligned} \Omega(\mu) = 2(\mu-m)^2\,\{\mu^3 + \mu^2(2m+z) + \mu(3m^2+2mz-2\delta^2) \\ -\delta^2(3z+4m)\} = 0. \end{aligned}$$

§ 3. Da das Eliminationsresultat von r^2 aus $\overline{I}_2 = 0$ und $\overline{I}_3 = 0$ die Fläche der Centra ohne überflüssigen Faktor ergiebt, und die genannten Gleichungen bezw. vom zweiten und dritten Grade in

r^2 sind, so erfordert die Aufstellung der gesuchten Fläche, das Eliminationsresultat aus einer Gleichung zweiten und einer dritten Grades in eine solche Form zu bringen, welche für den vorliegenden Fall keine weitere Graderniedrigung zulässt. Zu dem Ende werden einige Invariantenrelationen abgeleitet, mit deren Hilfe folgende Covariantenidentität bewiesen wird:

$$K_3^2 + \varDelta . C_3^2 \equiv - 16 S_2^3 . R. \tag{8}$$

Hierbei ist gesetzt:

$$S_2 = a_0 \xi^2 + 2 a_1 \xi \eta + a_2 \eta^2; \quad S_3 = b_0 \xi^3 + 3 b_1 \xi^2 \eta + 3 b_2 \xi \eta^2 + b_3 \eta^3;$$

$$\varDelta = a_0 a_2 - a_1^2; \; C_1 = (b_0 \xi + b_1 \eta) a_2 - 2 (b_1 \xi + b_2 \eta) a_1 + (b_2 \xi + b_3 \eta) a_0; \tag{9}$$

$$C_3 = 3 S_2 . C_1 - 4 S_3 . \varDelta;$$

$$K_3 = S_2 \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial S_2}{\partial \xi} & \frac{\partial C_1}{\partial \xi} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial S_2}{\partial \eta} & \frac{\partial C_1}{\partial \eta} \end{vmatrix} - 4 \varDelta \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial S_2}{\partial \xi} & \frac{1}{3} \frac{\partial S_3}{\partial \xi} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial S_2}{\partial \eta} & \frac{1}{3} \frac{\partial S_3}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

während R die Resultante von $S_2 = 0$ und $S_3 = 0$ bedeutet. Benutzt wird die Identität (8) nur für den speciellen Fall $\xi = 1$, $\eta = 0$. Transformirt man $\bar{\varPhi}(\lambda)$ in $\varPhi(\mu)$, was durch eine lineare Substitution mit der Determinante $+1$ geschieht, so wird $\bar{I}_2 = I_2$ und $\bar{I}_3 = I_3$, wobei unter I_2 und I_3 die Invarianten von $\varPhi(\mu)$ verstanden sind. Statt nun diese Invarianten direkt aus der Form von $\varPhi(\mu)$ herzustellen, welche die Coordinaten x, y, z enthält und dann die Elimination von r^2 vorzunehmen, benutze ich die Darstellung von $\varPhi(\mu)$ in m und z, drücke in diesen Parametern die aus (8) für $\xi = 1$, $\eta = 0$ hervorgehenden Bildungen aus, und weise nach, dass letztere sich in einfachster Weise aus drei Formen A, B^2 und Γ zusammensetzen lassen, welche sich aus Funktionen von m und z leicht in solche von x, y, z umformen lassen. Auf diese Weise findet man, wenn man mit S_2 und S_3 diejenigen Ausdrücke bezeichnet, die aus I_2 und I_3 hervorgehen, wenn man $r^2 - \varrho_0^2 = \varrho = \frac{\xi}{\eta}$ setzt und homogen macht:

$$S_2 = \xi^2 - 12 \xi \eta B;$$

$$S_3 = - \xi^3 + 18 \xi^2 \eta (B - 3 \delta^2) - 54 \xi \eta^2 (m^2 - \delta^2)(z + 2m)^2; \tag{10}$$

$$B = m^2 + mz + \delta^2.$$

Bezeichnet man den Factor von S_2 in K_3, nachdem man $\xi = 1$, $\eta = 0$ gesetzt hat, mit $3 . 6^2 . A$, so ergiebt sich:

$$K_3 = 3 . 6^2 (A - 24 B^2 \delta^2); \quad C_3 = 18 \Gamma \xi^3;$$

$$\Gamma = 4 B^2 - 3 \sigma B \delta^2 - 3 (m^2 - \delta^2)(z + 2m)^2,$$

wobei $\Gamma = 0$ die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass S_2 Factor von S_3 sei. Ferner erhält man:

$$B\Gamma = A - 24B^2\delta^2.$$

Nachdem noch gezeigt ist, dass B^2, Γ und $B\Gamma$ rationale und ganze Funktionen von x, y, z sind, werden für dieselben die folgenden Werthe gefunden:

$$(11) \quad \begin{aligned} 6B^2 &= zS + 2\delta D - 2\delta^2(z^2 - 4\delta^2) = V, \\ 6\Gamma &= zS - 16\delta D + 16\delta^2(z^2 - 13\delta^2) = W, \\ -8B\Gamma &= S^2 - 4z^2\delta D + 16\delta^2(zS + 4\delta D) - 64\delta^4(z^2 - 5\delta^2) = U, \\ S &= ax^2 + by^2, \quad D = ax^2 - by^2, \end{aligned}$$

woraus die Fläche der Centra

$$(12) \qquad F(x, y, z) = 27U^2 - 8VW^2 = 0$$

hervorgeht. Da U vom vierten, V und W vom dritten Grade sind, ergiebt sich $F = 0$ als Oberfläche neunten Grades. Hiermit schliesst der erste Theil der Arbeit.

In dem zweiten Theile wird die Discussion der Fläche $F = 0$ gegeben und dieselbe durch die Untersuchung der binären Form $\Omega(\mu) = 0$ geleistet. Es werden der Reihe nach die Punkte aufgestellt, von denen aus von den fünf an das Paraboloid zu ziehenden Normalen drei, zweimal zwei, einmal zwei und einmal drei, endlich vier Normalen in eine einzige zusammenfallen, und die Bedeutung dieser Punkte für $F = 0$ untersucht.

§ 4. Auf der Fläche der Centra giebt es ausser der unendlich entfernten Ebene, welche längs dreier Geraden osculirt, sechs singuläre Ebenen, welche die Fläche in einer Parabel osculiren und in einer Curve dritten Grades (Parabelevolute) schneiden. Von jedem Punkte der sechs Parabeln und von allen Punkten der unendlich entfernten Ebene fallen drei Normalen in eine zusammen.

Von den sechs singulären Ebenen sind zwei reell und vier imaginär; ich unterscheide sie als singuläre Tangentialebenen erster und zweiter Art. Die in je einer dieser Ebenen liegenden Parabeln und Curven dritten Grades schneiden sich in zwei Punkten und berühren sich in zwei andern. Ferner berühren in jeder der beiden singulären Tangentialebenen erster Art zweimal zwei Kegelschnitte zweiter Art in zwei Punkten einander und den in der singulären Tangentialebene erster Art gelegenen Kegelschnitt. Die beiden gemeinschaftlichen Tangenten in den Berührungspunkten der Kegelschnitte sind die Durchschnittslinien von zweimal zwei singulären Tangentialebenen

zweiter Art und zugleich die gemeinschaftlichen Tangenten jedes Kegelschnitts in den Berührungspunkten mit der in seiner Ebene liegenden Curve dritten Grades. Die vier singulären Tangentialebenen zweiter Art schneiden sich in einem Punkte, welcher auf der Schnittlinie der beiden singulären Tangentialebenen erster Art liegt. Längs der vier singulären Kegelschnitte zweiter Art durchschneiden sich die beiden Schaalen der Fläche der Centra unter rechtem Winkel.

§ 5. Von jedem Punkte der beiden in den singulären Tangentialebenen erster Art liegenden Curven dritten Grades und von jedem Punkte der durch $U = 0$, $W = 0$ oder $\Gamma = 0$ dargestellten Doppelcurve der Fläche der Centra fallen zweimal zwei Normalen zusammen. Ferner giebt es zwölf Punkte, von denen einmal zwei und einmal drei Normalen in je eine zusammenfallen. Von diesen zwölf Punkten sind zwei die Rückkehrpunkte der in den beiden singulären Tangentialebenen erster Art liegenden Curven dritten Grades, und zugleich die Berührungspunkte der Schnittlinie jener beiden Ebenen mit diesen Curven. Diese zwölf Punkte sind die Schnittpunkte jedes der sechs singulären Kegelschnitte erster und zweiter Art mit derjenigen Curve dritten Grades, welche mit ihm in derselben singulären Tangentialebene liegt. Von zwei Geraden der Fläche der Centra und vier Punkten fallen vier Normalen in eine zusammen. Die zwei Geraden sind die conjugirt imaginären Graden, längs deren die unendlich entfernte Ebene die Fläche der Centra osculirt; und die vier Punkte sind diejenigen, in welchen die singulären Kegelschnitte die in ihren Ebenen liegenden Curven dritten Grades berühren.

§ 6. Die durch den Schnitt von $U = 0$ und $W = 0$ dargestellte Doppelcurve *zwölften* Grades besitzt *sieben* Doppelpunkte und *zwölf* Rückkehrpunkte, die gleichzeitig die sieben Doppelpunkte von $U = 0$ und die zwölf Berührungspunkte von $U = 0$ mit $W = 0$ sind. Andererseits sind die zwölf Rückkehrpunkte auch identisch mit den zwölf Punkten, in welchen die sechs singulären Kegelschnitte die mit ihnen in derselben singulären Tangentialebene liegenden Curven dritten Grades schneiden. Die vier Berührungspunkte dieser Curven sind vier von den sieben Doppelpunkten der Doppelcurve, während die drei übrigen Doppelpunkte die Schnittpunkte der drei Geraden sind, in welchen die unendlich entfernte Ebene die Fläche der Centra osculirt. Wegen der genannten Anzahl von Doppel- und Rückkehrpunkten ergiebt sich das *Geschlecht* der

Doppelcurve als *Null*. Daraus folgt, dass die Coordinaten dieser Curve, die sich als irreductibeler Durchschnitt zweier Flächen dritten und vierten Grades ergiebt, sich als *rationale* Functionen eines Parameters darstellen lassen. In der That erhält man bei Anwendung homogener Coordinaten als Gleichung der Doppelcurve:

$$(13)\qquad \begin{aligned} \sqrt{a}\,x &= 2\delta\sqrt{\delta}\,(r^2+l^2)^3(r^4-4r^2l^2+l^4)\,rl,\\ \sqrt{b}\,y &= 2\delta\sqrt{\delta}\,(r^2-l^2)^3(r^4+4r^2l^2+l^4)\,rl,\\ 2z &= \delta\,\{32r^4l^4-(r^4+l^4)^2\}(r^4+l^4),\\ t &= r^2l^2(r^4+l^4)^2. \end{aligned}$$

und für die abwickelbare reciproke Polarfläche ergiebt sich:

$$(14)\qquad \begin{aligned} \xi &= -\sqrt{a}\,(r^4-4r^2l^2+l^4)(r^2+l^2),\\ \eta &= -\sqrt{b}\,(r^4+4r^2l^2+l^4)(r^2-l^2),\\ \zeta &= 8\sqrt{\delta}\,r^3l^3,\\ \vartheta &= 12\delta\sqrt{\delta}\,(r^4+l^4)\,rl. \end{aligned}$$

Aus je dreien der die Ordnung, Classe, Geschlecht, Anzahl der Doppel- und Rückkehrpunkte angebenden Zahlen, folgen die anderen Charakteristiken der Doppelcurve, wie sie in der Arbeit erwähnt sind.

§ 7. Die in (6) angegebene zu $F=0$ reciproke polare Fläche $H=0$ besitzt sechs Doppelpunkte und einen triplanaren Punkt, womit ich einen solchen Punkt als dreifachen bezeichne, dessen Osculationskegel dritten Grades in drei Ebenen degenerirt. Diese Singularitäten reichen hin, um die Classe von $H=0$ oder die Ordnung von $F=0$ von 36 auf 9 zu reduciren.

Berlin. F. Caspary.

G. Escherich: Ableitung des allgemeinen Ausdruckes für das Krümmungsmaass der Flächen. (Grunert's Archiv. 57. Theil. 1875.)

Gauss entwickelt in den „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ zuerst den Ausdruck für das Krümmungsmaass unter der Voraussetzung die Gleichung der Fläche habe die Form $z=f(x,y)$, transformirt dann die so erhaltene Formel in die Variablen p,q und zeigt, dass sich dieselbe durch die alleinigen Grössen E,F,G darstellen lasse. Bei dieser Transformation sind die schleppenden Rech-

nungen des art. 10 nicht zu umgehen und ich versuchte deshalb in der genannten Abhandlung den Ausdruck Gauss' direkt zu entwickeln.

Sind p,q die Coordinaten eines Punktes der Fläche, $p'q'$ die entsprechenden der Kugel, so ist das Krümmungsmaass*)

$$k = \frac{\partial p'}{\partial p}\frac{\partial q'}{\partial q} - \frac{\partial p'}{\partial q}\frac{\partial q'}{\partial p}$$

Hieraus findet man durch eine leichte Rechnung

$$k(EG - F^2) = \begin{vmatrix} A\,, & B\,, & C \\ \frac{\partial A}{\partial p}\,, & \frac{\partial B}{\partial p}\,, & \frac{\partial C}{\partial p} \\ \frac{\partial A}{\partial q}\,, & \frac{\partial B}{\partial q}\,, & \frac{\partial C}{\partial q} \end{vmatrix}$$

Die rechts stehende Determinante 3. Grades lässt sich aber in

$$\begin{vmatrix} A\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial p^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}\,, & A\frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q} + B\frac{\partial^2 y}{\partial p\,\partial q} + C\frac{\partial^2 z}{\partial p\,\partial q} \\ A\frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q} + B\frac{\partial^2 y}{\partial p\,\partial q} + C\frac{\partial^2 z}{\partial p\,\partial q}\,, & A\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial q^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial q^2} \end{vmatrix}$$

verwandeln, welche selbst wieder, wie man sogleich erkennt, sich durch eine Determinante 6. Grades darstellen lässt, sodass

$$k(EG - F^2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p}, & \frac{\partial x}{\partial q}, & \frac{\partial^2 x}{\partial p^2}, & \frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q}, & 0, & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial p}, & \frac{\partial y}{\partial q}, & \frac{\partial^2 y}{\partial p^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial p\,\partial q}, & 0, & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial p}, & \frac{\partial z}{\partial q}, & \frac{\partial^2 z}{\partial p^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial p\,\partial q}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q}, & \frac{\partial^2 x}{\partial q^2}, & \frac{\partial x}{\partial p}, & \frac{\partial x}{\partial q} \\ 0, & 0, & \frac{\partial^2 y}{\partial p\,\partial q}, & \frac{\partial^2 y}{\partial q^2}, & \frac{\partial y}{\partial p}, & \frac{\partial y}{\partial q} \\ 0, & 0, & \frac{\partial^2 z}{\partial p\,\partial q}, & \frac{\partial^2 z}{\partial q^2}, & \frac{\partial z}{\partial p}, & \frac{\partial z}{\partial q} \end{vmatrix}$$

wird.

Multiplicirt man die vierte, fünfte und sechste Zeile dieser Determinante mit -1 und die derart transformirte mit der ursprünglichen, so erhält man für $[k(EG - F^2)]^2$ eine „Determinante gauche", deren jedes Element durch die alleinigen Grössen E,F,G sich ausdrücken lässt. Die positive Quadratwurzel der Determinante gauche gibt dann $k(EG - F^2)$, also k nur durch E,F,G ausgedrückt.

Graz. G. Escherich.

*) Ich gebrauche durchwegs die Bezeichnungen der Disquisitiones generales.

G. Escherich: Beiträge zur Bildung der symmetrischen Functionen der Wurzelsysteme und der Resultante simultaner Gleichungen. (Denkschriften der k. Akademie in Wien. Bd. XXXVI, 1876.)

Eine kleine Vereinfachung in den Methoden, welche von Cauchy und Abel Transou zur Berechnung der symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung aufgestellt wurden, führten zu einem Analogon derselben in der Theorie der simultanen Gleichungen.

Es seien

$$f_1(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0, f_2(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0 \ldots f_n(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0$$

simultane Gleichungen mit den Unbekannten $x_1, x_2 \ldots x_n$. Ihre Endgleichungen

$$F_1(x_1) = 0, F_2(x_2) = 0 \ldots F_n(x_n) = 0$$

nach $x_1, x_2 \ldots x_n$ seien vom Grade μ und besässen bezüglich die Wurzelsysteme

$$\begin{array}{c} \alpha_1^1, \alpha_1^2 \ldots \alpha_1^\mu \\ \alpha_2^1, \alpha_2^2 \ldots \alpha_2^\mu \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_\mu^1, \alpha_n^2 \ldots \alpha_n^\mu \end{array}$$

Bezeichnet dann $D(x_1, x_2 \ldots x_n)$ die Functionaldeterminante von $f_1, f_2 \ldots f_n$, so besteht, wie Jacobi bei dem Falle zweier Gleichungen schon zeigte, stets eine Function $\Phi(x_1, x_2 \ldots x_n)$, welche keine Wurzeln der Gleichungen enthält und für welche

$$\frac{\Phi(x_1, x_2 \ldots x_n)}{F_1 F_2 \ldots F_n} = \sum_{k=1}^{\mu} \frac{1}{D(\alpha_1^k, \alpha_2^k \ldots \alpha_n^k)(x_1 - \alpha_1^k)(x_2 - \alpha_2^k) \ldots (x_n - \alpha_n^k)}$$

Um nun die λ-förmige symmetrische Funktion

$$\sum_{h_1, h_2 \ldots h_\lambda} \Psi(\alpha_1^{h_1}, \alpha_2^{h_1} \ldots \alpha_n^{h_1}; \ \ldots \ \alpha_1^{h_\lambda}, \alpha_2^{h_\lambda} \ldots \alpha_n^{h_\lambda})$$

welche durchaus nicht ein einfachster Typus sein muss, zu berechnen, subtrahire man von beiden Seiten der obigen Gleichung $(\lambda - 1)$ z. B. die $(\lambda - 1)$ ersten Glieder der Summe rechts; dadurch ergibt sich:

$$\frac{\Phi(x_1, x_2 \ldots x_n)}{F_1(x_1) F_2(x_2) \ldots F_n(x_n)} - \sum_{k=1}^{\lambda-1} \frac{1}{D(\alpha_1^k, \alpha_2^k \ldots \alpha_n^k)(x_1 - \alpha_1^k)(x_2 - \alpha_2^k) \ldots (x_n - \alpha_n^k)}$$

$$= \sum_{k=\lambda}^{\mu} \frac{1}{D(\alpha_1^k, \alpha_2^k \ldots \alpha_n^k)(x_1 - \alpha_1^k) \ldots (x_n - \alpha_n^k)}.$$

Multiplicirt man in dieser Gleichung den Ausdruck links mit

$$\Psi\left(\alpha_1^1, \alpha_2^1 \dots \alpha_n^1; \dots \alpha_1^{\lambda-1}, \alpha_2^{\lambda-1} \dots \alpha_n^{\lambda-1}; x_1, x_2 \dots x_n\right) D\left(x_1, x_2 \dots x_n\right),$$

und bezeichnet in der Entwicklung des so gefundenen Productes nach fallenden Potenzen der x den Coëfficienten von $(x_1\ x_2 \dots x_n)^{-1}$, welcher eine Function der Wurzeln $\alpha_1^1, \alpha_2^1 \dots \alpha_n^{\lambda-1}$ sein wird, mit $\psi\left(\alpha_1^1, \alpha_2^1 \dots \alpha_n^{\lambda-1}\right)$, so ist die $(\lambda-1)$förmige symmetrische Function:

$$\sum_{h_1, h_2 \dots h_{\lambda-2}} \psi\left(\alpha_1^{h_1}, \alpha_2^{h_1} \dots \alpha_n^{h_1}; \dots \alpha_1^{h_{\lambda-1}}, \alpha_2^{h_{\lambda-1}} \dots \alpha_n^{h_{\lambda-1}}\right)$$

gleich der gegebenen λ-förmigen, also die Berechnung dieser auf die jener zurückgeführt.

Das auseinandergesetzte Verfahren lässt in manchen Fällen erhebliche Vereinfachungen zu, so auch bei den einfachsten Typen der symmetrischen Functionen. Denn dann erlauben die Sätze Schlaefli's und Betti's über den Grad, das totale und partiale Gewicht bei symmetrischen Functionen, schon während der Ausführung der Rechnungen Glieder zu vernachlässigen. Auch für den Fall, dass die gegebene symmetrische Function von der Form:

$$\psi\left(\alpha_1^1, \alpha_2^1 \dots \alpha_n^1\right) \psi\left(\alpha_1^2, \alpha_2^2 \dots \alpha_n^2\right) \dots \psi\left(\alpha_1^\mu, \alpha_2^\mu \dots \alpha_n^\mu\right)$$

ist, lässt sich die Rechnung erleichtern. Dies führt zur allgemeinen logarithmischen Berechnungsweise der Resultante, der sich im Falle zweier Gleichungen schon Lagrange bedient hatte.

Die Eigenschaften der Function Φ legen noch ein anderes Verfahren zur Berechnung der symmetrischen Functionen nahe, das gewissermassen ein Analogon zur Methode Borchardt's für die Berechnung der symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung bildet. In der

$$\sum \frac{1}{(t_1^1-\alpha_1^1)(t_2^1-\alpha_2^1)\cdots(t_n^1-\alpha_n^1)(t_1^2-\alpha_1^2)(t_2^2-\alpha_2^2)\cdots(t_n^2-\alpha_n^2)\cdots\cdots(t_1^\mu-\alpha_1^\mu)(t_2^\mu-\alpha_2^\mu)\cdots(t_n^\mu-\alpha_n^\mu)}$$

welche ausser dem angeschriebenen noch alle Glieder umfassen soll, die aus ihm durch alle möglichen Vertauchungen der simultanen Wurzelsysteme erhalten werden, sind nämlich die Coëfficienten in ihrer Entwickelung nach fallenden Potenzen der t gleich den Coëfficienten, welche in der analogen Entwickelung von

$$\frac{D\left(t_1^1, t_2^1 \dots t_n^1\right) \dots D\left(t_1^\mu, t_2^\mu \dots t_n^\mu\right) \Phi\left(t_1^1, t_2^1 \dots t_n^1\right) \dots \Phi\left(t_1^\mu, t_2^\mu \dots t_n^\mu\right) \Pi^2\left(t_1^1, t_2^1 \dots t_1^\mu\right)}{F_1\left(t_1^1\right) F_2\left(t_2^1\right) \dots F_n\left(t_n^1\right) \dots F_1\left(t_1^\mu\right) F_2\left(t_2^\mu\right) \dots F_n\left(t_n^\mu\right) \Pi^2\left(\alpha_1^1, \alpha_1^2 \dots \alpha_1^\mu\right)}$$

— wo Π nach Jacobi das Differenz-Product bezeichnet —, zu dem-

selben Producte der t gehören. Der letztere Ausdruck besitzt aber, da $\Pi^2 (\alpha_1^1, \alpha_1^2 \ldots \alpha_1^\mu)$, als die Discriminante von $F_1(x_1) = 0$ sich durch die Coëfficienten von F_1 ausdrücken lässt, in seinen Entwicklungs-Coëfficienten keine Wurzeln der vorgelegten Gleichungen.

Schliesslich wird in der Abhandlung aus der Formel Jacobi's, welche derselbe seiner Lösung des Cramer'schen Paradoxons zu Grunde legte, durch passende Specialisirung jene Relation Liouville's abgeleitet, welche dieser durch sein Eliminations-Verfahren erhielt und aus welcher er durch einen Uebergang von $(n + 1)$ zu n Dimensionen die Jacobi'sche folgerte. Es wird gezeigt, dass sich aus dieser Liouville'schen Formel mittelst der gewöhnlichen Regeln allle Resultate gewinnen lassen, zu welchen Liouville durch sein Eliminations-Verfahren gelangte, so dass im Grunde die merkwürdige Formel Jacobi's die Quelle ist, aus der auch Liouville's Eliminations-Methode fliesst.

Graz. G. Escherich.

M. Allé: Ein Beitrag zur Theorie der Functionen von drei Veränderlichen. (Sitzb. d. kais. Acad. d. W. in Wien. Bd. LXXII. Juniheft 1875).

Um die Theorie der Functionen dreier Veränderlichen in ähnlicher Weise geometrisch zu interpretiren, wie dies für Functionen von 2 Veränderlichen zu geschehen pflegt, werden als Hauptmomente der Betrachtung die Anordnung der Functionswerthe und die Aenderung derselben beim Uebergange von einem Punkte des Raumes zu einem beliebigen Nachbarpunkte ins Auge gefasst.

Durch Einführung von Niveauflächen wird die Betrachtung von 3fach unendlich vielen Functionswerthen auf die Betrachtung einfach unendlich vieler Niveauflächen zurückgeführt; Form und Aufeinanderfolge der Niveauflächen vervollständigt das geometrische Bild einer Function dreier Veränderlichen.

In dieser Hinsicht kommt für jeden Punkt des Raumes zunächst die Steigung der Fuuction nach irgend einer mit r bezeichneten Richtung in Betracht, welche für die beiden Normalenrichtungen der durch diesen Punkt gelegten Niveaufläche beziehungsweise ein Maximum oder Minimum ist, während sie für alle in die

Tangentialebene dieses Punktes der Niveaufläche fallenden Richtungen verschwindet.

Der absolute Betrag der Maximal- oder Minimal-Steigung wird durch die positive Quadratwurzel

$$\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}=h$$

bestimmt und die Steigung nach irgend einer Richtung erscheint als Projection der Maximal- oder Minimal-Steigung auf diese Richtung.

Mit Hülfe zweier Kugeln vom Durchmesser h, welche die Niveaufläche eines Raumpunktes in diesem beiderseits berühren, wird die Steigung nach irgend einer von diesem Punkte ausgehenden Richtung dem absoluten Werthe nach durch das innerhalb einer dieser Kugeln auf dieser Richtung liegende Segment dargestellt.

Um das Gesetz, welches die Werthe des Differentialquotienten $\frac{d^2u}{dr^2}$ für alle von einem bestimmten Punkte ausgehenden Richtungen verbindet, mit einem Male zu überschauen, wird für jede Richtung ein von dem festen Punkte ausgehender Fahrstrahl R construirt, so dass

$$\frac{d^2u}{dr^2}=\pm\frac{1}{R^2}$$

je nachdem

$$\frac{d^2u}{dr^2}\gtrless 0$$

ist.

Der geometrische Ort der Endpunkte aller dieser Fahrstrahlen ist durch die Gleichung

$$3)\qquad \pm 1 = AX^2+BY^2+CZ^2+2\alpha YZ+2\beta ZX+2\gamma XY$$

bestimmt, in welcher die Coëfficienten der von dem festen Punkte gerechneten Coordinaten XYZ des Fahrstrahl-Endes die auf diesen Punkt bezogenen Derivirten zweiter Ordnung bedeuten.

Die Unterscheidung der hier zu betrachtenden Fälle wird durch die Natur des Asymptoten- oder charakteristischen Kegels von 3) bedingt, der reell oder imaginär ausfällt, je nachdem

$$4)\qquad D=(\beta^2-AC)(\gamma^2-AB)-(\beta\gamma-\alpha A)^2\lesseqgtr 0$$

wobei der Zwischenfall $D=0$, welchem ein Zerfallen dieses Kegels in ein reelles oder imaginäres Ebenenpaar entspricht, eine besondere Beachtung verdient.

Wird 3) als Gleichung der charakteristischen Fläche des zweiten Differentialquotienten bezeichnet, so liefert die Betrachtung der einzelnen Fälle folgende Ergebnisse.

Die charakteristische Fläche ist für

a) $D < 0$ ein System von zwei conjugirten Hyperboloiden und die Seiten des gemeinschaftlichen reellen charakteristischen Kegels bezeichnen jene Richtungen, nach welchen der zweite Differentialquotient mit Zeichenwechsel verschwindet.

b) $D > 0 \quad AB - \gamma^2 > 0$ ein dreiaxiges Ellipsoid mit imaginärem charakteristischem Kegel, dessen Spitze allein reell ist, und der zweite Differentialquotient kann das Zeichen nicht ändern, weil er für keine reelle Richtung verschwindet.

c) $D = 0 \quad AB - \gamma^2 < 0$ ein System von zwei conjugirten hyperbolischen Cylindern mit gemeinschaftlicher Axe. Die beiden reellen Ebenen, in welche der charakteristische Kegel zerfällt, schneiden sich in dieser Axe. Der zweite Differentialquotient verschwindet mit Zeichenwechsel, so oft eine Richtung in eine der beiden Ebenen fällt.

d) $D = 0 \quad AB - \gamma^2 < 0$ ein elliptischer Cylinder. Axe desselben ist die reelle Schnittlinie des imaginären Ebenenpaares, in welches der charakteristische Kegel ausartet. Der zweite Differentialquotient ändert das Zeichen nicht.

e) $D = 0$ weil $AB - \gamma^2 = 0 \quad AC - \beta^2 = 0 \quad \beta\gamma - \alpha A = 0$ ein System von zwei parallelen Ebenen die zu beiden Seiten des Ausgangspunktes von demselben gleichen Abstand besitzen. Der charakteristische Kegel ist in eine durch den Ausgangspunkt gehende reelle und doppelt zu zählende Ebene ausgeartet, welche mit den beiden früher genannten parallel ist. Der zweite Differentialquotient ändert das Zeichen nicht und verschwindet für jede Richtung welche durch den Ausgangspunkt gehend in die doppelte Ebene fällt.

Eine andere geometrische Construction des zweiten Differentialquotienten einer Function dreier Veränderlichen nach einer beliebigen Richtung erhält man, wenn derselbe direct als Fahrstrahl ϱ einer Fläche dargestellt wird. Setzt man nämlich

$$\pm \frac{d^2 u}{d r^2} = \varrho,$$

so erhält man bei passender Wahl der Axen als Gleichung dieser Fläche

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)^3 = (A_0 X^2 + B_0 Y^2 + C_0 Z^2)^2$$

dieselbe Gleichung, durch welche Plücker die Hauptparameter der linearen Complexe einer dreigliedrigen Gruppe dargestellt hat.

Zum Schlusse wird die Bedeutung der Singularitäten der Niveauflächen berührt.

Graz. M. Allé.

M. Allé: Zur Theorie des Gauss'schen Krümmungsmasses. (Sitzb. d. kais. Acad. d. W. in Wien. B. LXXIV. Juniheft 1876.)

Wenn für einen Punkt einer Oberfläche die Indicatrix eine Ellipse ist, so kann das Krümmungsmass für diesen Punkt durch die Fläche dieser Ellipse und durch die Fläche der Indicatrix einer Kugel vom Halbmesser 1, welche die Oberfläche in dem betrachteten Punkte berührt, ausgedrückt werden.

Bezeichnet man nämlich das Krümmungsmass mit k und die beiden der Oberfläche und der Kugel im Berührungspunkte entsprechenden Indicatrix-Flächen oder ihre Projectionen auf die XY-Ebene bezüglich mit E und K, so ist

$$1) \qquad k = \left(\frac{K}{E}\right)^2.$$

Für eine dreifache ebene Mannigfaltigkeit existirt ein geometrisches Gebilde welches vollständig die Stelle der auf die XY-Ebene projicirten Indicatrix spielt.

Es ist dies eine centrische Fläche 2. Ordnung, und wenn man in dem Falle als dieselbe ein Ellipsoid ist, das Volumen desselben wieder mit E und das Volumen jenes Ellipsoides, welches an die Stelle der früheren Kugel-Indicatrix-Projection tritt, mit K bezeichnet, so wird für eine solche dreifache ebene Mannigfaltigkeit das Krümmungsmass wieder durch 1) ausgedrückt, oder wenn man die beiden Volumina durch dreifache Integrale darstellt, so erscheint die Quadratwurzel aus dem Krümmungsmasse in diesem Falle als das Verhältniss zweier dreifachen Integrale. Ebenso kann das Krümmungsmass einer n fachen ebenen Mannigfaltigkeit, welche durch die Gleichung $u = f(x_1\, x_2 \cdots x_n)$ aus einer $n+1$ fachen Mannigfaltigkeit ausgeschieden wird für den Fall als die aus den partiellen Derivirten der zweiten Ordnung von f gebildete quadratische Form durch eine Summe positiver Quadrate darstellbar ist durch das Ver-

hältniss zweier $n$fachen Integrale ausgedrückt werden und ergibt sich dabei diejenige Gleichung, welche die Verallgemeinerung des Begriffes der Hauptkrümmungen enthält.

Graz. M. Allé.

M. Allé: Ueber die Bewegungsgleichungen eines Systems von Punkten. (Sitzb. d. kais. Acad. d. W. in Wien. Bd. LXXIII. Januarheft 1876.)

Unter der Voraussetzung, dass die Kräftefunction von den Coordinaten der bewegten Punkte und der expliciten Zeit abhängt, dagegen die Componenten der Geschwindigkeiten nicht enthält, können die Bewegungsgleichungen eines Systems von Punkten auf eine Form gebracht werden, welche in dem einfachsten Falle eines einzigen Punktes mit einer Kräftefunction die *nur* die Coordinaten enthält, mit der von Lamé in seinen „Leçons sur les coordonnés curvilignes" (1859 pag. 168) angegebenen Form zusammenfällt.

Den Ausgangspunkt für die Ableitung bildet die Lagrange'sche Form der Bewegungsgleichungen und wenn die allgemeinen Coordinaten, welche die Lage des Systems bestimmen mit q_i bezeichnet werden, T die lebendige Kraft vorstellt, $p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i}$ gesetzt wird, wenn dann die $q'_i = \frac{d q_i}{dt}$ als Functionen der q_i sowohl als der expliciten Zeit aufgefasst werden und das Integral der Lagrange'schen Gleichungen, welches an die Stelle des Princips der lebendigen Kraft tritt durch

$$T - U = \varpi \tag{1}$$

dargestellt wird, wo U die Kräftefunction und

$$\varpi = -\int \frac{\partial U}{\partial t}\, dt \tag{2}$$

so werden die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial \varpi}{\partial q_i} = \sum_j \left(\frac{\partial p_j}{\partial q_i} - \frac{\partial p_i}{\partial q_j} \right) q'_j. \tag{3}$$

Sie werden erfüllt durch die beiden Systeme von Gleichungen

$$p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \qquad \frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial \varpi}{\partial q_i}, \tag{4}$$

wo φ eine zu bestimmende Function der q_i und von t ist, für welche man aus 4) die bekannte partielle Differentialgleichung findet, von welcher Hamilton die Lösung mechanischer Probleme gemacht hat, und die Gleichungen 4) werden durch einige Transformationen in die bekannte canonische Form der Bewegungsgleichungen übergeführt.

Die Einführung gewöhnlicher krummliniger Coordinaten zeigt dann die Bedeutung des ersten Systemes der Gleichungen 4).

Wählt man nämlich statt der Coordinaten q_i krummlinige Coordinaten von der Art, dass jeder Punkt des Raumes als Durchschnitt dreier Flächen

$$\varrho_1 = f_1(x, y, z) \qquad \varrho_2 = f_2(x, y, z) \qquad \varrho_3 = f_3(x, y, z)$$

dargestellt wird, so sind die Grössen

$$\frac{\partial p_2}{\partial \varrho_3} - \frac{\partial p_3}{\partial \varrho_2} \qquad \frac{\partial p_3}{\partial \varrho_1} - \frac{\partial p_1}{\partial \varrho_3} \qquad \frac{\partial p_1}{\partial \varrho_2} - \frac{\partial p_2}{\partial \varrho_1}$$

proportional der Drehungsgeschwindigkeiten um die Normalen der 3 Flächen im Durchschnittspunkte, daher das 1. System der Gleichungen 4) ausdrückt, dass der betrachteten Bewegung ein Geschwindigkeitspotenzial zukomme.

Graz. M. Allé.

G. Biasi: Il calcolo sulle incognite delle equazioni algebriche — Studî analitici —. 84 pag. in 8^0 (Verona, H. F. Münster 1876).

L'impossibilità di risolvere algebricamente le equazioni di grado superiore al quarto da una parte, e la possibilità di determinare con ogni approssimazione le radici di una equazione a coefficienti numerici dall' altra, mi condussero a studiare la teoria delle equazioni algebriche sotto un altro punto di vista.

Considerando le radici delle equazioni come risultati di operazioni numeriche, le incognite delle equazioni stesse possono essere trattate come funzioni semplici dei coefficienti; le quali, espresse con simboli adatti, possono sostituire le espressioni generali, che si cercano colla risoluzione algebrica, ove su quelle funzioni si possano eseguire i calcoli, che si sogliono effettuare sulle funzioni algebriche. La risoluzione delle equazioni può dunque essere sostituita dal seguente problema: stabilire le regole per il calcolo delle incognite considerate come funzioni semplici dei coefficienti.

Il problema, nella sua massima generalità, consisterebbe nel determinare i coefficienti dell' equazione:

$$F(z) = 0,$$

essendo z una funzione algebrica qualunque delle incognite $x_1, x_2, \ldots.$ di date equazioni algebriche:

$$f_1(x_1) = 0, \quad f_2(x_2) = 0, \ldots\ldots.$$

Le trasformazioni, che hanno per iscopo di eseguire sopra l'incognita d'una equazioni una determinata operazione, ne sono un caso particolare.

Limitando il problema generale ai casi fondamentali:

$$z = x_1 \pm x_2, \qquad z = x_1\, x_2^{\pm 1}, \qquad z = x_1^{\pm x_2^{\pm 1}},$$

le note relazioni fra i coefficienti d'una equazione e le somme delle potenze simili delle sue radici offrono un mezzo elementare di risolvere il problema stesso. Se non che la complicazione eccessiva dei calcoli rende un tal metodo inopportuno nei casi particolari, e inadatto a stabilire la forma generale dell' equazione che dà il risultato dell' operazione.

Un metodo più semplice per la formazione dell' equazione che dà la differenza delle incognite di due equazioni proposte (onde si ottiene anche l'equazione per la somma) si ha coll' uso del risultante delle due equazioni e dell' operazione differenziale:

$$\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b} + \cdots\cdots + \frac{\partial}{\partial l},$$

dove $a, b, \ldots. l$ denotano le radici di una delle equazione proposte. Un' altra forma generale della stessa equazione avrebbe i coefficienti della forma:

$$\sum \sigma f^{p\,r\ldots}_{\pi\,\varrho\ldots},$$

dove il simbolo $\sigma f^{p\,r\ldots}_{\pi\,\varrho\ldots}$ indica una funzione simmetrica delle radici facilmente esprimibile per mezzo dei coefficienti. Quest' ultima forma presenta il vantaggio di poter determinare nel modo più completo il numero delle radici comuni alle due equazioni, distinguendo tutti i gruppi di radici eguali.

I differenti termini del risultante, aggruppati secondo i loro gradi rispetto alle radici, offrono invece i coefficienti della equazione, che dà il quoziente delle incognite. Anche quessa equazione ci somministra dei criterî per riconoscere l'esistenza di radici comuni alle due equazioni; i quali se danno una soluzione del problema

meno completa di quella fornitaci dall' equazione precedente ed hanno lo svantaggio di contenere dei fattori superflui, sono però di più facile applicazione.

Nel caso particolare delle equazioni binomie, denotando con δ e con M rispettivamente il massimo divisore e il minimo multiplo comuni ai numeri m e μ, si trova facilmente che la somma $\sqrt[m]{A} + \sqrt[\mu]{B}$ è una radice δ^{ma}, il cui radicando dipende da un' equazione di grado M, e che il prodotto $\sqrt[m]{A} \cdot \sqrt{B}$ ha M valori distinti ripetuti δ volte.

Applicando i principî precedentemente esposti alla risoluzione algebrica delle equazioni, ottenni per l'incognita dell' equazione di secondo grado le forme:

$$x = A + \sqrt{B}, \quad x = (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2,$$

e per quella della cubica, la forma:

$$x = A + (\sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C})^3,$$

dove A dipende dai coefficienti per mezzo d'una equazione lineare e B, C sono le due radici d'una equazione quadratica. L'equazione di quarto grado, per mezzo della sostituzione $z = x^2 - \vartheta x$, ha una risoluzione della forma:

$$z = A + B,$$

dove A e B sono le incognite di due equazioni di secondo grado. Se poi l'equazione del quarto grado manca del secondo e del quarto termine, la sua incognita si può determinare direttamente nella forma:

$$x = \sqrt{A} + \sqrt{B}.$$

Il continuo uso delle funzioni simmetriche rendeva necessaria qualche semplificazione nella teoria delle funzioni stesse, e più di tutto importava evitare, quanto fosse possibile, la rappresentazione delle funzioni simmetriche delle radici per mezzo dei coefficienti. A tale scopo adottai, per le funzioni simmetriche della forma $\sum a^p b^r \ldots$, la notazione:

$$s^{p\,r\,t\ldots}_{\pi\,\varrho\,\tau\ldots},$$

nella quale $p, r, t, \ldots$ indicano gli esponenti, e $\pi, \varrho, \tau, \ldots$ sono indici che esprimono quante volte il relativo esponente sia ripetuto. Con questa notazione si ha:

$$\left(\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b} + \cdots + \frac{\partial}{\partial l}\right) s^{p\,r\,t\ldots}_{\pi\,\varrho\,\tau\ldots} = p s^{p-1\;p\;\,r\,t}_{\;1\;\;\pi-1\,\varrho\,\tau} + r s^{p\;r-1\;r\;\;t\ldots}_{\pi\;\;1\;\;\varrho-1\,\tau\ldots} + \cdots,$$

dove, potendosi trovare degli esponenti eguali o nulli, riescono necessarie le riduzioni:

$$s^{p\,p\,t\ldots}_{\pi\,\varrho\,\tau\ldots} = \binom{\pi+\varrho}{\pi} s^{p\quad t\ldots}_{\pi+\varrho\,\tau\ldots},$$

$$s^{o\,p\,r\ldots}_{\nu\,\pi\,\varrho\ldots} = \binom{m-\pi-\varrho-\cdots}{\nu} s^{p\,r\ldots}_{\pi\,\varrho\ldots},$$

essendo m il grado dell' equazione, e denotando in generale con $\binom{k}{i}$ il numero figurato $\frac{k(k-1)\ldots.(k-i+1)}{1.2.3\ldots i}$.

La suesposta notazione per le funzioni simmetriche mi condusse ad una forma generale della trasformata di Tschirnhaus. Infatti sia $f(x)=0$ l'equazione proposta del grado m ed

$$y=\vartheta_n x^n+\vartheta_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdot+\vartheta_0$$

l'incognita della trasformata; allora indicando con $\sum\limits_{n,i}$ l'espressione:

$$\sum_{n,i}\vartheta^{\pi}_{p}\vartheta^{\varrho}_{r}\ldots.s^{p\,r\ldots}_{\pi\,\varrho\ldots},$$

dove il segno sommatorio s'estenda a tutti i termini che si possono ottenere dando a $p, r, \ldots$ i valori della serie $0, 1, 2, \ldots. n$, sotto la condizione $\pi+\varrho+\cdots\cdot=i$, la trasformata di Tschirnhaus diviene:

$$z^m - z^{m-1}.\sum_{n,1} + z^{m-2}.\sum_{n,2} - \cdots\cdots(-1)^m\sum_{n,m} = 0.$$

L'ultimo termine $\sum\limits_{n,m}$ è il risultante delle due equazioni $f(x)=0$ $y=0$.

Verona. G. Biasi.

R. Engelmann: Abhandlungen von F. W. Bessel. Herausgegeben von Dr. Rud. Engelmann. — Zweiter Band: III. Theorie der Instrumente. IV. Stellarastronomie. V. Mathematik. — Mit 2 Tafeln nnd verschiedenen Holzschnitten. Leipzig. W. Engelmann 1876.

(Erster Band besprochen in dieser Zeitsch. I. S. 128.)

In keinem Theil astronomischer Forschung hat Bessel in schöpferischer Weise Grösseres geleistet, als in der *Stellarastronomie* und der ihr zu Grunde liegenden *Theorie der Instrumente*; hier trafen alle Anlagen und Neigungen zusammen, um mittelst neuer oder

wesentlich verbesserter älterer Messaparate, ausgehend von sorgfältiger Beobachtung und deren strenger Kritik, und durch Anwendung zum Theil eigenthümlicher Methoden der Reduction und Rechnung, epochemachende Resultate zu gewinnen. Zum ersten Mal betonte Bessel die Nothwendigkeit das Instrument, wie es vom Künstler dem Astronomen überliefert wird, als etwas Unvollkommenes, Unfertiges anzusehen, welches erst in der Hand und durch die Prüfung des aufmerksamen Beobachters zu dem wird und das leistet, was es leisten soll und kann. Frühere hatten das astronomische Instrument nur als Mittel zum Zweck betrachtet; eine Untersuchung des Mittels, wodurch das vorgesetzte Ziel erreicht werden sollte, erschien überflüssig; Bessel erst behauptete und bewies durch die That, dass eine astronomische Beobachtung erst dann einen Werth erhält, wenn der Astronom denkend beobachtet, wenn er weiss, was beobachtet werden soll und welches die Beobachtungsmittel sind; wenn er sein Instrument so zu sagen geistig für eine Grösse gleicher Ordnung wie das zu beobachtende Object hält; es als ein Individuum betrachtet, dessen Eigenthümlichkeiten, Vorzüge und Mängel untersucht und erst erkannt und geprüft sein müssen, ehe die Beobachtung eine wahrhaft zuverlässige und brauchbare wird. — Ergibt sich diese Auffassung der astronomischen Beobachtung schon aus der Art und Weise, wie Bessel im Beginn seiner praktisch-astronomischen Thätigkeit ältere und kleinere Instrumente behandelt, z. B. Sextanten, Mauerkreis, Kreismikrometer und später den Prismenkreis (vgl. die Abh. 52—58 und 72), so tritt sie noch deutlicher hervor, als nach Berufung nach Königsberg und Einrichtung der neu erbauten Sternwarte (1813) anfangs im Dollond'schen Mittagsfernrohr und Cary'schen Kreis, später (1820) im Reichenbach'schen und seit 1842 besonders in dem neuen Repsold'schen Meridiankreis stetig sich verfeinernde Hilfsmittel in seine Hand kamen. Mit jedem neuen und besseren Instrument wächst wie die Lust so auch die Fähigkeit und Kraft, stets Vollkommeneres zu erreichen, jeden Apparat nach seiner mathematischen Idee wie individuellen Beschaffenheit immer gründlicher kennen zu lernen und vollständiger zu benutzen. Noch die letzte Arbeit über den Einfluss der Schwere auf die Gestalt eines vertikalen Kreises (Abh. 76), die speciell durch das Studium des Repsold'schen Kreises hervorgerufen ward, legt Zeugniss dafür ab, wie er besonders das Meridianinstrument (in den Abh. 59—65) in allen seinen Theilen und mit den dazu gehörigen Hilfsapparaten (Uhren, Abh. 66 und 67)

zu höchster Leistungsfähigkeit auszubilden bestrebt war. — Wie von den feststehenden Meridianinstrumenten, so gilt dies auch von dem beweglichen Aequatoreal und vor allem von dem complicirtesten mikrometrischen Apparat, dem Heliometer. Die Darstellung der Theorie eines mit einem Heliometer versehenen Aequatorealinstruments (Abh. 70), wie die Besondere Untersuchung des Königsberger Heliometers (Abh. 71) — noch von Fraunhofer 1824 begonnen und zum Theil unter Benutzung Bessel'scher Ideen 1829 vollendet — sind für Jahrzehnte Ausgangspunkt und Grundlage der meisten ähnlichen Arbeiten gewesen und sind es in vieler Hinsicht auch noch jetzt.

Bildete für Bessel das Instrument an und für sich immer einen Gegenstand höchsten Interesses, so vergass er doch nie, dass es nur das Mittel zur Erlangung astronomischer Resultate sei; im Grunde nur das Material abgebe, um das Gebäude sicher und harmonisch daraus zu erbauen. Wenn aber Bessel's Arbeiten besonders im Gebiete der Stellarastronomie die Fundamente geliefert haben, auf denen spätere Zeiten weiter bauten, so ist der Grund dazu nicht am wenigsten in der Meisterschaft zu suchen, mit welcher er das Instrument selbst theoretisch beherrschte und praktisch benutzte. Der Zusammenhang zwischen der Untersuchung der astronomischen Instrumente und den aus dieser Untersuchung abgeleiteten Resultaten ist überall ein so enger, dass man vom Heliometer z. B. nicht sprechen kann, ohne an die Parallaxe von 61 Cygni oder an die Untersuchungen über p Ophiuchi; von den beiden Meridiankreisen nicht, ohne an die Arbeiten über die Fundamentalsterne oder die veränderlichen Eigenbewegungen zu denken. — Mit — freilich fruchtlosen — Untersuchungen über Fixsternparallaxen hatte sich Bessel schon zur Zeit seines Lilienthaler Aufenthalts beschäftigt (vgl. Abh. 77—79). Besonders war es der durch starke Eigenbewegung ausgezeichnete Doppelstern 61 Cygni, der ihn anzog und dessen Oerter und Abstände von benachbarten Sternen er zu verschiedenen Zeiten bestimmte (Abh. 80—82); aber ein Erfolg für die Ermittelung seiner Entfernung zeigte sich erst, als er das Heliometer zur mikrometrischen Vergleichung benutzen konnte. Das Endresultat, dessen Ableitung die Abh. 83 und 84 mit allem nöthigen Zahlendetail enthalten, eine Parallaxe von 0''.348 oder eine Entfernung von 592000 Erdbahnhalbmessern, war zum ersten Male eine Zahl, welche das ihr zugebrachte Vertrauen durchaus verdiente; wenn schon neuere Untersuchungen sie um etwa 0''.16

vergrössert, die Entfernung also dem entsprechend verkleinert haben. — Die Meridianinstrumente der Königsberger Sternwarte dienten für Jahrzehnte dem von Bessel gesetzten Hauptzwecke, der Ableitung möglichst genauer Positionen einer verhältnissmässig nur geringen Zahl von (36) Fundamentalsternen, als Grundlage aller weiteren Beobachtungen und aus Beobachtungen gezogenen Schlüsse im Fixstern- wie im Sonnensysteme. Zweimal, für 1815 und 1825, bestimmte er die Rectascensionen; öfter noch, für 1815, 1820 und 1840 (letztere Beobachtungen von Prof. E. Luther berechnet), die Declinationen dieser Sterne (Abh. 86—91). — Diese Bestimmungen bilden auch einen Theil der Grundlagen zu der umfangreichsten und zeitraubendsten von Bessel unternommenen Arbeit, zu seinen Zonenbeobachtungen. Von August 1821 bis Januar 1833 hat er, unterstützt von Argelander und Busch, in 536 Sitzungen 75011 Beobachtungen der Sterne bis zur 9. Grösse gemacht, dieselben reducirt und veröffentlicht (in den Königsberger Beobachtungen, 7—17. Abtheilung); ein glänzender Beweis ausserordentlicher Energie und unermüdlichen Fleisses. In engstem Zusammenhang damit stehen die von der Berliner Akademie nach Bessel's Plan seit 1828 herausgegebenen, die Zone von —15 bis +15° der Declination umfassenden Himmelskarten, die, von verschiedenen Astronomen bearbeitet, allerdings erst lange nach Bessel's Tode (1859) vollendet wurden. Ueber diese beiden Unternehmen, ihr Entstehen, Art der Bearbeitung, Fortschritt und Abschluss (für die Zonen) berichten die Abh. 92—99. — Der Besitz des Heliometers veranlasste 1830 und 31 die genauen Messungen einer Anzahl von (37) Doppelsternen, deren Vergleichung mit den nahe gleichzeitig von Struve am Fadenmikrometer des Dorpater Refractor erhaltenen die Thatsache ergab, dass die Königsberger Distanzen fast ohne Ausnahme erheblich grösser als die Dorpater gemessen wurden, während die Positionswinkel im Allgemeinen übereinstimmten (s. Abh. 101 und 102). Diese eigenthümliche seither noch oft beobachtete Erscheinung verfolgte Bessel noch weiter in dem Doppelstern p Ophiuchi (Abh. 103); während Struve auch durch Messung an künstlichen Doppelsternen die Richtigkeit der von ihm gemessenen Distanzen zu beweisen suchte, schloss Bessel seine eigenen Untersuchungen in der Ueberzeugung, dass seine Messungen als frei von constanten Fehlern zu betrachten seien. — Die Verbindung heliometrischer Vergleichungen schwächerer mit häufig am Meridiankreis beobachteten helleren Sternen ergab ferner (1840) ein sehr genaues Verzeichniss von 53 Sternen der

Plejaden-Gruppe, welches für viele praktische Zwecke auch heute noch von grösstem Werthe ist. Der betreffenden Abhandlung 104 hat der Herausgeber zu grösserer Brauchbarkeit eine Karte hinzugefügt, welche (zum Theil nach eigenen Beobachtungen) die meisten Sterne bis zur 11. Grösse in dieser Gegend enthält. — Die letzte Abhandlung endlich aus dem Gebiete der Stellarastronomie (105) legt die epochemachenden Untersuchungen ausführlich dar, welche Bessel über die Veränderlichkeit der Eigenbewegungen der Fixsterne, speciell des Procyon und Sirius anstellte und die ihn bekanntlich zu der Ueberzeugung und dem Nachweis führten, dass die beobachteten Abweichungen nur durch Annahme relativ naher und dunkler Massen zu erklären seien, die mit den genannten hellen Sternen in physischem Connex ständen.

Die Arbeiten aus der reinen *Mathematik*, welche die letzte Abtheilung des 2. Bandes enthält, und zu denen Bessel mit wenigen Ausnahmen bei Behandlung astronomischer Probleme geführt wurde, können hier nur kurz erwähnt werden. Obschon die Natur und Leistungen Bessel's nicht wesentlich charakterisirend, haben manche von ihnen doch eine selbständige, nach Inhalt wie Methode werthvolle Bedeutung erlangt. Hauptsächlich sind es die auf die Integrallogarithmen (Bessel'sche Functionen) bezüglichen Arbeiten (Abh. 106—108); zum Theil auch die Abhandlung über die Zahlenfakultäten (109), sowie die sich mit der Entwickelung von Functionen zweier Winkel beschäftigenden (117 und 121), welche zu ähnlichen Untersuchungen von mathematischer Seite auch später anregten. — Die, gleichfalls umfangreicheren, Arbeiten über die Bestimmung des Gesetzes einer periodischen Erscheinung (118) und über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler (119) sind zwar nach Form und Methode mathematischer Natur, Bessel wurde zu ihnen aber doch durch wesentlich astronomische Probleme veranlasst. — Einige kleinere geometrische Aufsätze (110, 114—116) finden sich als gelegentliche Mittheilungen in Briefen an Olbers, zwei andere (113 und 114) behandeln die Pothenot'sche Aufgabe.

Leipzig. R. Engelmann.

F. Klein: Ueber lineare Differentialgleichungen. (Erlanger Bericht vom 26. Juni 1876. — Abgedruckt in den Mathem. Annalen XI. S. 115—118.)

Bekanntlich hat in einer Abhandlung*) in Borchardt's Journal Bd. 81 Hr. Fuchs die Aufgabe, bei einer vorgelegten linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten zu entscheiden, ob sie durchaus algebraische Integrale besitzt, dadurch auf eine Zahl immer durchführbarer Versuche zurückgebracht, dass er folgendes Theorem bewies: *Sind y_1, y_2 zwei unabhängige Integrale der von ihrem zweiten Gliede befreiten Differentialgleichung, so gibt es gewisse ganze binäre Formen $f(y_1, y_2)$, welche gleich sind Wurzeln aus rationalen Functionen der unabhängigen Veränderlichen.* Die Zahl dieser „Primformen" erweist sich nämlich, sofern man in jedem Falle nur die niederste beibehält, als endlich.

Ich bemerkte nun sofort, als ich diesen Sommer zum Studium der genannten Fuchs'schen Arbeit veranlasst wurde, dass diese Primformen keine anderen sind als eben die „binären Formen mit linearen Transformationen in sich", welche ich im neunten Bande der Mathematischen Annalen behandelt habe (vergl. das Referat im ersten Hefte dieses Repertoriums) und deren Beziehung zu den linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Integralen durch das Ineinandergreifen meiner Arbeit mit den Untersuchungen von Schwarz über die hypergeometrische Reihe (Borchardt's Journal Bd. 75) bereits angezeigt war. Hieraus ergab sich mir das Resultat, dass die Liste der Primformen niedersten Grades, wie sie Fuchs angibt (p. 126 seiner Arbeit), noch zu reduciren ist**); es gelang mir aber namentlich auch, fast ohne Rechnung, *die betr. Differentialgleichungen wirklich zu bilden und ihre Integrale anzuschreiben.*

Handelt es sich nun darum, bei einer vorgelegten Differentialgleichung zu untersuchen, ob sie durchaus algebraische Integrale

*) Ueber diejenigen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie. — Vergl. auch das Referat im ersten Hefte dieses Repertoriums.

**) Das Gleiche behaupten Camille Jordan (Comptes Rendus 13. März 1876) und Pepin (Ebenda, 5. Juni 1876). Aber ihre Angaben sind nicht richtig, was hinsichtlich der Behauptungen von Pepin bereits Fuchs gezeigt hat (Comptes Rendus, 26. Juni, 3. Juli 1876). Nach C. Jordan würde der auf das Ikosaeder bezügliche Fall keine selbständige Bedeutung haben.

besitzt, so bietet sich *die Methode der directen Coëfficientenvergleichung.* Aber ich bin auf eine Darlegung dieser Methode noch nicht eingegangen; ich kann für's Erste nur aussprechen, dass sie in jedem Falle vermöge einer endlichen Anzahl ausführbarer Operationen zum Ziele führt.

München. F. Klein.

E. Edlund: Ueber die Abhängigkeit der contactelectromotorischen Kraft von der Temperatur. (Pogg. Ann. B. 159. S. 448.)

Wir werden uns vorstellen, dass zwei verschiedene Leiter M und N mit einander in Berührung seien, und dass M auf ein elektrisches Molekül m eine grössere Anziehung als N ausübe. Hier mag im Vorbeigehen bemerkt werden, dass die Anziehung, welche ein Körper auf ein in seiner unmittelbaren Nähe belegenes elektrisches Molekül ausübt, nicht nur von der Beschaffenheit der Moleküle des Körpers, sondern auch von deren gegenseitiger Lage und Entfernung abhängen muss. Wir wollen nun annehmen, dass das Molekül m auf derselben Seite der Contactfläche wie N und in der Entfernung r von derselben Fläche gelegen sei, und dass r nicht grösser sei als die Entfernung, in welcher die molekularen Kräfte wirken können. Es ist dann einleuchtend, dass die Anziehungskraft, welche das Molekül m nach der Berührungsfläche zu führen sucht, wächst, wenn die Entfernung von dieser Fläche abnimmt; die Kraft erreicht ihr Maximum, wenn m sich auf der Berührungsfläche selbst befindet, nimmt aber wieder ab, sobald m davon entfernt wird und in M eindringt. Schliesslich wird die Kraft unmerklich, wenn das Molekül m so weit in M eingedrungen ist, dass die Entfernung von der Contactfläche die Grösse des Wirkungsradius der molekularen Anziehungskräfte erreicht. Uebrigens muss das Gesetz, nach welchem die Anziehung zunimmt, wenn m sich in N befindet und sich der Berührungsfläche nähert, dem Gesetz gleich sein, nach welchem die Anziehung abnimmt, wenn m sich in M befindet und sich von der genannten Fläche entfernt. Die Anziehung, die das Molekül m der Berührungsfläche zu nähern strebt, kann dann mit $\frac{a}{r^n}$ ausgedrückt werden, worin n die Potenz bezeichnet, nach welcher die Anziehung abnimmt, wenn die Entfernung grösser wird, und a eine Constante ist. Wenn das Molekül m in der Entfernung $r - \varrho$

von der Berührungsfläche belegen wäre, so würde die Anziehung mit $\frac{a}{(r-\varrho)^n}$, und in der Entfernung $r+\varrho$ mit $\frac{a}{(r+\varrho)^n}$ ausgedrückt werden. Wenn wir uns nun vorstellen, dass das Molekül m während der Zeit t_0 in der Entfernung $r-\varrho$ und danach während eben so langer Zeit in der Entfernung $r+\varrho$ sich befände, so würde die *mittlere* Anziehung während der Zeit $2t_0$ gleich sein

$$\frac{1}{2t_0}\left(\frac{at_0}{(r-\varrho)^n}+\frac{at_0}{(r+\varrho)^n}\right)=\frac{a}{r^n}+\frac{n(n+1)}{2r^{n+2}}a\varrho^2;$$

wo höhere Potenzen von ϱ zu vernachlässigen sind, weil angenommen wird, dass ϱ ausserordentlich klein ist. Man erhält also hieraus, dass die *mittlere* Anziehung, die das Molekül m der Berührungsfläche zu nähern sucht, wenn dasselbe Molekül während der einen Hälfte der Zeit sich in der Entfernung $r-\varrho$ und während der andern Hälfte in der Entfernung $r+\varrho$ belegen wäre, grösser ist als wenn dasselbe sich während der ganzen Zeit in der Entfernung r befände. Wenn nun das Molekül m in der Zeit $2t_0$ um seine ursprüngliche Gleichgewichtslage eine geschlossene Bahn beschreibt, welche von einer Ebene, die durch die Gleichgewichtslage des Moleküls geht und mit der Berührungsfläche zwischen M und N parallel ist, in zwei gleiche Hälften geschnitten wird, so ist die Veränderung der Entfernung von der Berührungsfläche oder ϱ eine Function der Zeit t, und für entsprechende Punkte in jeder Hälfte der Bahn gleich gross, obgleich mit entgegengesetzten Zeichen. Der Zuwachs der mittleren Anziehung, welche in Folge der Bewegung des Moleküls um seine Gleichgewichtslage entsteht, kann dann durch

$$\frac{n(n+1)a}{2t_0 r^{n+2}}\int_{t=0}^{t=t_0}\varrho^2\,dt$$

ausgedrückt werden.

Wenn das Molekül m in *derselben Zeit* $2t_0$ um die Gleichgewichtslage eine mit der vorigen *gleichförmige* Bahn beschreibt, doch mit einer tangentialen Geschwindigkeit, die in jedem Punkt p Mal grösser als vorher ist, so ist die Entfernung von der Gleichgewichtslage in jedem Punkt auch p Mal grösser als in dem entsprechenden Punkt der vorigen Bahn; aber die Veränderungen in den Entfernungen des Moleküls von der Berührungsfläche werden dann auch p Mal grösser als vorher und können deshalb durch $p\varrho$ ausgedrückt werden. Der Zuwachs der mittleren Anziehung, der durch die Be-

wegung des Moleküls um seine Gleichgewichtslage entsteht, wird folglich in diesem Falle

$$\frac{n(n+1)}{2t_0 r^{n+2}} ap^2 \int_{t=0}^{t=t_0} \varrho^2 dt.$$

Die ganze Anziehung A, welche das Molekül m erfährt, während es in derselben gegebenen Zeit gleichförmige Bahnen mit verschiedener Geschwindigkeit um seine Geschwindigkeitslage beschreibt, kann also, wenn C eine Constante bezeichnet, durch

$$A = \frac{a}{r^n}\left(1 + \frac{Cp^2}{r^2}\right)$$

ausgedrückt werden.

Was hier angeführt worden ist, kann natürlich auf jedes beliebige Molekül, das sich der Berührungsfläche nahe genug befindet, angewandt werden.

Wir nehmen nun an, dass das elektrische Fluidum aus dem Lichtäther besteht und dass die Wärme eines Körpers, wenigstens zu einem gegebenen Theile, durch die Schwingungen der Aethermoleküle um ihre Gleichgewichtslagen verursacht wird.*) Die Wärmemenge, welche der Körper enthält, wird dann durch die Summe der lebendigen Kraft der Moleküle bestimmt, und seine Temperatur, von dem absoluten Nullpunkt an gerechnet, kann als dieser Summe proportional betrachtet werden; denn die Abweichung, die hiervon stattfinden kann, wirkt nicht auf das erzielte Resultat ein. Wenn der Körper bei gewöhnlicher Temperatur eine unbedeutende Erhöhung seines Wärmegrades erhält, z. B. von 16 bis 20 Graden, so hat man keine physikalischen Gründe für die Annahme, dass die Schwingungszeit der Moleküle dadurch merkbar verändert wird. Dagegen sind die Amplituden der Moleküle durch die kleine Temperaturerhöhung vergrössert worden, während die Bahn übrigens mit der bei der niedrigen Temperatur gleichförmig verbleibt. Die Schwingungsbahnen der Aethermoleküle erfüllen auch die gestellte Bedingung, dass sie von einer Ebene, die durch die Gleichgewichtslage der Moleküle geht, und mit der Berührungsfläche zwischen M

*) Die Wärme, welche ein Körper besitzt, wird ohne Zweifel zum Theil auch von den Schwingungen der eigenen Moleküle des Körpers verursacht. Die Veränderung der Anziehung, welche durch die Vermehrung der lebendigen Kraft der materiellen Moleküle entsteht, braucht man, wenn von einem thermoelektrischen Ringe die Rede ist, doch nicht in Betracht zu ziehen, weil die Wirkung dieser Veränderung für den ganzen Ring gleich Null wird.

und N parallel ist, in zwei gleiche Hälften getheilt werden. Ist dagegen der Temperaturzuschuss gross, so zeigt die Erfahrung, dass nicht nur die Schwingungszeit der Moleküle *abnimmt*, sondern auch, dass die Moleküle des Körpers ihre Lage verändern und sich von einander entfernen. Man kann also nur für kleine Temperaturzuschüsse die obenstehende Schlussfolge zur Berechnung der Anziehungsveränderung anwenden. Es ergiebt sich von selbst, dass p^2 der lebendigen Kraft der Aethermoleküle proportional ist, und dass also, wenn T die absolute Temperatur des Körpers bezeichnet, man $p^2 = fT$ schreiben kann, wo f eine Constante bedeutet. Wenn A_0 die Grösse der Anziehung bei der Temperatur T_0, und A_1 bei der etwas höheren Temperatur T_1 ist, so erhält man also:

$$A_1 - A_0 = Da\,(T_1 - T_0);$$

wo D eine neue Constante bezeichnet.

Wenn die Berührungsfläche bei gewöhnlicher Temperatur eine kleine Erhöhung ihres Wärmegrades erhält, so wachsen also die Anziehungskräfte, welche das elektrische Fluidum zu dem Leiter, der die stärkere Anziehung ausübt, zu führen suchen, und dieser Zuwachs der Anziehung muss dem Temperaturunterschiede, wenn dieser nicht zu gross ist, annäherungsweise proportional sein.

Wir wollen uns nun denken, dass z. B. der Leiter M in zwei Theile M_1 und M_{11} getheilt sei, von welchem M_1 eine höhere Temperatur als M_{11} habe, doch so, dass dieser Temperaturüberschuss so gering ist, dass die materiellen Moleküle im Theile M_1 deshalb ihre gegenseitigen Lagen und Entfernungen nicht merkbar verändern. Die in der vorhergehenden Formel eingehende Constante a ist also in diesem Falle gleich Null, und folglich erhält man für die Berührung zwischen dem wärmeren und dem kälteren Theile von M, dass $A_1 - A_0 = 0$. Hierbei kann allerdings bemerkt werden, dass der Theil M_1 sich von M_{11} darin unterscheidet, dass die eigenen Moleküle des ersteren in stärkeren Schwingungen als die des letzteren begriffen sind; aber dieser Umstand braucht nicht in Betracht genommen zu werden, weil, wie oben schon bemerkt worden, die Wirkung hiervon für einen *ganzen* Ring gleich Null wird. Ist der Temperaturüberschuss, welchen M_1 besitzt, gering, so verhalten sich also M_1 und M_{11} hinsichtlich ihrer Anziehung gegen ein elektrisches Molekül nicht als zwei verschiedene Metalle. Die verschiedene Temperaturvertheilung in einem und demselben Leiter vermag folglich nicht die elektrische Flüssigkeit in Bewegung zu setzen. Sollte dagegen M_1 eine so bedeutend höhere Temperatur

als M_{11} haben, dass dessen Moleküle dadurch ihre Gleichgewichtslagen und gegenseitigen Entfernungen merkbar verändern, so kann das Verhältniss sich anders gestalten. Es kann dann geschehen, dass die Anziehung, welche M_1 auf ein in der Nähe der Berührungsfläche gelegenes elektrisches Molekül ausübt, nicht mehr eben so gross ist wie die Anziehung, welche von M_{11} ausgeht, und dass also der Theil M_1 hinsichtlich seiner Anziehung gegen ein elektrisches Molekül gewissermassen sich so verhält, als wäre er von einem andern Stoffe als M_{11}.

In einem aus zwei verschiedenen Metallen M und N bestehenden Ringe, dessen eine Löthstelle eine unbedeutend höhere Temperatur als die andere besitzt, muss also ein elektrischer Strom entstehen, dessen Stärke dem Temperaturunterschiede annäherungsweise proportional ist; welches Resultat bekanntlich mit der Erfahrung übereinstimmt.

Wenn die eine Löthstelle eine bedeutend höhere Temperatur als die andere erhält, so wird die lebendige Kraft der Aethermoleküle, die sich an der Löthstelle befinden, im Verhältniss dazu vergrössert. Dies kann nun dadurch geschehen, dass die Schwingungszeit abnimmt, während die Amplituden entweder sich vergrössern, unverändert beibehalten oder sogar kleiner als vorher werden. Wenn das letztgenannte stattfindet, so wird die Wirkung der Anziehungskraft, welche die elektrischen Moleküle von N nach M zu führen sucht, bei der höheren Temperatur geringer als bei der niedrigen, und in dem thermoelektrischen Ringe entsteht deshalb ein Strom, der in entgegengesetzter Richtung gegen denjenigen Strom läuft, welcher durch einen kleineren Temperaturunterschied zwischen den beiden Löthstellen erzeugt wird. Hierin kann man die Ursache zu der bekannten Veränderung der Stromesrichtung sehen, welche mehrere Metallcombinationen bei grossem Temperaturunterschied zwischen den Löthstellen zeigen.

Nimmt man also an, dass die elektrische Flüssigkeit aus dem Lichtäther besteht, so kann es als bewiesen angesehen werden, dass die contactelektromotorische Kraft sich mit der Temperatur verändern muss; ein Verhältniss, das von Le Roux (Annales de chimie et de ph. (4) T. 10) auf experimentellem Wege schon dargelegt worden ist.

Stockholm. E. Edlund.

R. Clausius: Ueber die Behandlung der zwischen linearen Strömen und Leitern stattfindenden ponderomotorischen und electromotorischen Kräfte nach dem electrodynamischen Grundgesetze. (Verhandlungen des naturhist. Vereins der preuss. Rheinlande und Westfalens Bd. XXXIII, 1876.)

In dieser Abhandlung wird das in einer früheren Abhandlung, über welche S. 287 berichtet wurde, abgeleitete electrodynamische Grundgesetz dazu angewandt, die zwischen zwei linearen galvanischen Strömen stattfindenden ponderomotorischen Kräfte und die von einem linearen Strome auf einen linearen Leiter ausgeübte Inductionswirkung zu bestimmen.

Wenn Xee' die x-Componente der Kraft ist, welche ein zur Zeit t im Punkte x, y, z befindliches bewegtes Electricitätstheilchen e von einem anderen um die Strecke r von ihm entfernten, im Punkte x', y', z' befindlichen bewegten Electricitätstheilchen e' erleidet, so gilt nach dem Grundgesetze die Gleichung:

$$(1)\quad X = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\left[1 - k\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right)\right] - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right).$$

Dieses Gesetz unterscheidet sich von denjenigen, welche W. Weber und Riemann aufgestellt haben, wesentlich dadurch, dass seine Anwendbarkeit nicht, wie die der letzteren, an die Bedingung gebunden ist, dass ein galvanischer Strom aus zwei gleich starken nach entgegengesetzten Richtungen gehenden Strömen von positiver und negativer Electricität bestehe. Es ist ursprünglich unter der Voraussetzung abgeleitet, dass nur die positive Electricität ströme, und die negative in Ruhe bleibe, es kann aber auch dann angewandt werden, wenn man für beide Electricitäten Bewegungen, und zwar mit beliebigen Geschwindigkeiten, annimmt. Da nun in der That, wenn man sich auch der von C. Neumann gemachten Voraussetzung anschliesst, dass die negative Electricität fest an die ponderablen Atome gebunden sei, damit nicht für alle Leiter die Bewegung der negativen Electricität ausgeschlossen ist, indem in den electrolytischen Leitern, bei welchen die Electricitätsleitung durch Bewegungen der Atome vermittelt wird, jedenfalls beide Electricitäten als bewegt angenommen werden müssen, so wird in der vorliegenden Abhandlung die allgemeinere Voraussetzung gemacht, dass beide Electricitäten nach entgegengesetzten Richtungen strömen mit Geschwindigkeiten, welche für den Leiter s mit c und c_1 und für

den Leiter s' mit c' und c_1' bezeichnet werden. Will man dann für feste Leiter die negative Electricität als ruhend betrachten, so braucht man nur c_1 und c_1' gleich Null zu setzen.

Ferner wird angenommen, dass die beiden Leiter in Bewegung und die Stromintensitäten i und i' in ihnen veränderlich sein können.

Unter diesen allgemeinen Voraussetzungen wird nun zunächst die *ponderomotorische Kraft* abgeleitet, welche das Stromelement ds von dem Stromelemente ds' erleidet. Es stellt sich dabei heraus, dass diese Kraft davon, ob man beide Electricitäten oder nur Eine als strömend annimmt, ferner davon, ob die Stromelemente in Ruhe oder Bewegung sind, und ob die Stromintensitäten in ihnen constant oder veränderlich sind, unabhängig ist. Bezeichnet man die drei Componenten der Kraft mit $\xi ds ds'$, $\eta ds ds'$ und $\zeta ds ds'$, so gelten für ξ, η, ζ folgende schon früher gegebene Gleichungen, worin (ss') den Winkel zwischen den Richtungen der Elemente ds und ds' bedeutet:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
\xi &= kii'\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\cos(ss') - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\\
\eta &= kii'\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\cos(ss') - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial y'}{\partial s'}\right)\\
\zeta &= kii'\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\cos(ss') - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial z'}{\partial s'}\right).
\end{aligned}
$$

Die durch diese Gleichungen bestimmte Kraft liegt in der durch r und ds' gelegten Ebene und ist auf ds senkrecht, während die von Ampère angenommene Kraft in die Richtung von r fällt. Ferner unterscheidet sie sich von der letzteren dadurch, dass sie für den Fall, wo die Richtungen von ds und ds' mit r zusammenfallen, Null wird, während nach Ampère in diesem Falle eine Abstossung oder Anziehung stattfindet, je nachdem die Ströme gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind. Bestimmt man dagegen aus den obigen Gleichungen durch Integration die Kraft, welche ein geschlossener Strom s' auf ein Stromelement ds ausübt, so erhält man dasselbe Resultat, wie nach der Ampère'schen Theorie.

Was nun die von einem Strome s' in einem Leiter s *inducirte electromotorische Kraft* anbetrifft, so möge dieselbe mit E bezeichnet werden, so dass die von dem Stromelemente ds' in dem Leiterelemente ds inducirte electromotorische Kraft durch $\frac{\partial^2 E}{\partial s \partial s'}\, ds ds'$

dargestellt wird. Ferner mögen, da die Elemente ds und ds' als bewegt vorausgesetzt werden, die von ihnen während des Zeitelementes dt beschriebenen Bahnelemente mit $d\sigma$ und $d\sigma'$ und ihre Geschwindigkeiten mit γ und γ' bezeichnet werden. Der Winkel zwischen ds und $d\sigma'$ soll durch $(s\sigma')$ und der zwischen $d\sigma$ und ds' durch $(\sigma s')$ dargestellt werden. Endlich ist in Bezug auf die in den Gleichungen vorkommenden veränderlichen Grössen, wie z. B. r, zu bemerken, dass sie einerseits von den durch die Bogenlängen s und s' bestimmten Stellen, welche wir in den beiden Leitern betrachten, abhängen, und andererseits für gegebene Stellen der Leiter mit der Zeit veränderlich sind. Hierauf sollen sich die durch $\frac{\partial}{\partial s}$, $\frac{\partial}{\partial s'}$ und $\frac{\partial}{\partial t}$ angedeuteten Differentiationen beziehen. Dann lautet die betreffende Gleichung:

$$(3)\quad \frac{\partial^2 E}{\partial s \partial s'} = k\left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i' \cos(ss')}{r}\right) + i'\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\gamma \cos(\sigma s')}{r}\right) - i'\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{\gamma' \cos(s\sigma')}{r} + \frac{(c' - c_1') \cos(ss')}{r}\right)\right].$$

Hieraus kann man durch Integration die inducirte electromotorische Kraft für jedes Stück des inducirenden Stromes und des inducirten Leiters berechnen. Dabei ist zu bemerken, dass, wenn der inducirende Strom s' geschlossen ist, das Glied, welches den Differentialcoefficienten nach s' enthält, das Integral Null giebt, und ebenso, wenn der inducirte Leiter s geschlossen ist, das Glied, welches den Differentialcoefficienten nach s enthält, das Integral Null giebt. Sind beide geschlossen, so erhält man einfach:

$$(4)\quad E = -k\frac{\partial}{\partial t}\int\int \frac{i' \cos(ss')}{r}\, ds\, ds',$$

worin zur Andeutung der Differentiation nach t auch das aufrechte d statt des runden ∂ angewandt werden kann.

Nachdem die ponderomotorische und die electromotorische Kraft bestimmt sind, kann man auch die von diesen Kräften während des Zeitelementes dt gethane Arbeit leicht angeben, und zwar erhält man dafür folgende Ausdrücke.

Arbeit der zwischen zwei Stromelementen ds und ds' wirkenden ponderomotorischen Kräfte:

$$k i i'\, ds\, ds'\, dt\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\cos(ss')}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\gamma \cos(\sigma s')}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{\gamma' \cos(s\sigma')}{r}\right)\right].$$

Arbeit der von den Elementen ds und ds' in einander inducirten electromotorischen Kräfte:

$$-k\,ds\,ds'\,dt\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{ii'\cos(ss')}{r}\right)+ii'\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\cos(ss')}{r}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{(c-c_1)\cos(ss')}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{(c'-c_1')\cos(ss')}{r}\right)\right]\right\}.$$

Arbeit aller zwischen den Elementen ds und ds' wirkenden Kräfte:

$$-k\,ds\,ds'\,dt\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{ii'\cos(ss')}{r}\right)+ii'\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\gamma\cos(\sigma s')}{r}+\frac{(c-c_1)\cos(ss')}{r}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{\gamma'\cos(s\sigma')}{r}+\frac{(c'-c_1'\cos(ss')}{r}\right)\right]\right\}.$$

Bei der Integration dieser Ausdrücke nach s und s' treten für den Fall, dass die eine oder andere dieser Curven geschlossen ist, die schon vorher erwähnten Vereinfachungen ein, indem dann die Glieder, welche die Form von Differentialcoefficienten nach resp. s. oder s' haben, den Werth Null geben. Sind s und s' beide geschlossen, so bleiben nur die Integrale der Glieder übrig, welche Differentialcoefficienten nach t enthalten. Führt man dann noch das Zeichen w ein mit der Bedeutung:

(5) $$w = k\int\int\frac{\cos(ss')}{r}\,ds\,ds'$$

und bezeichnet die auf die Zeit dt bezügliche Arbeit der ponderomotorischen Kräfte mit dA_p, die der electromotorischen Kräfte mit dA_e und die aller Kräfte einfach mit dA, so lauten die Gleichungen:

(6) $$dA_p = ii'dw$$

(7) $$dA_e = -d(ii'w) - ii'dw$$

(8) $$dA = -d(ii'w).$$

Bekanntlich hat F. Neumann eine Grösse eingeführt, welche dazu bestimmt ist, durch ihr negatives Differential die bei einer unendlich kleinen Lagenänderung der Ströme von den ponderomotorischen Kräften gethane Arbeit darzustellen, und welche er das Potential der Ströme auf einander genannt hat. Der Ausdruck dieses Potentials ist:

$$-kii'\int\int\frac{\cos(ss')}{r}\,ds\,ds'$$

oder unter Anwendung des durch (5) definirten Zeichens w:

$$-ii'w.$$

Wenn man die Ströme in der bekannten Weise durch magnetische Flächenpaare ersetzt, und für die darauf gedachten Magnetismusmengen das Potential von der gewöhnlichen, bei Agentien, welche

sich einfach nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung anziehen oder abstossen, gebräuchlichen Art bildet, so erhält man einen Ausdruck, welcher sich durch eine leichte mathematische Transformation in die Gestalt des vorigen Ausdruckes bringen lässt. Die durch diesen Ausdruck dargestellte Grösse möge daher das *magnetische* Potential der Ströme genannt werden, um sie von dem gleich zu besprechenden anderen Potential zu unterscheiden.

Bei der Aufstellung des neuen electrodynamischen Grundgesetzes hat der Verf. eine Grösse gebildet, welche er das *electrodynamische Potential* der Electricitätstheilchen e und e' auf einander genannt und durch folgenden Ausdruck dargestellt hat:

$$k\frac{ee'}{r}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right).$$

Von dieser Grösse hat er nachgewiesen, dass ihr negatives Differential die Arbeit darstellt, die während der Zeit dt von den Kräften, welche die Theilchen auf einander ausüben, geleistet wird. Da nun bei geschlossenen Strömen dieselben Electricitätsmengen, welche einmal in ihnen sind, auch in ihnen bleiben, so kann man unter Anwendung des vorigen Ausdruckes auch das *electrodynamische Potential geschlossener Ströme auf einander* bilden, und dieses Potential muss ebenfalls jener Bedingung genügen, dass die von allen Kräften, welche die Ströme auf einander ausüben, während der Zeit dt geleistete Arbeit durch das negative Differential des Potentials dargestellt wird. Bezeichnet man dieses electrodynamische Potential mit W, so erhält man die Gleichung:

$$W = kii'\int\int\frac{\cos(ss')}{r}\,ds\,ds', \tag{9}$$

oder unter Berücksichtigung von (5):

$$W = ii'w. \tag{10}$$

Aus der Vergleicung dieses für W geltenden Ausdruckes mit dem vorher für das magnetische Potential angeführten ergiebt sich, dass das electrodynamische Potential dem magnetischen Potential dem absoluten Werthe nach gleich, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzt ist.

Betrachtet man nun endlich die oben gegebenen Ausdrücke der während der Zeit dt gethanen Arbeit, so sieht man, dass die Arbeit *aller* von geschlossenen Strömen auf einander ausgeübten Kräfte in der That durch das negative Differential des electrodynamischen Potentials dargestellt wird. Der für die Arbeit der ponderomotorischen

Kräfte gegebene Ausdruck $i i' d w$ dagegen ist nur dann das negative Differential des magnetischen Potentials, wenn die Stromintensitäten constant sind, oder wenigstens ein constantes Product haben.

Bonn. R. Clausius.

S. Günther: Adolph Zeising als Mathematiker. (Zeitschrift für Mathematik und Physik, 21. Jahrgang.)

Kurze Schilderung der Verdienste, welche der genannte Gelehrte um die Begründung der mathematischen Aesthetik sich erworben. Es werden mit kurzen Worten die wichtigsten Abhandlungen Zeising's angeführt, in welchen er für sein Princip, das Gesetz des goldenen Schnittes regle das ganze weite Gebiet des Schönen, Propaganda zu machen suchte. Manche seiner Aufstellungen werden geradezu verworfen, andere, wie die auf architektonische Verhältnisse und die mathematische Theorie der Blattstellung bezüglichen, vollkommen anerkannt. Zum Schluss folgt dann noch eine gedrängte Analyse derjenigen Arbeiten, welche ein allgemeineres Studium der geometrischen Formenlehre — ohne specielle Rücksicht auf die Theilung nach äusserem und mittlerem Verhältniss — zum Gegenstande haben.

Es möge an dieser Stelle noch bemerkt werden, dass, wie uns von competenter Seite mitgetheilt wird, dem Zeising'schen Theorem eine allgemeinere rein psychologische Bedeutung innewohne, dass aber der Urheber darin fehlte, nur immer nach Bestätigungen der Norm zu suchen, Ausnahmen aber gänzlich ausser Acht zu lassen. Ferner sei eines dem Grundgedanken nach verwandten Versuches des Franzosen Lagout gedacht, auf welchen uns Professor Favaro in Padua aufmerksam machte; dessen „esthétique nombrée, application de l'équation du beau à l'analyse“ (Paris 1863) vermag sich jedoch trotz manches geistreichen Raisonnements mit der consequent durchgeführten Systematik des deutschen Forschers nicht zu messen.

Ansbach. S. Günther.

L. Königsberger: Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale auf algebraisch-logarithmische Functionen. (Mathematische Annalen Band XI.)

Die fundamentalen Untersuchungen von Clebsch haben gelehrt, dass, wenn y mit x durch eine algebraische Gleichung n^{ter} Ordnung

$$(a) \ldots . F(x, y) = 0$$

von der Art verbunden ist, dass x und y sich als rationale Functionen einer Hülfsvariabeln t ausdrücken lassen, die Curve (a) die höchste Anzahl der Doppelpunkte nämlich

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

besitzt, und dass umgekehrt, wenn diese Anzahl der Doppelpunkte erreicht wird, sich x und y als rationale Functionen einer andern Variabeln darstellen lassen, so dass in diesem Falle

$$\int f(x, y)\, dx,$$

worin $f(x, y)$ eine rationale Function von x und y bedeutet, auf das Integral einer rationalen Function von t also auf eine algebraisch-logarithmische Function dieser Variabeln reducirbar ist, sich somit auch algebraisch-logarithmisch durch x und y ausdrücken lässt. Eine andere Frage tritt auf, wenn es sich nicht um die ganze Klasse der zugehörigen Abel'schen Integrale handelt, sondern um specielle Integrale aus den verschiedenen Klassen, und in dem Sinne kann man sich die Aufgabe stellen, aus der Gattung der hyperelliptischen Integrale der verschiedenen Ordnungen diejenigen zu charakterisiren, welche auf algebraisch-logarithmische Functionen reducirbar sind. Herr Tchebichef hat sich im 18. Bande des Liouville'schen Journals mit der Reduction von Integralen der Form

$$\int \frac{F_0(x)}{f_0(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\Theta(x)}}$$

auf algebraisch-logarithmische Functionen beschäftigt und sich stützend auf die Liouville'schen Untersuchungen gezeigt, wie, wenn die Reduction möglich ist, der algebraische Theil dieses Integrals bestimmt, die Anzahl der einzelnen logarithmischen Ausdrücke ermittelt und die Form der letzteren festgestellt werden kann; in einer folgenden Arbeit desselben Journals hat derselbe unter der Annahme, dass die Bedingungen erfüllt sind, in dem einfachsten Falle der elliptischen Integrale auch die logarithmischen Ausdrücke wirklich zu finden gelehrt. Herr Weierstrass ging in den Monatsberichten der Berliner Akademie — vom Jahre 1857 — näher auf diese letzte Arbeit Tchebichef's ein, und indem er den von demselben eingeschlagenen Weg nicht für den naturgemässen hält, sondern die Frage für elliptische Integrale bereits durch die von Abel in seiner letzten unvollendet gebliebenen Arbeit über die allgemeinsten zwischen elliptischen Integralen und algebraisch-loga-

rithmischen Functionen stattfindenden Relationen entwickelten Principien für erledigt betrachtet, zeichnet er einen Weg für die Behandlung dieser Frage für elliptische Integrale vor, der sich, wie er hervorhebt, auch für hyperelliptische Integrale durchführen lässt. Das Charakteristische der Weierstrass'schen Untersuchung besteht darin, dass das vorgelegte elliptische Integral dadurch dass für das elliptische Integral erster Gattung eine Variable u eingeführt wird, in bekannter Weise, von einem in u linearen Posten abgesehen, in eine Summe von $E(u)$, einer Reihe von Functionen der Form $\Pi(u, a_\alpha)$ und einem aus sin am u und $\frac{d \sin \operatorname{am} u}{du}$ rational zusammengesetzten Theil zerlegt wird, und nun aus der Annahme, dass das Integral auf eine algebraisch-logarithmische Function reducirbar sein soll, durch Vergleichung der Perioden der elliptischen Functionen und der Logarithmen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Reduction ermittelt werden.

Ich nehme die Untersuchung für die Reduction der hyperelliptischen Integrale beliebiger Ordnung auf, ohne das Umkehrungsproblem dieser Gattung Abel'scher Integrale zu benutzen, sondern suche direct mit Benutzung der früher von mir in den Annalen ausgeführten Reductionsformeln der allgemeinen hyperelliptischen Integrale auf die Integrale der drei Gattungen und den algebraischen Theil, sowie mich stützend auf die von mir vor Kurzem im Journal für Mathematik behandelte Zurückführung des allgemeinen Transformationsproblems auf das rationale und die dort aufgestellte allgemeinste Relation zwischen hyperelliptischen Integralen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Reduction eines hyperelliptischen Integrales beliebiger Ordnung auf algebraisch-logarithmische Functionen herzuleiten.

Der von Herrn Fuchs zuerst ohne jede Beschränkung ausgesprochene Satz, dass die Determinante der zwischen den Verzweigungspunkten genommenen Integrale erster und zweiter Gattung stets einen von Null verschiedenen, von den Verzweigungspunkten völlig unabhängigen Werth besitzt, liess für die auf algebraische Functionen reducirbaren hyperelliptischen Integrale

$$\int \frac{F(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

wenn

$$R(z) = A(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{2p+1})$$

und

$$z_1, z_2, \cdots z_n$$

die Werthe von z bedeuten, für welche $F(z)$ unendlich wird, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen bei Anwendung bekannter Bezeichnungen in der Form finden

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-s_1)^{-1}} = 0, \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-s_2)^{-1}} = 0, \cdots \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-s_n)^{-1}} = 0,$$

$$\sum_1^n {}^{\alpha}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{s_\alpha}^{t}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-s_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}^{t}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = 0,$$

wenn

$$R(z) = A z^{2p+1} + B_0 z^p + B_1 z^{p-1} + \cdots + B_{2p-1} z + B_{2p}$$

$$F_r(t) = \frac{2p-2r-1}{2} A t^r + \frac{2p-2r}{2} B_0 t^{r-1} + \cdots + \frac{2p-r-2}{2} B_{r-2} t + \frac{2p-r-1}{2} B_{r-1}$$

und

$$r = 0, 1, 2, \cdots p-1, p, \cdots 2p-1$$

gesetzt wird; der algebraische Werth des Integrales nimmt dann die Form an

$$\left\{\sum_1^n {}^{\alpha}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{s_\alpha}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-s_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}\right\}\sqrt{R(z)}.$$

Um in ähnlicher Weise die Bedingungen für die Reduction eines hyperelliptischen Integrales auf algebraisch-logarithmische Functionen zu finden, wird wiederum das Integral in die Summe von p Integralen erster, p Integralen zweiter, n Integralen dritter Gattung und einem algebraischen Theile zerlegt und gezeigt, dass, wenn sich diese Summe in einen algebraisch-logarithmischen Theil umwandeln soll, nach Elimination der nicht von einander unabhängigen Coefficienten der Integrale dritter Gattung je ein Complex von diesen mit ganzzahligen Coefficienten versehenen Integralen einem Logarithmus einer aus z und $\sqrt{R(z)}$ rational zusammengesetzten Function gleich sein muss, und dass somit vermöge des Satzes von der Vertauschung der Unstetigkeitspunkte und Grenzen der Integrale dritter Gattung die zu je einem Complex gehörigen Unstetigkeitspunkte Lösungen einer Gleichung von der Form

$$p^2 - q^2 R(z) = 0$$

sein müssen, worin p und q rationale Functionen von z bedeuten; hat man nun geprüft, ob die Grössen je eines Complexes Lösungen

einer so gestalteten Gleichung sind — und die Methoden, wie dies geschehen muss, werden angegeben —, dann hat man zu untersuchen, ob einerseits die bei der Reduction sich ergebenden Coefficienten der Integrale zweiter Gattung verschwinden, andererseits ob die dabei resultirenden Coefficienten der Integrale erster Gattung absolut gleich sind, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen, den Coefficienten derjenigen Integrale erster Gattung, welche der Satz von der Vertauschung der Unstetigkeitspunkte und der Grenzen der Integrale dritter Gattung noch einführte, indem diese Vertauschung ohne Werthveränderung nur für solche hyperelliptische Hauptintegrale dritter Gattung gültig ist, deren Periodicitätsmoduln an einem gesammten Querschnittssystem verschwinden; für die Form der letzteren Coefficienten werden verschiedene Formen gefunden. Sind alle diese Bedingungen befriedigt, so sind nicht bloss die logarithmischen Functionen, sondern auch die algebraischen Theile unmittelbar hinzuschreiben, so dass die Erfüllung der auch als hinreichend erkannten Bedingungen zugleich das Transformationsresultat liefert. Das gesammte Ergebniss lässt sich folgendermassen aussprechen:

Man bilde die Gleichung

$$T_1\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-s_1)^{-1}} + T_2\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-s_2)^{-1}} + \cdots + T_n\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-s_n)^{-1}} = 0$$

und suche dieselbe durch Systeme von ganzen Zahlen $T_1, T_2 \ldots T_n$ zu befriedigen; mögen sich nur $n-k$ solcher Systeme finden lassen

$$\begin{array}{ccc} T_{11} & T_{12} & \cdots T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots T_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{n-k1} & T_{n-k2} & \cdots T_{n-kn}, \end{array}$$

welche von einander unabhängig sind, und mögen sich aus diesen $n-k$ Gleichungen die Relationen ergeben

$$D\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-s_{k+1})^{-1}} = \lambda_{11}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-s_1)^{-1}} + \cdots + \lambda_{1k}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-s_k)^{-1}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-s_n)^{-1}} = \lambda_{n-k1}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-s_1)^{-1}} + \cdots + \lambda_{n-kk}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-s_k)^{-1}},$$

so suche man den grössten gemeinsamen Theiler zwischen den Zahlen

$$D \quad \lambda_{1i} \quad \lambda_{2i} \cdots \lambda_{n-ki},$$

worin i eine der Zahlen $1, 2, \ldots k$ bedeuten soll; sei derselbe δ_i und werde

$$\frac{D}{\delta_i} = t_0^{(i)}, \quad \frac{\lambda_{1i}}{\delta_i} = t_1^{(i)}, \ldots \frac{\lambda_{n-ki}}{\delta_i} = t_{n-k}^{(i)}$$

gesetzt. Lassen sich nun Gleichungen von der Form finden

$$P^{(1)^2} - Q^{(1)^2} R(z) = 0, \quad P^{(2)^2} - Q^{(2)^2} R(z) = 0, \ldots P^{(k)^2} - Q^{(k)^2} R(z) = 0$$

welche aus den resp. Werthen

$$z_1, z_{k+1}, \cdots z_n$$
$$z_2, z_{k+1}, \cdots z_n$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$z_k, z_{k+1}, \cdots z_n$$

mit der entsprechenden Vielfachheit

$$t_0^{(1)}, t_1^{(1)}, \ldots t_{n-k}^{(1)}$$
$$t_0^{(2)}, t_1^{(2)}, \ldots t_{n-k}^{(2)}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$t_0^{(k)}, t_1^{(k)}, \ldots t_{n-k}^{(k)}$$

nur noch Verzweigungswerthe zu Lösungen haben, so bilde man die Summe

$$\frac{1}{t_0^{(1)}} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_1)^{-1}} \log \left(\frac{P^{(1)} - Q^{(1)} \sqrt{R(z)}}{P^{(1)} + Q^{(1)} \sqrt{R(z)}} \right) + \frac{1}{t_0^{(2)}} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_2)^{-1}} \log \left(\frac{P^{(2)} - Q^{(2)} \sqrt{R(z)}}{P^{(2)} + Q^{(2)} \sqrt{R(z)}} \right)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{t_0^{(k)}} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_k)^{-1}} \log \left(\frac{P^{(k)} - Q^{(k)} \sqrt{R(z)}}{P^{(k)} + Q^{(k)} \sqrt{R(z)}} \right) = L(z),$$

dann wird $L(z)$ das Aggregat der im reducirbaren hyperelliptischen Integrale vorkommenden logarithmischen Glieder darstellen. Setzt man sodann

$$\frac{dL(z)}{dz}$$

$$= \sum_1^k \left\{ \frac{1}{t_0^{(i)}} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_i)^{-1}} \frac{2R(z) \left[Q^{(i)} \frac{dP^{(i)}}{dz} - P^{(i)} \frac{dQ^{(i)}}{dz} \right] - P^{(i)} Q^{(i)} \frac{dR(z)}{dz}}{P^{(i)^2} - Q^{(i)^2} R(z)} \cdot \frac{1}{\sqrt{R(z)}} \right\}$$

$$= \frac{\varphi(z)}{\sqrt{R(z)}},$$

so müssen ferner die Bedingungen befriedigt sein

$$\sum_1^n \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{s_\alpha}^{t}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-s_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}^{t}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = 0$$

für die Werthe $r = 0, 1, 2, \cdots p-1$, und

$$\sum_1^n \left[\frac{F(t)-\varphi(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{s_\alpha}^{t}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-s_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)-\varphi(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}^{t}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = 0$$

für die Werthe $r = p, p+1, \cdots 2p-1$; sind alle diese Bedingungen erfüllt, so ist der Werth des algebraischen Theiles jenes hyperelliptischen Integrales

$$\left\{\sum_1^n \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{s_\alpha}^{t}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-s_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}^{t}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}\right\}\sqrt{R(z)},$$

welcher mit $L(z)$ vereinigt die algebraisch-logarithmische Darstellung des gegebenen Integrales liefert.

Dresden. L. Königsberger.

L. Königsberger: Referate aus den hinterlassenen Papieren von F. Richelot. Trigonometrische Form der hyperelliptischen Integrale der ersten, zweiten und dritten Gattung.

(Der Inhalt der folgenden Mittheilung ist in den Michaelisferien 1874 niedergeschrieben.)

Richelot führt zuerst für die Lösungen $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$ des Polynoms $2n^{ten}$ Grades

$$R(z) = (z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_{2n})$$

eine Reihe von Moduln, analog dem Modul des elliptischen Integrals, durch folgende Betrachtungen ein. Transformirt man das hyperelliptische Integral durch den linearen Ausdruck

$$z = [illegible]$$

oder durch

$$z = [illegible]$$

[illegible] oder endlich durch

$$\zeta_{n-1} = \frac{z_{n-1} - a_{2n-2}}{z_{n-1} - a_{2n}} \cdot \frac{a_{2n-1} - a_{2n}}{a_{2n-1} - a_{2n-2}},$$

wodurch den Werthen

$$z_1 = a_2 \quad z_2 = a_4 \cdots\cdots z_{n-1} = a_{2n-2}$$

$$z_1 = a_1 \quad z_2 = a_3 \cdots\cdots z_{n-1} = a_{2n-1}$$

$$z_1 = a_{2n} \quad z_2 = a_{2n} \cdots\cdots z_{n-1} = a_{2n}$$

für die Grössen ζ sämmtlich resp. die Werthe Null, die Einheit und ∞ zugeordnet werden, so erkennt man leicht, dass für die *erste* Transformation sich

$$z_1 = a_3 \qquad \frac{1}{\zeta_1} = \frac{a_3 - a_{2n}}{a_3 - a_2} \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_{2n}} = k_{13}^2$$

$$z_1 = a_4 \qquad \frac{1}{\zeta_1} = \frac{a_4 - a_{2n}}{a_4 - a_2} \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_{2n}} = k_{14}^2$$

. . . .

$$z_1 = a_{2n-1} \qquad \frac{1}{\zeta_1} = \frac{a_{2n-1} - a_{2n}}{a_{2n-1} - a_2} \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_{2n}} = k_{1\,2n-1}^2$$

entsprechen, für die *zweite* Transformation

$$z_2 = a_5 \qquad \frac{1}{\zeta_2} = \frac{a_5 - a_{2n}}{a_5 - a_4} \frac{a_3 - a_4}{a_3 - a_{2n}} = k_{35}^2$$

. . . .

$$z_2 = a_{2n-1} \qquad \frac{1}{\zeta_2} = \frac{a_{2n-1} - a_{2n}}{a_{2n-1} - a_4} \frac{a_3 - a_4}{a_3 - a_{2n}} = k_{3\,2n-1}^2$$

$$z_2 = a_1 \qquad \frac{1}{\zeta_2} = \frac{a_1 - a_{2n}}{a_1 - a_4} \frac{a_3 - a_4}{a_3 - a_{2n}} = k_{31}^2$$

$$z_2 = a_2 \qquad \frac{1}{\zeta_2} = \frac{a_2 - a_{2n}}{a_2 - a_4} \frac{a_3 - a_4}{a_3 - a_{2n}} = k_{32}^2,$$

u. s. w. endlich für die letzte

$$z_{n-1} = a_1 \qquad \frac{1}{\zeta_{n-1}} = \frac{a_1 - a_{2n}}{a_1 - a_{2n-2}} \frac{a_{2n-1} - a_{2n-2}}{a_{2n-1} - a_{2n}} = k_{2n-3\,1}^2$$

$$z_{n-1} = a_2 \qquad \frac{1}{\zeta_{n-1}} = \frac{a_2 - a_{2n}}{a_2 - a_{2n-2}} \frac{a_{2n-1} - a_{2n-2}}{a_{2n-1} - a_{2n}} = k_{2n-3\,2}^2$$

. . . .

$$z_{n-1} = a_{2n-3} \qquad \frac{1}{\zeta_{n-1}} = \frac{a_{2n-3} - a_{2n}}{a_{2n-3} - a_{2n-2}} \frac{a_{2n-1} - a_{2n-2}}{a_{2n-1} - a_{2n}} = k_{2n-3\,2n-3}^2;$$

diese $(n-1)(2n-3)$ Werthe k^2 werden Moduln genannt und vor

Allem die Beziehungen, die zwischen ihnen stattfinden, aufgesucht. Mit Hülfe der Substitution

$$a'_h = \frac{1}{a_h - a_{2n}}$$

erhält man leicht die Ausdrücke

$$k^2_{1h} = \frac{a'_2 - a'_1}{a'_2 - a'_h},\quad k^2_{3h} = \frac{a'_4 - a'_3}{a'_4 - a'_h},\quad \ldots\ldots\quad k^2_{2n-3h} = \frac{a'_{2n-2} - a'_{2n-3}}{a'_{2n-2} - a'_h}$$

und somit, wenn h und i weder 1 noch 2 sind,

$$a'_h - a'_2 = \frac{a'_1 - a'_2}{k^2_{1h}},\quad a'_i - a'_2 = \frac{a'_1 - a'_2}{k^2_{1i}}$$

also

$$a'_i - a'_h = (a'_1 - a'_2)\left(\frac{1}{k^2_{1i}} = \frac{1}{k^2_{1h}}\right);$$

daraus ergiebt sich aber sofort für alle von 1 und 2 verschiedenen h

$$k^2_{3h} = \frac{k^2_{14} - k^2_{13}}{k^2_{14} - k^2_{1h}}\,\frac{k^2_{1h}}{k^2_{13}},$$

$$k^2_{5h} = \frac{k^2_{16} - k^2_{15}}{k^2_{16} - k^2_{1h}}\,\frac{k^2_{1h}}{k^2_{15}},\quad \ldots\ldots\quad k^2_{2n-3h} = \frac{k^2_{12n-2} - k^2_{12n-3}}{k^2_{12n-2} - k^2_{1h}}\,\frac{k^2_{1h}}{k^2_{12n-2}}.$$

Um den Fall $h = 1$ und $= 2$ zu erledigen, beachte man, dass

$$k^2_{32} = \frac{a'_4 - a'_3}{a'_4 - a'_2},\quad k^2_{31} = \frac{a'_4 - a'_3}{a'_4 - a'_1}$$

ist und dass, wenn oben $h = 4$, $i = 3$ gesetzt wird,

$$a'_3 - a'_4 = (a'_1 - a'_2)\left(\frac{1}{k^2_{13}} - \frac{1}{k^2_{14}}\right) \text{ und } a'_4 - a'_1 = (a'_1 - a'_2)\left(\frac{1}{k^2_{14}} - 1\right)$$

wird, so dass

$$k^2_{32} = \frac{k^2_{13} - k^2_{14}}{k^2_{13}},\qquad k^2_{31} = \frac{k^2_{13} - k^2_{14}}{k^2_{13}\left(1 - k^2_{14}\right)}$$

und ähnlich

$$k^2_{52} = \frac{k^2_{15} - k^2_{16}}{k^2_{15}},\qquad k^2_{51} = \frac{k^2_{15} - k^2_{16}}{k^2_{15}\left(1 - k^2_{16}\right)}$$

u. s. w., endlich

$$k^2_{2n-32} = \frac{k^2_{12n-3} - k^2_{12n-2}}{k^2_{12n-3}},\quad k^2_{2n-31} = \frac{k^2_{12n-3} - k^2_{12n-2}}{k^2_{12n-3}\left(1 - k^2_{12n-2}\right)}$$

folgen. Somit sind *sämmtliche* Moduln durch die Modulreihe

$$k_{13}^2, k_{14}^2, \ldots k_{12n-1}^2$$

ausgedrückt, also durch $2n-3$ Moduln, die offenbar von einander unabhängig sind, da sie ausser a_1' und a_2' jeder eine andere Grösse $a_3', a_4', \ldots a_{2n-1}'$ enthalten und diese von einander unabhängige Grössen vorstellen.

Richelot stellt sich nun die Aufgabe, die hyperelliptischen Integrale erster, zweiter und dritter Gattung mit Hülfe der oben eingeführten Moduln in trigonometrische Form umzusetzen und zwar definirt derselbe als Integrale erster, zweiter und dritter Gattung nach Herrn Weierstrass (Theorie der Abel'schen Functionen, Journal für Mathematik) die Integrale

$$\int \frac{dz}{z-a_{2h}} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \int \frac{dz}{z-a_{2h-1}} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \int \frac{dz}{z-a} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

worin

$$P(z) = -a_{2n}(z-a_2)(z-a_4)\ldots(z-a_{2n-2})$$
$$Q(z) = (z-a_1)(z-a_3)\ldots(z-a_{2n-1})(z-a_{2n})$$

und a eine willkürliche Zahl ist. Ich will bemerken, um eine Vergleichung mit den von Riemann definirten Integralen der drei Gattungen zu gestatten, dass die von Richelot aufgenommenen Integrale *erster* Gattung

$$\int_{a_{1p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a_2} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \int_{a_{1p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a_4} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}, \ldots \int_{a_{1p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a_{2n-2}} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

für *alle* Punkte der zu $\sqrt{R(z)}$ gehörigen Riemann'schen Fläche endlich sind, die Integrale *zweiter* Gattung

$$\int_{a_{1p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a_1} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \int_{a_{1p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a_3} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}, \ldots \int_{a_{1p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a_{2n-1}} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

nur in den resp. Verzweigungspunkten $a_1, a_3, \ldots a_{2n-1}$ algebraisch unendlich und zwar von der $-\frac{1}{2}$ten Ordnung werden, während endlich die Integrale *dritter* Gattung

$$\int_{a_{1p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

nur im Punkte $z = a$ und zwar auf beiden Blättern logarithmisch unendlich werden.

Setzt man nach Richelot

$$\zeta_1 = \sin^2\varphi_1 = \frac{z_1 - a_2}{z_1 - a_{2n}} \cdot \frac{a_1 - a_{2n}}{a_1 - a_2}$$

$$\zeta_2 = \sin^2\varphi_2 = \frac{z_2 - a_4}{z_2 - a_{2n}} \cdot \frac{a_3 - a_{2n}}{a_3 - a_4}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\zeta_{n-1} = \sin^2\varphi_{n-1} = \frac{z_{n-1} - a_{2n-2}}{z_{n-1} - a_{2n}} \cdot \frac{a_{2n-1} - a_{2n}}{a_{2n-1} - a_{2n-2}}$$

und führt zuerst die erste Transformation durch, welche mit Weglassung des Index 1 bei z und φ die Form hat

$$\frac{z - a_2}{z - a_{2n}} \cdot \frac{a_1 - a_{2n}}{a_1 - a_2} = \sin^2\varphi,$$

so folgt durch logarithmisches Differentiiren

$$\frac{2\cos\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = (a_2 - a_{2n})\, \frac{dz}{(z - a_2)(z - a_{2n})}$$

oder

$$2d\varphi = \sqrt{-(a_1 - a_{2n})(a_2 - a_{2n})}\, \frac{dz}{z - a_2} \left(\frac{z - a_2}{z - a_1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{z - a_{2n}}$$

wofür, weil

$$\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{(z - a_2)(z - a_4)\ldots(z - a_{2n-2})}{(z - a_1)(z - a_3)\ldots(z - a_{2n-1})} \cdot \frac{-a_{2n}}{z - a_{2n}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist, auch

$$\left(\frac{a_{2n}}{(a_1 - a_{2n})(a_2 - a_{2n})}\right)^{\frac{1}{2}} 2d\varphi \left(\frac{(z - a_4)\ldots(z - a_{2n})}{(z - a_3)\ldots(z - a_{2n-1})}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{dz}{z - a_2} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

gesetzt werden kann.

Beachtet man nun aber, dass, weil

$$\frac{z - a_{2h}}{z - a_{2h-1}} = C_h \cdot \frac{1 - k_{12h}^2 \sin^2\varphi}{1 - k_{12h-1}^2 \sin^2\varphi}$$

sein muss und sich hieraus wegen der entsprechenden Werthe $z = a_2$, $\varphi = 0$

$$C_h = \frac{a_2 - a_{2h}}{a_2 - a_{2h-1}}$$

ergiebt,

$$\frac{z - a_{2h}}{z - a_{2h-1}} = \frac{a_2 - a_{2h}}{a_2 - a_{2h-1}} \cdot \frac{1 - k_{12h}^2 \sin^2\varphi}{1 - k_{12h-1}^2 \sin^2\varphi}$$

folgt, so wird jeder Factor des obigen Ausdruckes für $h = 2, 4, \cdots 2n-1$ trigonometrisch umgeformt sein, nur für $h = n$ wird, wie leicht zu sehen,

$$\frac{z-a_{2n}}{z-a_{2n-1}} = \frac{a_2-a_{2n}}{a_2-a_{2n-1}} \frac{1}{1-k^2_{12n-1}\sin^2\varphi}$$

sein, und man wird somit auch den vorher gefundenen Ausdruck gelten lassen können, wenn man nur $k_{12n} = 0$ setzt; man erhält somit

$$\frac{(z-a_4)(z-a_6)\cdots(z-a_{2n})}{(z-a_3)(z-a_5)\cdots(z-a_{2n-1})} = \prod_2^n{}^h\left(\frac{a_2-a_{2h}}{a_2-a_{2h-1}}\right)\prod_2^n{}^h\left(\frac{1-k^2_{12h}\sin^2\varphi}{1-k^2_{12h-1}\sin^2\varphi}\right),$$

so dass sich, wenn

$$2\frac{a_{2n}}{a_1-a_{2n}}\left(\frac{(a_2-a_4)(a_2-a_6)\cdots(a_2-a_{2n-2})}{(a_2-a_3)(a_2-a_5)\cdots(a_2-a_{2n-1})}\right)^{\frac{1}{2}} = M_{12}$$

gesetzt wird, mit Wiedereinführung der Grössen z_1 und φ_1 der gesuchte Ausdruck

$$\int_{a_2}^{z_1}\frac{dz_1}{z_1-a_2}\left(\frac{P(z_1)}{Q(z_1)}\right)^{\frac{1}{2}} = M_{12}\int_0^{\varphi_1}d\varphi_1\prod_2^n{}^h\left(\frac{1-k^2_{12h}\sin^2\varphi_1}{1-k^2_{12h-1}\sin^2\varphi_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ergiebt. Zur Umformung des Integrales

$$\int_{a_2}^{z_1}\frac{dz_1}{z_1-a_{2r-2}}\left(\frac{P(z_1)}{Q(z_1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

braucht man nur vor der Integration die obige Gleichung mit

$$\frac{z_1-a_2}{z_1-a_{2r-2}} = C_{2r-2}\frac{\sin^2\varphi_1}{1-k^2_{12r-2}\sin^2\varphi_1}$$

zu multipliciren, in welcher offenbar

$$C_{2r-2} = -k^2_{12r-2}\frac{a_{2n}-a_2}{a_{2n}-a_{2r-2}}$$

sein muss, und erhält somit

$$\int_{a_2}^{z_1}\frac{dz_1}{z_1-a_{2r-2}}\left(\frac{P(z_1)}{Q(z_1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{a_{2n}-a_2}{a_{2n}-a_{2r-2}}M_{12}\int_0^{\varphi_1}\frac{k^2_{12r-2}\sin^2\varphi_1\,d\varphi_1}{1-k^2_{12r-2}\sin^2\varphi_1}\prod_2^n{}^h\left(\frac{1-k^2_{12h}\sin^2\varphi_1}{1-k^2_{12h-2}\sin^2\varphi_1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

In dem Falle, dass $R(z)$ nur $2n-1$ lineare Factoren hat, ändert sich nichts als dass man überall $a_{2n} = \infty$ zu setzen und den Grenzwerth zu nehmen hat, wobei die Factoren

$$\frac{a_{2n} - a_2}{a_{2n} - a_{2r}}$$

der Einheit gleich werden.

Um nun die übrigen Integrale erster Gattung in $z_2, z_3, \ldots z_{n-1}$ ebenso umzuformen, hat man nur nöthig die Indices

$$1,\ 3,\ 5, \ldots .\ 2n-3,\ 2n-1$$

und die Indices

$$2,\ 4,\ 6, \ldots .\ 2n-4,\ 2n-2$$

cyclisch zu vertauschen, und erhält allgemein

$$\int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p - a_{2r}} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{a_{2n} - a_{2p}}{a_{2n} - a_{2r}} M_{2p-1\,2p} \int_0^{\varphi_p} \frac{k^2_{2p-1\,2r} \sin^2\varphi_p \, d\varphi_p}{1 - k^2_{2p-1\,2r} \sin^2\varphi_p} \prod_1^n{}_{(p)} \left(\frac{1 - k^2_{2p-1\,2\lambda} \sin^2\varphi_p}{1 - k^2_{2p-1\,2\lambda-1} \sin^2\varphi_p}\right)^{\frac{1}{2}};$$

so sind $(n-1)^2$ Integrale erster Gattung in die canonische Form umgesetzt.

Die hyperelliptischen Integrale zweiter Gattung werden ebenso einfache Formen annehmen; man braucht nur vor der Integration der ersten Reihe mit

$$\frac{z_1 - a_2}{z_1 - a_{2r-1}} = -\frac{a_{2n} - a_2}{a_{2n} - a_{2r-1}} \cdot \frac{k^2_{12r-1} \sin^2\varphi_1}{1 - k^2_{12r-1} \sin^2\varphi_1}$$

zu multipliciren und erhält

$$\int_{a_1}^{z_1} \frac{dz_1}{z_1 - a_{2r-1}} \left(\frac{P(z_1)}{Q(z_1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{a_{2n} - a_2}{a_{2n} - a_{2r-1}} M_{12} \int_0^{\varphi_1} \frac{k^2_{12r-1} \sin^2\varphi_1 \, d\varphi_1}{1 - k^2_{12r-1} \sin^2\varphi_1} \prod_1^n \left(\frac{1 - k^2_{12\lambda} \sin^2\varphi_1}{1 - k^2_{12\lambda-1} \sin^2\varphi_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

oder wieder durch cyclische Vertauschung der Indices

$$\int\limits_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p - a_{2r-1}} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{a_{2n}-a_{2p}}{a_{2n}-a_{2r-1}} M_{2p-1\,2p} \int\limits_0^{\varphi_p} \frac{k^2_{2p-1\,2r-1}\sin^2\varphi_p}{1-k^2_{2p-1\,2r-1}\sin^2\varphi_p} \prod_1^n{}_{(p)}^{h} \left(\frac{1-k^2_{2p-1\,2h}\sin^2\varphi_p}{1-k^2_{2p-1\,2h-1}\sin^2\varphi_p}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Um endlich das hyperelliptische Integral dritter Gattung umzuformen, wird man vor der Integration der ersten Reihe mit

$$\frac{z_1 - a_2}{z_1 - a}$$

zu multipliciren haben; es mögen

$$z_1 = a \quad \text{und} \quad \zeta_1 = \frac{1}{k^2_{12}\sin^2\alpha_{12}}$$

vermöge der Substitution

$$\frac{z_1 - a_2}{z_1 - a_{2n}} \cdot \frac{a_1 - a_{2n}}{a_1 - a_2} = \zeta_1$$

entsprechende Werthe sein, so dass

$$\sin^2\alpha_{12} = \frac{1}{k^2_{12}} \frac{a - a_{2n}}{a - a_2} \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_{2n}}$$

wird, dann ergiebt sich

$$\frac{z_1 - a_2}{z_1 - a} = C \frac{\sin^2\varphi_1}{1 - k^2_{12}\sin^2\alpha_{12}\sin^2\varphi_1}$$

und daraus

$$\frac{a_{2n} - a_2}{a_{2n} - a} = -\frac{C}{k^2_{12}\sin^2\alpha_{12}},$$

so dass

$$\frac{z_1 - a_2}{z_1 - a} = -\sin^2\alpha_{12} \frac{a_{2n} - a_2}{a_{2n} - a} \frac{k^2_{12}\sin^2\varphi_1}{1 - k^2_{12}\sin^2\alpha_{12}\sin^2\varphi_1}$$

folgt. Bedenkt man ferner dass

$$\frac{a - a_2}{a - a_{2n}} = \frac{1}{k^2_{12}\sin^2\alpha_{12}} \cdot \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_{2n}} = 1 - \frac{a_2 - a_{2n}}{a - a_{2n}}$$

ist, so folgt mit Benutzung aller dieser Werthe

$$\int\limits_{a_2}^{z_1} \frac{dz_1}{z_1 - a} \left(\frac{P(z_1)}{Q(z_1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{1 - \frac{1}{k^2_{12}\sin^2\alpha_{12}} \cdot \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_{2n}}} M_{12} \int\limits_0^{\varphi_1} \frac{k^2_{12}\sin^2\alpha_{12}\sin^2\varphi_1\, d\varphi_1}{1 - k^2_{12}\sin^2\alpha_{12}\sin^2\varphi_1} \prod_2^n{}^{h} \left(\frac{1 - k^2_{12h}\sin^2\varphi_1}{1 - k^2_{12h-1}\sin^2\varphi_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

und wieder allgemein

$$\int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p - a} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{1-\dfrac{1}{k^2_{2p-1\,2p}\sin^2\alpha_{2p-1\,2p}}} \cdot \frac{a_{2p-1}-a_{2p}}{a_{2p-1}-a_{2n}} M_{2p-1\,2p} \int_0^{\varphi_p} \frac{k^2_{2p-1}\sin^2\alpha_{2p-1\,2p}\sin^2\varphi_p\, d\varphi_p}{1-k^2_{2p-1\,2p}\sin^2\alpha_{2p-1\,2p}\sin^2\varphi_p}$$

$$\times \prod_1^n{}_h{}_{(p}\left(\frac{1-k^2_{2p-1\,2h}\sin^2\varphi_p}{1-k^2_{2p-1\,2h-1}\sin^2\varphi_p}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alle diese Transformationsformeln gelten auch für den Fall, dass $R(z)$ vom $2n-1^{\text{ten}}$ Grade ist, wenn man nur $a_{2n} = \infty$ setzt und zu den Grenzwerthen übergeht.

Dresden. L. Königsberger.

Berichtigung:

p. 132 vorletzte Zeile: statt Maudel'schen lies Mandel'schen.

H. Schubert: Allgemeingültige Formeln und Vorstellungen der abzählenden Geometrie. (Erste Abhandlung der „Beiträge zur abzählenden Geometrie".) (Math. Ann. Bd. 10, S. 1—112.)

Die vorliegende Abhandlung ist die erste von drei Abhandlungen, welche aus der von der Königlichen Akademie zu Kopenhagen Januar 1875 gekrönten Preisschrift allmählich herausgewachsen sind. Das Thema dieser Preisschrift verlangte die Ausdehnung der *Charakteristikentheorie* auf die Systeme desjenigen geometrischen Gebildes, welches aus den Punkten und den Schmiegungsebenen einer *cubischen* Raumcurve besteht, und die Bestimmung der Charakteristiken der als elementar zu betrachtenden Systeme. Bei der Auffindung der Methoden, durch welche man die in diesem Thema steckenden Fragen zu lösen vermag, erkannte der Verfasser, dass allen geometrischen Anzahl-Bestimmungen gewisse *allgemeine Formeln* zu Grunde liegen, von denen man bisher nur wenige, z. B. das Chasles'sche Correspondenzprincip, aufgestellt hatte. Von diesen fundamentalen Formeln wird ein Theil im IIten Abschnitt der vorliegenden Abhandlung aus dem *Princip von der Erhaltung der Anzahl*, der andere Theil im IIIten Abschnitt aus dem *Chasles'schen Correspondenzprincip* abgeleitet, nachdem im Iten Abschnitt eine einheitliche Terminologie für die geometrischen Grundgebilde und Grundbedingungen, sowie eine gewisse *Symbolik* für gegebene Bedingungen entwickelt ist.

Der Abhandlung geht eine allgemeine Einleitung voran, in welcher der Verfasser die Entwickelung der Abzählungsmethoden seit der unter dem Namen „Charakteristikentheorie" bekannten Schöpfung Chasles' (Comptes rendus Februar 1864) darstellt, und zugleich angiebt, welche Stellung die Resultate der drei Abhandlungen, theils durch Form, theils durch Inhalt, gegenüber den bekannten Resultaten der abzählenden Geometrie einnehmen.

Die im ersten Abschnitt begründete Symbolik macht ein *Rechnen* mit Bedingungszeichen möglich, welches sich als sehr fruchtbringend erweist. Wir benutzen diese Symbolik auch in dem vorliegenden Referate, weil ohne dieselbe die Mittheilung auch nur der wichtigsten

Resultate der Abhandlung zu lang würde. Wir lassen die Regeln, auf denen die Symbolik fusst, hier folgen, mit dem Bemerken, dass die ersten Keime derselben sich bei Halphen finden im Bull. de la Soc. math. Tome I, Heft 5.

1) Sagt eine Bedingung nichts anderes aus, als dass mehrere von einander unabhängige Bedingungen zugleich erfüllt werden sollen, so heisst sie *zusammengesetzt*, im entgegengesetzten Falle *einzeln*. *Einzeln* heisst also namentlich auch die Gesammtheit zweier *von einander abhängiger* Bedingungen. Z. B. Für eine Plancurve ist die Bedingung P, durch einen gegebenen Punkt zu gehen, einzeln, ebenso die Bedingung μ, dass sie ihre Ebene durch einen gegebenen Punkt schicke, und die Bedingung ν, dass sie eine gegebene Gerade schneide. Einzeln ist auch die Bedingung, eine gegebene Fläche an zwei Stellen zu berühren. Zusammengesetzt ist die Bedingung, dass die Plancurve durch einen gegebenen Punkt gehe, und zugleich eine gegebene Gerade schneide.

2) Jede definirte einzelne Bedingung erhält als *Symbol* einen Buchstaben mit oder ohne unteren Index. Z. B. die eben definirten Bedingungen haben die Symbole P, μ, ν.

3) Das *Product* mehrerer Bedingungssymbole bedeutet diejenige zusammengesetzte Bedingung, welche verlangt, dass die von diesen Symbolen dargestellten Bedingungen *zugleich* erfüllt werden sollen. Z. B. $P\nu$ bedeutet für die erwähnte Plancurve, dass sie durch einen gegebenen Punkt gehen, und eine gegebene Gerade schneiden soll.

4) Die $n$te *Potenz* eines Bedingungssymbols bedeutet demgemäss, dass die von diesem Symbol bezeichnete Bedingung $n$mal erfüllt werden soll, wobei übrigens die gegenseitige Lage der n Gebilde, welche diese $n$mal zu erfüllende Bedingung etwa verursachen sollten, ganz willkürlich ist. Z. B. μ^3 bedeutet für die Plancurve, dass ihre Ebene durch drei beliebig gegebene Punkte gehe.

5) Giebt die Definition eines Gebildes demselben die *Constantenzahl* c — z. B. $c = \frac{n(n+3)}{2} - \delta - 2\varkappa$ bei einer Plancurve $n$ter Ordnung mit δ Doppelpunkten und $\varkappa$ Spitzen in fester Ebene —, so bildet die Gesammtheit aller derjenigen Gebilde dieser Definition, welche eine gewisse a*fache* einzelne oder zusammengesetzte Bedingung erfüllen, ein $(c-a)$*stufiges System*, das heisst eine Gesammtheit von ∞^{c-a} Elementen. Z. B. alle Kegelschnitte, welche die dreifache zusammengesetzte Bedingung $P\nu$ erfüllen, bilden ein System $(8-3)$ter Stufe.

6) Jeder $a$fachen Bedingung ist hinsichtlich eines hinzuzudenkenden Systems $a$ter Stufe eine gewisse *Anzahl zugehörig*, nämlich die Zahl derjenigen Gebilde des Systemes, welche diese Bedingung erfüllen. *Das Symbol einer Bedingung soll zugleich auch immer die so zugehörige Anzahl bedeuten.* Z. B. $P\nu$ bedeutet zugleich die *Anzahl* derjenigen Kegelschnitte eines dreistufigen Systems, welche die dreifache Bedingung $P\nu$ erfüllen.

7) Wenn hinsichtlich *jedes* $a$stufigen Systems eine Gleichung zwischen den Anzahlen besteht, welche gewissen Bedingungen zugehören, so nennen wir, der Kürze wegen, diese *Bedingungen selbst* durch die Gleichung von einander abhängig, und die Function, welche eine der Bedingungen von den andern abhängig darstellt, *Modul* dieser Bedingung. Z. B. für jede Plancurve $a$ter Ordnung sind die Bedingungen P, $\mu\nu$, μ^2 (vergl. 1)) von einander abhängig durch die unten folgende Relation:

$$P = \mu\nu - a \,.\, \mu^2.$$

8) Aus einer für ein Gebilde mit der Constantenzahl c aufgegestellten Gleichung $a$ter Dimension zwischen $a$fachen Bedingungssymbolen erhält man also immer eine Identität, wenn jedes dieser Symbole gleich der *Zahl* der Gebilde gesetzt wird, welche die von diesem Symbole dargestellte $a$fache Bedingung, und ausserdem eine beliebig gewählte einzelne oder zusammengesetzte $(c-a)$fache Bedingung erfüllen. Z. B. für die cubische Plancurve mit Doppelpunkt erhält man aus der in 7) angegebenen Gleichung eine Identität, wenn man jede der 3 zweifachen Bedingungen P, $\mu\nu$, μ^2 gleich der Zahl der Plancurven setzt, welche P, resp. $\mu\nu$, resp. μ^2 und ausserdem die Bedingung ν^9 erfüllen, d. h. 9 gegebene Gerade schneiden. Man hat nach des Verfassers Tabellen $P\nu^9 = 1392$, $\mu\nu^{10} = 2040$, $\mu^2\nu^9 = 216$. In der That ist:

$$1392 = 2040 - 3 \,.\, 216.$$

9) Hieraus folgt, dass bei einem Gebilde mit der Constantenzahl c die Richtigkeit einer Gleichung zwischen $a$fachen Bedingungssymbolen nicht beeinträchtigt wird, wenn jedem Symbole *ein und dasselbe*, sonst ganz willkürliche, etwa $b$fache Bedingungssymbol hinzugesetzt wird, oder, wie wir sagen, wenn die Gleichung mit der zugehörigen $b$fachen Bedingung *multiplicirt* wird. Daraus erwächst nämlich eine Gleichung $(a + b)$ter Dimension, aus welcher man immer eine Identität erhält, wenn jedes der $(a + b)$fachen Symbole gleich der Zahl der Gebilde gesetzt wird, welche die von

diesem Symbole dargestellte $(a+b)$fache Bedingung und ausserdem eine beliebig gewählte, einzelne oder zusammengesetzte $(c-a-b)$fache Bedingung erfüllen. Z. B. Aus der oben erwähnten Gleichung

$$P = \mu\nu - a\,.\,\mu^2$$

folgt unter anderen:

$$\mu\nu P = \mu^2\nu^2 - a\,.\,\mu^3\nu,$$
$$\mu^2 P = \mu^3\nu - a\,.\,\mu^4 = \mu^3\nu.$$

μ^4 war gleich Null zu setzen, weil durch 4 beliebige Punkte keine Ebene gelegt werden kann. Man erhält also auch durch Potenzirung mit 2 eine richtige Gleichung, nämlich:

$$P^2 = \mu^2\nu^2 - 2a\,.\,\mu^3\nu.$$

10) Bezeichnet ε die endliche Anzahl derjenigen Gebilde eines einstufigen Systems von Gebilden Γ, welche die Definition von Γ vollkommen erfüllen, dabei aber in einer angegebenen Weise *specieller* sind (*Ausartungen*), so soll εz die Zahl derjenigen Gebilde Γ bezeichnen, welche auf dieselbe Weise specieller sind und zugleich die Bedingung z erfüllen. Derartige Ausartungssymbole εz können auch in die eben besprochenen Gleichungen $a$ter Dimension, d. h. Gleichungen zwischen $a$fachen Bedingungen eintreten, nur dass z dann eine $(a-1)$fache Bedingung sein muss.

11) Soll eine Gleichung $a$ter Dimension nicht für alle, sondern *nur für gewisse* $a$stufige Systeme gelten, so muss dies besonders hervorgehoben werden. In diesem Falle erleiden die obigen Regeln über die symbolische Multiplication einige leicht erkennbare *Modificationen*.

Jedes beliebig definirte Gebilde von der Constantenzahl c kann als Raumelement aufgefasst werden. In Bezug auf dasselbe ist der Raum dann von c Dimensionen. Den modernen Anschauungen der Geometrie gemäss, werden Punkt, Ebene, Strahl mit den bezüglichen Constantenzahlen 3, 3, 4 als die drei *Hauptelemente* des Raumes betrachtet, und zwar alle drei mit völlig gleichem Anrecht auf Ursprünglichkeit. Jedes System von Hauptelementen heisst *Ort*. Es giebt also Punktörter und Ebenenörter nullter bis dritter Stufe, Strahlenörter nullter bis vierter Stufe. Die Oerter werden durch die endliche Anzahl — *Grad* — ihrer gemeinsamen Elemente mit gewissen speciellen Oertern, den sogenannten *Grundgebilden* charakterisirt. Für die Grundgebilde wird die aus der folgenden Tabelle ersichtliche Terminologie eingeführt.

Grundgebilde.

	des Punktes.	der Ebene.	des Strahls.
nullter Stufe	Punkt	Ebene	Strahl
erster Stufe	Punktaxe	Ebenenaxe	Strahlbüschel
zweiter Stufe	Punktfeld	Ebenenbündel	{Strahlenfeld Strahlenbündel}
dritter Stufe	Punktraum	Ebenenraum	Strahlenaxe
vierter Stufe			Strahlenraum

Jedes dieser 14 Grundgebilde erzeugt eine einem Orte auferlegbare *Grundbedingung*, nämlich diejenige, welche verlangt, dass der Ort mit diesem als gegeben betrachteten Grundgebilde *ein Element gemeinsam* haben soll. Die Namen der so erzeugten Grundbedingungen sind den Namen der 14 Grundgebilde nachgebildet, wie die folgende Zusammenstellung zeigt.

Grundbedingungen.

A. Für Punktörter.

p_0 Raumbedingung,
p_1 Feldbedingung c,
p_2 Axenbedingung c_g, ν,
p_3 Punktbedingung C, P, Π.

B. Für Ebenenörter.

e_0 Raumbedingung,
e_1 Bündelbedingung μ,
e_2 Axenbedingung μ_g, ν',
e_3 Ebenenbedingung M', P', Π'.

C. Für Strahlenörter.

s_0 Raumbedingung,
s_1 Axenbedingung g,
{s_2 Feldbedingung g_e, ϱ,
s_{II} Bündelbedingung g_p, ϱ',
s_3 Büschelbedingung g_s, t, β,
s_4 Strahlbedingung G, T, B, S.

Der Index i des jeder Grundbedingung vorgesetzten Symbols giebt an, dass ihre Dimension für einen Ort $a$ter Stufe $i-a$ ist.

Die nachgesetzten Symbole sind die für die folgenden Formeln vorzugsweise verwendeten, und zwar bezeichnet immer das $n$te Symbol die einem Orte $(n-1)$ter Stufe zugeschriebene Grundbedingung. Z. B. P bedeutet, dass ein Punktort erster Stufe, also eine Curve, durch einen gegebenen Punkt gehen soll; g_s bedeutet, dass ein Strahlenort nullter Stufe, d. h. eine Gruppe von endlich vielen Strahlen, aus einem gegebenen Strahlbüschel einen Strahl enthalten soll.

Ein Ort $a$ter Stufe, dessen Element die Constantenzahl c hat, hat mit jedem von demselben Elemente erzeugten Grundgebilde $b$ter Stufe ein System von ∞^{a+b-c} Elementen gemein, also eine endliche Anzahl, wenn $b=c-a$ ist. Diese endliche Anzahl heisst *Grad* des Ortes. Z. B. Bei einer Fläche $n$ter Ordnung $r$ten Ranges $m$ter Klasse ist der Punktort zweiter Stufe und $n$ten Grades, der Ort der Tangenten dritter Stufe und $r$ten Grades, der Ort der Tangentialebenen zweiter Stufe und $m$ten Grades. Eine Gruppe von a Punkten ist ein Punktort nullter Stufe $a$ten Grades. Ein Strahlenort zweiter Stufe *(Congruenz)* hat zwei Gradzahlen, den *Bündelgrad* und den *Feldgrad*. Ein Ort $a$ter Stufe, dessen Element die Constantenzahl c besitzt, hat mit einem von demselben Elemente erzeugten Grundgebilde $b$ter Stufe im Allgemeinen kein Element gemein, wenn $a+b<c$ ist; der Ort erfüllt vielmehr dadurch, dass er ein Element mit einem solchen Grundgebilde gemein hat, eine $(c-a-b)$-fache Grundbedingung.

Wenn ein Hauptelement selbst mit einem Buchstaben bezeichnet ist, so soll die diesem Hauptelement zukommende einfache Grundbedingung mit demselben Buchstaben, und die mehrfachen Grundbedingungen mit denjenigen Symbolen bezeichnet werden, welche aus diesem Symbole ebenso hervorgehen, wie die in obiger Tabelle nachgesetzten ersten Symbole aus c, μ, g hervorgehen. Z. B. Die Feldbedingung des Strahles h heisst h_e, seine Strahlbedingung H.

Ein Ort heisst einem Grundgebilde *incident**), wenn jedes seiner Elemente zugleich Element des Grundgebildes ist. Z. B. Eine Plancurve ist ihrer Ebene incident, sowohl wenn man die Curve als Punktort und die Ebene als Punktfeld, wie auch, wenn man die Curve als Ort ihrer Tangenten und die Ebene als Strahlenfeld auffasst.

*) Dieser Ausdruck ist in letzter Zeit von Sturm und Anderen eingeführt. Er lässt sich leicht von Oertern auf Systeme übertragen, die statt von Hauptelementen, von beliebigen Gebilden erzeugt werden.

Mit Hilfe der eingeführten Begriffe lässt sich jetzt der Inhalt des IIten und IIIten Abschnittes der vorliegenden Abhandlung kurz so angeben.

Der zweite Abschnitt entwickelt ausser den nahe liegenden Gleichungen, welche zwischen den sämmtlichen Grundbedingungen eines Hauptelements bestehen, namentlich die sämmtlichen Gleichungen, welche zwischen den Grundbedingungen aller möglichen Grundgebilde und den Grundbedingungen aller möglichen *ihnen incidenter Oerter* bestehen; dann folgen Anwendungen der gefundenen Formeln, welche zu neuen, für gewisse Fragen der abzählenden Geometrie wichtigen Resultaten führen.

Der dritte Abschnitt entwickelt die sämmtlichen Gleichungen, welche zwischen den Grundbedingungen eines aus zwei Hauptelementen bestehenden Gebildes Γ und den Grundbedingungen seiner Coincidenz bestehen, d. h. desjenigen specielleren Gebildes Γ, bei dem die beiden Hauptelemente *unendlich nahe liegen*. Die so gefundenen *Correspondenzformeln* erledigen die von Salmon und Zeuthen angebahnte Erweiterung des Chasles'schen Correspondenzprincipes vollständig. In den folgenden Anwendungen dieser Formeln werden mehrere bekannte, bisher ungelöste Probleme gelöst.

Die Quelle für die Formeln des zweiten Abschnittes ist einzig das *Princip von der Erhaltung der Anzahl* oder, wie es wegen seiner Anwendungen auch genannt werden könnte, das *Princip der speciellen Lage*. Dasselbe lautet:

„Die räumliche Lage der Gebilde, welche gewisse, einem Gebilde Γ auferlegte Bedingungen verursachen, ist für die Anzahl der Gebilde Γ, welche diese Bedingungen erfüllen, gleichgültig, sobald diese Anzahl überhaupt endlich bleibt."

Nach diesem Principe bleibt z. B. die Zahl der Strahlen, welche eine beliebige zweifache Bedingung Z erfüllen, und zwei gegebene Gerade schneiden, erhalten, wenn man diesen beiden gegebenen Geraden die specielle Lage zweier sich schneidender Geraden ertheilt, die Zahl ist also gleich der Summe der beiden Zahlen, von denen die erste angiebt, wieviel Strahlen Z erfüllen, und durch einen gegebenen Punkt gehen, die zweite angiebt, wieviel Strahlen Z erfüllen, und in einer gegebenen Ebene liegen.

Sobald man nach diesem Principe im zweiten Abschnitte die Formel niedrigster Dimension zwischen Grundbedingungen gewonnen hat, erhält man die Formeln höherer Dimension sehr leicht durch symbolische Multiplication mit den Grundbedingungen.

Die Formeln zwischen den Grundbedingungen eines Punktes c lauten (wegen der Bezeichnung der Grundbedingungen vergleiche man die obige Tabelle):

$$c^2 = c_g;\ c^3 = cc_g = C.$$

Für die Ebene μ reciprok:

$$\mu^2 = \mu_g;\ \mu^3 = \mu\mu_g = M.$$

Für den Strahl g

$$g^2 = g_p + g_e;$$
$$gg_p = gg_e = \tfrac{1}{2}g^3 = g_s;$$
$$gg_s = g_p^2 = g_e^2 = g^2 g_p = g^2 g_e = \tfrac{1}{2}g^4 = G;\ g_p g_e = 0.$$

Ist ein Punkt c und ein Strahl g einander incident, so hat man zunächst:

$$cg = c_g + g_e = c^2 + g_e.$$

Daraus folgt mit Benutzung der obigen Formeln durch symbolische Multiplication:

$$cg_p = C + g_s = c^3 + \tfrac{1}{2}g^3,$$
$$cg_s = Cg + G = c^3 g + \tfrac{1}{2}g^4.$$

Durch dualistische Uebertragung erhält man die analogen Formeln für eine Ebene μ und einen Strahl g, die einander incident sind.

Für einen Punkt c und eine Ebene μ, die einander incident sind, hat man:

$$c^3 - c^2\mu + c\mu^2 - \mu^3 = 0,$$

also auch

$$c^3\mu - c^2\mu^2 + c\mu^3 = 0.$$

Für zwei Strahlen g und h, die sich schneiden, lautet die Formel niedrigster Dimension zwischen den Grundbedingungen:

$$G - g_s h + g_p h_e + g_e h_p - g h_s + H = 0.$$

Daraus folgen:

$$Gh - g_s(h_p + h_e) + (g_p + g_e)h_s - gH = 0,$$
$$\begin{cases} Gh_p - g_s h_s + g_e H = 0, \\ Gh_e - g_s h_s + g_p H = 0, \end{cases}$$

und endlich:

$$Gh_s - g_s H = 0.$$

Diese Formeln sind ganz allgemein. Die beiden in Betracht kommenden Hauptelemente können also ganz beliebigen Systemen angehören. So giebt die obige Formel

$$c^3 = c^2\mu - c\mu^2 + \mu^3$$

z. B. für eine kubische Plancurve mit Spitze die Zahl derjenigen Curven, welche ihre Spitze in einem gegebenen Punkt haben, und eine beliebige 7fache Bedingung Z erfüllen, sobald man kennt erstens die Zahl derjenigen, welche Z erfüllen, ihre Spitze in einer gegebenen Geraden haben, und ihre Ebene durch einen gegebenen Punkt schicken, zweitens die Zahl derjenigen, welche Z erfüllen, ihre Spitze in einer gegebenen Ebene haben, und ihre Ebene durch eine gegebene Gerade schicken, drittens die Zahl derjenigen, welche Z erfüllen, und deren Ebene gegeben ist.

Aus den obigen Formeln resultiren die Formeln zwischen den Grundbedingungen eines Grundgebildes und denen eines demselben incidenten *Ortes* nullter Stufe $a$ten *Grades*, indem immer der Factor a zu denjenigen Gliedern hinzutritt, welche eine Grundbedingung dieses Ortes *gar nicht* enthalten. Z. B. Für einen Punktort nullter Stufe $a$ten Grades mit den Grundbedingungen c, c_g, C, welcher einem Punktfelde μ incident ist, hat man die Formel:

$$C - \mu c_g + \mu^2 c - a . \mu^3 = 0.$$

Auch die Formeln zwischen den Grundbedingungen eines Grundgebildes und denen eines ihm incidenten Ortes von *höherer* als der nullten Stufe haben einen gewissen Zusammenhang mit den obigen Stammformeln. Wir erwähnen hier nur die Gleichungen, welche die Grundbedingungen einer Ebene μ mit den Grundbedingungen ν, P des Punktorts, und mit den Grundbedingungen ϱ, ϱ', t, T des Tangentenorts (vgl. die obige Tabelle der Grundbedingungen) einer in dieser Ebene liegenden Plancurve $a$ter Ordnung $b$ten Ranges verbinden:

$$P = \mu\nu - a \cdot \mu^2,$$
$$\varrho' = b \cdot \mu,$$
$$t = \mu\varrho,$$
$$T = \mu^2\varrho - b \cdot \mu^3.$$

Von den Anwendungen, welche auf diese Formeln folgen, führen wir hier nur eine an. Bei einem einem Grundgebilde incidenten Orte nullter Stufe $a$ten Grades lassen sich diejenigen zusammengesetzten Grundbedingungen des Ortes, welche mehr als a symbolische Einzel-Factoren besitzen, durch diejenigen, welche a oder weniger als a Einzel-Factoren enthalten, und durch die Grundbedingungen des Grundgebildes ausdrücken. Die hierauf bezüglichen Formeln werden für einen in einer Ebene μ liegenden Strahlenort nullter Stufe dritten Grades (z. B. für die drei Wendetangenten einer kubischen

Plancurve mit Doppelpunkt, entwickelt. Es mögen f, f_p, f_e, f_s, F die Grundbedingungen dieses Strahlenorts bezeichnen. Dann hat man, den oben besprochenen Formeln gemäss:

$$
\begin{aligned}
f_p &= \mu f - 3\mu^2,\\
f_s &= \mu f_e - 3\mu^3,\\
F &= \mu^2 f_e - \mu^3 f.
\end{aligned}
$$

Hieraus werden auf verschiedenen Wegen alle Formeln gewonnen, welche die Symbole $f^m f_e^n$, wo $m + n > 3$ ist, durch die Symbole $f^m f_e^n$, wo $m + n < 3$ ist und durch die Potenzen von μ ausdrücken. Beispielsweise folgen hier zwei solcher Formeln:

$$
\begin{aligned}
f^6 - 15 f f_e^2 + 50\mu f^2 f_e - 60\mu f_e^2 + 15\mu^2 f^3 - 210\mu^2 f f_e - 90\mu^3 f^2 \\
+ 360\mu^3 f_e,
\end{aligned}
$$

$$
f^3 f_e^2 - 8\mu f_e^3 + 21\mu^2 f f_e^2 - 6\mu^3 f^2 f_e - 66\mu^3 f_e^2.
$$

Den Schluss des IIten Abschnitts bilden zwei weitere Anwendungen, deren Auseinandersetzung hier zuviel Raum kosten würde.

Der IIIte Abschnitt entwickelt die sämmtlichen Formeln zwischen den Grundbedingungen eines *aus zwei Hauptelementen zusammengesetzten Gebildes* und denen seiner *Coincidenz* d. h. desjenigen specielleren Gebildes, bei dem diese beiden Hauptelemente unendlich nahe sind. Die Hülfsmittel zur Ableitung dieser Formeln sind einzig und allein das ursprüngliche Chasles'sche Correspondenzprincip, die symbolische Multiplication, über welche oben gesprochen ist, und die auf dem Princip von der Erhaltung der Anzahl beruhenden Formeln des IIten Abschnitts. Sobald die letztern als bekannt angesehen werden, erscheinen die sämmtlichen hier entwickelten Correspondenz-Formeln als blosse *[illegible] der Chasles'schen* [illegible]. Damit ist dann, wie schon erwähnt ist, die [illegible] des Correspondenz-Princips in der von Salmon und [illegible] angebahnten Richtung vollständig erfolgt. Wir lassen [illegible] Correspondenzformeln für das Punktepaar* und das [illegible] mit dem Bemerken, dass aus den ersten Formeln [illegible] schon [illegible] werden können.

Die beiden Punkte eines Punktepaars seien [illegible] und [illegible] ihr Ver-

* [illegible]

bindungsstrahl g, so dass, gemäss den obigen Festsetzungen, seine einzelnen Grundbedingungen sind:

$$c, c^2, c^3, d, d^2, d^3, g, g_e, g_p, g_s, G.$$

Die Coincidenz dieses Punktepaares heisse ε und zwar mögen bei ε die Punkte c und d im Punkte b unendlich nahe liegen. Dann gelten folgende Formeln:

$$(1)\quad c + d - g = \varepsilon,$$
$$(2)\quad c^2 + d^2 + g_e - g_p = \varepsilon g,$$
$$(3)\quad cd - g_e = \varepsilon b,$$
$$(4)\quad c^3 + d^3 + g_s = \varepsilon g_p,$$
$$(5)\quad cdg - g_s = \varepsilon bg = \varepsilon g_e + \varepsilon b^2,$$
$$(6)\quad c^2 d + cd^2 - cdg = \varepsilon b^2.$$

Daraus folgen andere durch Eliminationen, z. B.

$$(7)\quad c^3 + cd + d^2 - g_p = \varepsilon b + \varepsilon g,$$
$$(8)\quad c^3 + c^2 d + cd^2 + d^3 = \varepsilon g_p + \varepsilon bg + \varepsilon b^2.$$

An diese Formeln schliesst sich eine Erörterung über die Uebersetzung derselben in Worte*), wobei namentlich darauf aufmerksam gemacht wird, dass die Coincidenz des Punktepaars in drei Gattungen zerlegt werden kann, je nachdem man als Verbindungsstrahl jeden aus einer endlichen Anzahl von Strahlen, oder jeden aus ∞^1, oder jeden aus ∞^2 durch die Coincidenzstelle gehenden Strahlen aufzufassen hat. Im zweiten Falle erfüllt die Coincidenz die Grundbedingung g, im dritten Falle die Grundbedingung g_p *von selbst*. Fasst man z. B. jeden Punkt einer Fläche mit jedem Punkt einer Raumcurve als Punktepaar zusammen, so erhält man ein dreistufiges System von Punktepaaren, dessen Coincidenzen in den Schnittpunkten der Fläche und der Raumcurve liegen, und zwar derartig, dass *jeder* durch einen Schnittpunkt gelegte Strahl als Verbindungsstrahl einer Coincidenz aufzufassen ist. Folglich erfüllt hier jede Coincidenz die Bedingung g_p von selbst.

Auf die Behandlung des Punktepaars folgt eine sehr eingehende Behandlung des *Strahlenpaars*. Die beiden Strahlen desselben heissen g und h. Es giebt ∞^2 Strahlen, deren jeder g und h zugleich schneidet. Die von diesen schneidenden Strahlen gebildete *lineare Congruenz* habe die Grundbedingungen β und B, wo β resp. B bedeutet, dass die Congruenz einen ihrer Strahlen in einem gegebenen

---

*) In einer Abhandlung, welche im XI. Bande der Math. Ann. (S. 323) erscheint, sind viele Punktepaar-Formeln *in Worten* ausgesprochen.

Strahlbüschel resp. in einem gegebenen Strahle besitze. Die Coincidenz dieses Strahlenpaars heisse ε, und zwar mögen bei ε die beiden Strahlen g und h im Strahle k unendlich nahe liegen. Eine zweite Ausartung σ des Strahlenpaars entsteht dadurch, dass die beiden Strahlen g und h im Schnittpunkte c und der Schnittebene μ sich schneiden, ohne im allgemeinen unendlich nahe zu sein. Eine höhere Ausartung $\varepsilon\sigma$ entsteht dadurch, dass g und h sich schneiden, und zugleich unendlich nahe sind. Zwischen g, h, β, σ, ε bestehen die beiden Beziehungen:

(9) $$g + h - \beta = \varepsilon,$$

(10) $$\beta = \sigma + \varepsilon.$$

Von Formeln höherer Dimension erwähnen wir:

(11) $\beta^2 = B + g_e + h_e + c\sigma,$

(12) $\beta^2 = B + g_p + h_p + \mu\sigma,$

(13) $gh = B + k\varepsilon,$

(14) $gh_e + g_e h = \mu^2\sigma + \varepsilon k_e - \varepsilon k_p + \varepsilon\beta k,$

(15) $gh_p + g_p h = c^2\sigma + \varepsilon k_p - \varepsilon k_e + \varepsilon\beta k,$

(16) $g_s + \frac{1}{2}g^2 h + \frac{1}{2}gh^2 + h_s + \frac{1}{2}(\mu - c)^2\sigma = \varepsilon\beta^2 - \varepsilon\beta k + 2\varepsilon k^2,$

(17) $g_e h_e = \mu^3\sigma + \varepsilon\beta k_e - \varepsilon k_s,$

(18) $g_p h_p = c^3\sigma + \varepsilon\beta k_p - \varepsilon k_s,$

(19) $G + g_s h + g_e h_e + g_p h_p + gh_s + H = \varepsilon\beta^3 - 2\varepsilon\beta^2 k + 3\varepsilon\beta k^2$
$= \varepsilon\sigma\mu c + \varepsilon\beta k^2 + \varepsilon k^3 = \varepsilon\sigma\mu c + \frac{1}{2}\varepsilon\sigma k^2 + 4\varepsilon k_s,$

(20) $g_s\sigma + h_s\sigma + \mu^3\sigma + c^3\sigma = \varepsilon\sigma\mu c.$

Die Formel (19) repräsentirt das Correspondenzprincip im Strahlenraume. Im Anschluss an diese Entwicklungen wird darauf aufmerksam gemacht, dass gerade so wie zwischen den Grundbedingungen eines Kegelschnitts und zwischen denen einer quadratischen Fläche*) gewisse allgemeine Relationen bestehen, dass so auch die Grundbedingungen einer linearen Congruenz durch gewisse Beziehungen mit einander verbunden sind. Von diesen ist die Beziehung niedrigster Dimension folgende:

$$\beta(\beta^2 - B)(\beta^2 - 3B) = 0.$$

In ähnlicher Weise werden dann das aus Punkt und Strahl, sowie das aus Punkt und Ebene bestehende Paar behandelt.

---

*) Man vergleiche des Verfassers Abhandlung über Moduln bei Flächen zweiter Ordnung, Math. Ann. Bd. X, S. 318, oder das Referat hier S. 364.

Aus den Strahlenpaar-Formeln ergeben sich unmittelbar alle Zahlen, welche angeben, wieviel lineare Congruenzen ihre beiden erzeugenden Axen irgend welche Grundbedingungen erfüllen lassen, zugleich gegebenen Strahlbüscheln Strahlen zuführen, und dabei auch gegebene Strahlen enthalten. Von solchen Zahlen führen wir hier beispielsweise an, dass es 14 lineare Congruenzen giebt, welche jedem von 8 gegebenen Strahlbüscheln einen Strahl zuzuführen vermögen, und dass es 38 lineare Congruenzen giebt, welche jedem von 6 gegebenen Strahlbüscheln einen Strahl zuführen, und dabei jede ihrer beiden erzeugenden Axen einen gegebenen Strahl schneiden lassen.

Eine zweite Anwendung der Strahlenpaar-Formeln constatirt die Abhängigkeit der auf das Sturm'sche Problem der räumlichen Projectivität (Math. Ann. Bd. VI) bezüglichen Anzahlen von einander, und bestimmt einige neue, diesem Probleme angehörige Anzahlen.

Hierauf folgt die Aufdeckung des natürlichen Zusammenhangs der Correspondenz-Formeln für ein Paar von Gebilden mit den *Productensätzen* dieses Gebildes. Unter Productensatz ist nämlich im allgemeinen jeder Satz zu verstehen, welcher Bedingungen des Systems derjenigen Elemente, welche zweien von ein und demselben Elemente erzeugten Systemen *gemeinsam* sind, durch Bedingungen dieser beiden Systeme ausdrückt, im speciellen Falle also die *Zahl* der zweien Systemen gemeinsamen Elemente durch Anzahlen ausdrückt, welche jedem dieser beiden Systeme angehören. Die Productensätze für Systeme von Punkten und Ebenen stecken in dem Bezout'schen Satze vom Grade der Eliminationsgleichung. Die Productensätze für Systeme von Strahlen sind erst von Halphen präcis aufgestellt (Comptes rendus Bd. 68, S. 141 und Bd. 74, S. 41) und von ihm und Zeuthen bewiesen. Hier ergiebt sich jeder Productensatz für Hauptelemente als ein sehr specieller Fall einer der obigen Correspondenzformeln, indem immer alle Glieder der linken Seite bis auf eins oder zwei verschwinden. An die Ablesung der Produktensätze aus den Correspondenzformeln wird ein aus dieser Ablesung resultirender Beweis des Halphen'schen Satzes angeschlossen, in welchem von der Bedingungssymbolik und den Formeln des Verfassers absichtlich nichts vorausgesetzt wird.

Die Punktepaar-Formel erster Dimension

$$c + d - g = \varepsilon$$

löst ohne Schwierigkeit die bis dahin ungelösten, von Salmon auf-

gestellten (Salmon-Fiedler's Raumgeometrie II. Th., II. Aufl., Artikel 447) Probleme β, γ, δ, ε, ζ.

Es ergeben sich folgende Zahlen:

Eine Fläche *nter* Ordnung besitzt

$$5n(n-4)(7n-12)$$

fünfpunktig berührende Tangenten; und

$$2n(n-4)(n-5)(n+6)(3n-5)$$

an einer Stelle vierpunktig, an einer andern Stelle zweipunktig berührende Tangenten; und

$$\tfrac{1}{3}n(n-4)(n-5)(n^3+3n^2+29n-60)$$

an zwei Stellen dreipunktig berührende Tangenten; und

$$\tfrac{1}{2}n(n-4)(n-5)(n-6)(n^3+9n^2+20n-60)$$

an einer Stelle dreipunktig und an zwei Stellen zweipunktig berührende Tangenten; und

$$\tfrac{1}{12}n(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n^3+6n^2+7n-30)$$

an vier Stellen zweipunktig berührende Tangenten.*) Diese Resultate sind vom Verfasser zugleich auch durch die Gött. Nachr. (Februar 1876) publicirt. Inzwischen hat derselbe die Untersuchungen über die Tangenten-Singularitäten der Fläche *nter* Ordnung fortgesetzt in den Math. Ann. Bd. 11, S. 323. Eine weitere Anwendung der Punktepaar-Formeln führt zu den Anzahlen, welche sich auf die Berührung von Elementen zweier Curven- oder Flächen- Systeme erster Stufe beziehen. Von diesen Anzahlen stecken einige in den von Fouret aufgestellten Formeln für die implexes de surfaces. Hier mag als Beispiel folgender Satz Platz finden:

„Die Berührungspunkte von allen möglichen zwei sich berührenden Flächen zweier Flächensysteme $(\mu_1, \nu_1, \varrho_1)$ und $(\mu_2, \nu_2, \varrho_2)$ bilden eine Raumcurve vom Grade:

$$\mu_1\varrho_2 + \mu_2\varrho_1 + \nu_1\nu_2 + \mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1.\text{“}$$

Die Abhandlung schliesst mit der Besprechung der eigentlichen Charakteristikentheorie der drei Hauptelemente, welche durch die bekannten Productensätze erledigt ist.

Die beiden anderen Abhandlungen der „Beiträge zur abzählenden Geometrie“, welche auf diese erste Abhandlung bald folgen sollten, sind noch immer nicht publicirt, weil eine zeitraubende Amtsthätig-

*) Inzwischen hat der Verfasser die analogen Zahlen für den Liniencomplex *n*ten Grades bestimmt. (Math. Ann.)

keit dem Verfasser wenig Zeit für die Redaction seiner Untersuchungen übrig lässt.

Die zweite Abhandlung bestimmt, wie schon in dieser ersten angegeben wird, für die Plancurve dritter Ordnung mit Spitze sachlich alle Zahlen, welche angeben, wieviel solcher Curven im Raume alle möglichen *fundamentalen Bedingungen* erfüllen. Unter fundamentaler Bedingung wird jede Bedingung verstanden, welche für die Ebene der Curve, oder für ihren Punktort, oder für ihren Tangentenort oder für die 3 Ecken und die 3 Seiten ihres *Singularitäten-Dreiecks* Grundbedingungen sind, wo unter Singularitäten-Dreieck das aus Spitze, Rückkehrtangente, Wendepunkt, Wendetangente gebildete Dreieck zu verstehen ist. Bei dieser Gelegenheit werden auch die 13 fundamentalen *Ausartungen* dieser Curven mit ihren Eigenschaften, sowie gewisse räumliche Beziehungen des Singularitäten-Dreiecks aufgefunden. In derselben Weise wird in dieser Abhandlung die Plancurve dritter Ordnung mit Doppelpunkt behandelt.

Die dritte Abhandlung findet bei der *kubischen Raumcurve* 11 verschiedene Ausartungen, sowie deren Eigenschaften. Ferner werden hier von den 5374 Elementarzahlen der kubischen Raumcurve 5335 sachlich bestimmt, wo unter Elementarzahl jede Zahl zu verstehen ist, die angiebt, wieviel Curven durch gegebene Bedingungen bestimmt sind, welche für ihren Punktort, ihren Tangentenort und ihren Schmiegungsebenenort *Grundbedingungen* sind. Von diesen Zahlen greifen wir, um Beispiele zu geben, einige beliebig heraus.

Es giebt 2200800 kubische Raumcurven, welche 6 gegebene Ebenen berühren, und 6 gegebenen Punkten Tangenten zuschicken,

Es giebt 288360 kubische Raumcurven, welche 8 gegebene Ebenen berühren und durch 4 gegebene Geraden Schmiegungsebenen schicken;

Es giebt 11424 kubische Raumcurven, welche durch 1 gegebenen Punkt gehen und 10 gegebenen Punkten Tangenten zuschicken;

Es giebt 144 kubische Raumcurven, welche durch 3 gegebene Punkte gehen, 2 gegebene Ebenen zu Schmiegungsebenen haben, und 2 gegebene Ebenen berühren.

Hamburg. H. Schubert.

H. Schubert: Moduln vielfacher Bedingung bei Flächen zweiter Ordnung. (Math. Ann. Bd. X, S. 318—364.)

Für ein $a$stufiges System von quadratischen Flächen F_2 bezeichne immer das Symbol

$$\mu^b \nu^c \varrho^{a-b-c}$$

die Zahl derjenigen Flächen des Systems, welche durch b gegebene Punkte gehen, c gegebene Gerade und $a-b-c$ gegebene Ebenen berühren. Jedes dieser

$$\tfrac{1}{2}(a+1)(a+2)$$

Symbole heisse eine *afache Charakteristik* der F_2. Ferner soll ein elementarer *Modul* einer der F_2 auferlegten $a$fachen Bedingung B_a eine solche ganze lineare Function der a-fachen Charakteristiken bedeuten, welche in *jedem* beliebigen $a$stufigen Systeme die Zahl der die Bedingung B_a befriedigenden Flächen auszudrücken vermag, oder, was dasselbe ist, welche angiebt, wieviel Flächen die Bedingung B_a und ausserdem eine ganz *beliebig* gewählte $(9-a)$fache Bedingung Z erfüllen, sobald man für jedes in dem Modul vorhandene Symbol

$$\mu^b \nu^c \varrho^{a-b-c}$$

die Anzahl der Flächen einsetzt, welche durch b gegebene Punkte gehen, c gegebene Gerade berühren, $a-b-c$ gegebene Ebenen berühren, und ausserdem jene Bedingung Z erfüllen.

Durch diese Definition gewinnen gewisse von Halphen (Bull. de la Soc. math. de France, tome II, und Comptes rendus, Band 76, S. 1074—1077) ausgesprochene Resultate folgende Gestalt:

„*Jede einer F_2 auferlegte afache Bedingung besitzt einen elementaren Modul.*"

Die Richtigkeit dieses Satzes*) für $a = 1$ war schon von Chasles beobachtet. Von *vielfachen* unzerlegbaren Bedingungen jedoch waren bisher nur sehr wenige hinsichtlich ihrer elementaren Moduln untersucht.

In der vorliegenden Abhandlung leitet deshalb der Verfasser die elementaren Moduln einer grossen Gruppe solcher Bedingungen ab. Die dieser Gruppe angehörigen Bedingungen, welche *Paar-*

*) Sein Analogon für Kegelschnitte ist in letzter Zeit namentlich von Lindemann (Vorles. üb. Geom. von Clebsch, S. 403 u. f.), von Halphen (Comptes rendus, 4 sept., 13 nov. 1876) und von Schubert (Gött. Nachr. November 1876) besprochen.

bedingungen genannt werden, erhält man in folgender Weise. Man ordne von den ∞^1 in einer F_2 liegenden Geraden je zwei sich schneidende einander zu. So erhält man ∞^2 der F_2 angehörige *Geradenpaare*. Folglich ist jede Bedingung, welche eine F_2 dadurch erfüllt, dass eines ihrer ∞^2 Geradenpaare eine $(a + 2)$fache Bedingung erfüllt, für die F_2 $a$fach. So erwachsen der F_2 aus den 3- bis 7fachen *Grundbedingungen* des Geradenpaars gewisse 1- bis 5fache Bedingungen, welches die untersuchten *Paarbedingungen* sind. Dabei war unter Grundbedingung des Geradenpaares jede Bedingung zu verstehen, welche sich aus Grundbedingungen*) der 4 Hauptelemente des Geradenpaares, nämlich seiner beiden Geraden, deren Schnittpunkt und deren Schnittebene, zusammensetzt.

Durch die auch in den Math. Ann. Bd. X, S. 27 u. f. aufgestellten, allgemeinen Beziehungen zwischen den Grundbedingungen *incidenter* Hauptelemente, gelingt es dem Verfasser, die sämmtlichen Paarbedingungen durch gewisse unter ihnen, welche Hauptbedingungen genannt werden, auszudrücken. Die sämmtlichen Hauptbedingnngen setzen sich aus μ, ν, ϱ und 7 Hauptbedingungen zusammen, welche *wesentliche* genannt werden. Für die 7 wesentlichen Hauptbedingungen erhält der Verfasser die folgenden elementaren Moduln:

1) Die Bedingung γ, dass die F_2 eine gegebene Ebene in irgend einem Punkte einer auf der Ebene gegebenen Geraden berühren soll, hat den Modul:

$$\gamma = \tfrac{1}{2}\,\nu\varrho.$$

2) Die hierzu reciproke Bedingung γ', dass die F_2 eine gegebene Gerade in einem auf ihr gegebenen Punkte berühren soll, hat den Modul:

$$\gamma' = \tfrac{1}{2}\,\nu\mu.$$

3) Die Bedingung δ, dass die F_2 einen Strahl eines gegebenen Strahlbüschels enthalte, hat den Modul:

$$\delta = \tfrac{1}{2}\,\mu\varrho.$$

4) Die Bedingung x, dass die F_2 eine gegebene Gerade enthalte, hat den zuerst von Hurwitz in Hildesheim bestimmten Modul:

$$x = \tfrac{1}{4}\,[2\nu^3 - 3\nu^2\mu - 3\nu^2\varrho + 3\nu\mu^2 + 2\nu\mu\varrho + 3\nu\varrho^2 - 2\mu^3 - 2\varrho^3].$$

*) Die Definition der Grundbedingungen der Hauptelemente ist in des Verfassers „Beiträgen zur abzählenden Geometrie" (Math. Ann. Bd. X, S. 18) und auch in dem, in dieser Zeitschrift befindlichen Referate über diese Abhandlung angegeben.

Die Bedingung w, dass die F_2 eine gegebene Ebene in einem auf ihr gegebenen Punkte berühre, hat den Modul:

$$w = \frac{1}{8}\,[-2\nu^3 + 3\nu^2\mu + 3\nu^2\varrho - 3\nu\mu^2 - 3\nu\varrho^2 + 2\mu^3 + 2\varrho^3].$$

6) Die Bedingung y, dass die F_2 eine gegebene Gerade enthalten und dabei eine gegebene, durch die Gerade gehende Ebene in einem gegebenen, auf der Geraden liegenden Punkte berühren soll, hat unendlich viele elementare Moduln, welche man sämmtlich erhält, wenn man in:

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{8}\,[&2\nu^3\mu + 2\nu^3\varrho - 3\nu^2\mu^2 - 6\nu^2\mu\varrho - 3\nu^2\varrho^2 + 2\nu\mu^3 + 6\nu\mu^2\varrho \\ &+ 6\nu\mu\varrho^2 + 2\nu\varrho^3 - 4\mu^3\varrho - 4\mu\varrho^3] \\ &+ \alpha_1 . V + \alpha_2 W \end{aligned}$$

den beiden willkürlichen Coefficienten α_1 und α_2 alle möglichen Werthe beilegt, und

$$\begin{aligned} V \equiv\; & 2\nu^4 - 5\nu^3\mu - 5\nu^3\varrho + 6\nu^2\mu^2 + 8\nu^2\mu\varrho + 6\nu^2\varrho^2 \\ & - 4\nu\mu^3 - 6\nu\mu^2\varrho - 6\nu\mu\varrho^2 - 4\nu\varrho^3 + 4\mu^3\varrho + 4\mu\varrho^3, \\ W \equiv\; & 2\nu^3\mu - 2\nu^3\varrho - 3\nu^2\mu^2 + 3\nu^2\varrho^2 + 2\nu\mu^3 - 2\nu\varrho^3 \end{aligned}$$

einsetzt.

7) Die Bedingung Z, dass die F_2 zwei gegebene, sich schneidende Gerade enthalten soll, hat unendlich viele elementare Moduln, welche man sämmtlich erhält, wenn man in

$$\begin{aligned} Z = \frac{1}{16}\,[&2\nu^5 - \nu^4\mu - \nu^4\varrho + 2\nu^2\mu^3 - 2\nu^2\mu^2\varrho - 2\nu^2\mu\varrho^2 \\ &+ 2\nu^2\varrho^3 - 4\nu\mu^4 + 6\nu\mu^3\varrho + 6\nu\mu\varrho^3 - 4\nu\varrho^4 \\ &- 4\mu^4\varrho - 4\mu\varrho^4] \\ &+ \beta_1 . \nu V + \beta_2 . \mu V + \beta_3 . \varrho V \\ &+ \beta_4 . \nu W + \beta_5 . \mu W + \beta_6 . \varrho W \\ &+ \beta_7 . \mu^4 (2\mu - \nu) + \beta_8 . \varrho^4 (2\varrho - \nu) \end{aligned}$$

den 8 willkürlichen Coefficienten $\beta_1 \ldots . \beta_8$ alle möglichen Werthe beilegt, und für V und W die eben unter 6) angegebenen Functionen einsetzt. Die Mittel zur Ableitung dieser und der Moduln der übrigen Paarbedingungen werden dem Verfasser geliefert sowohl durch die allgemeinere Fassung, welche derselbe im III. Abschnitte seiner „Beiträge zur abzählenden Geometrie“ dem *Correspondenzprincipe* giebt, wie auch durch das *Princip von der Erhaltung der Anzahl* (Beitr. z. abz. Geom. §. 7).

Die willkürlichen Coefficienten, welche bei den oben angegebenen Moduln für y und für z auftreten, weisen darauf hin, dass zwischen den 15 *vierfachen* Charakteristiken der F_2 2 und *nicht mehr* als 2 von einander unabhängige Relationen bestehen, nämlich

$$V = 0 \text{ und } W = 0,$$

und dass zwischen den 21 *fünffachen* Charakteristiken 8 und *nicht mehr* als 8 von einander unabhängige Relationen bestehen, nämlich die 6, welche sich aus $V = 0$ und $W = 0$ durch Multiplication mit μ, ν, ϱ ergeben, und ausserdem:

$$2\mu^5 - \mu^4\nu = 0 \text{ sowie}$$
$$2\varrho^5 - \varrho^4\nu = 0.$$

Es sind also höchstens 13 vierfache und höchstens 13 fünffache Charakteristiken von einander unabhängig. Im Anschluss an diese Resultate beweist der Verfasser den allgemeinen Satz, dass bei jedem Gebilde mit der Constantenzahl c die höchste Zahl der von einander unabhängigen $a$fachen Charakteristiken gleich der höchsten Zahl der von einander unabhängen $(c-a)$fachen Charakteristiken ist. Da ferner gezeigt wird, dass zwischen den 3 einfachen, den 6 zweifachen und den 10 dreifachen Charakteristiken der F_2 keine Relationen bestehen, so giebt jener Satz das Resultat, dass zwischen den 28 sechsfachen Charakteristiken 18, zwischen den 36 siebenfachen 30, zwischen den 45 achtfachen Charakteristiken 42 von einander unabhängige Relationen bestehen müssen. Diese Relationen kann man durch gewisse Eliminationen aus den Elementarzahlen (Borch. J. Bd. 71, S. 383) der F_2 leicht erhalten.

Diese Resultate für die F_2 hängen mit den analogen Resultaten für den *Kegelschnitt im Raume* durch eine der drei *Ausartungen* der F_2 zusammen, nämlich durch diejenige, auf welcher die Punkte zwei zusammenfallende Ebenen bilden, und die Tangenten die sämmtlichen ∞^3 Secanten eines in ihnen liegenden *Kegelschnitts* sind.

Die Charakteristiken des Kegelschnitts im Raume setzen sich aus den 3 Bedingungen m, n, r zusammen, wo m bedeutet, dass der Kegelschnitt seine Ebene durch einen gegebenen Punkt schicke, n bedeutet, dass er eine gegebene Gerade schneide, r bedeutet, dass er eine gegebene Ebene berühre.

Der Verfasser findet, dass zwischen den 3 einfachen und den 6 zweifachen Charakteristiken des Kegelschnitts keine Relation besteht, dass aber zwischen den 10 dreifachen Charakteristiken eine, und *nur* eine Relation besteht. Diese heisst:

$$K \equiv 2n^3 - 3n^2r + 3nr^2 - 2r^3 - 6mn^2 + 4mnr + 12m^2n - 8m^2r = 0.$$

Aus dieser Formel erhält man die speciellere, in Clebsch-Lindemann's Werke auf S. 406 mit Nr. 11 bezeichnete Cremona-

Halphen'sche Formel, wenn man die Ebene des Kegelschnitts als fest annimmt, d. h. $m = 0$ setzt.

Zwischen den 14 vierfachen Charakteristiken bestehen 4, und *nur* 4 von einander unabhängige Relationen, nämlich ausser

$$mR = 0, \; nR = 0, \; rR = 0$$

noch eine von diesen unabhängige. Daraus folgt nun, dass beim Kegelschnitt im Raume höchstens:

3 einfache, 6 zweifache, 9 dreifache, 10 vierfache

Bedingungen von einander unabhängig sind, woraus wir mit Hilfe des oben erwähnten allgemeinen Satzes ferner schliessen können, dass auch höchstens

3 siebenfache, 6 sechsfache, 9 fünffache

Bedingungen von einander unabhängig sein können.

Hamburg. H. Schubert.

E. Bertini: Sistema simultaneo di due forme biquadratiche binarie (pubblicato nel giornale di Napoli t. XIV e riprodotto nei Mathematische Annalen t. XI).

I metodi esposti nella importantissima opera di Clebsch *Theorie der binären algebraischen Formen* sono applicati alla ricerca del sistema simultaneo di due forme biquadratiche. Si dimostra che questo sistema si può ridurre a sole 30 forme, proprietà gia data da Gordan (Math. Ann. t. 2 p. 273). Si stabiliscono inoltre varie relazioni sussistenti fra le forme del sistema e in particolare quella unica che ha luogo fra gli otto invarianti.

E. Bertini: Sopra una classe di trasformazioni univoche involutorie. (Annali di Matematica t. VIII.)

Lo scopo di questo lavoro è la determinazione delle trasformazioni univoche, le quali sono anche involutorie (cioè tali che due punti si corrispondono in doppio modo), nel caso particolare studiato da Jonquières (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1864), nel quale alle rette corrispondono curve di ordine n aventi a comune un

punto $(n-1)^{uplo}$ e $2(n-1)$ punti semplici. Lo studio di tutti i casi che si possono presentare conduce alle seguenti proprietà, nelle quali per curva punteggiata unita s'intende una curva, di cui ciascun punto corrisponde a se stesso:

a) Ogni trasformazione involutoria di Jonquières che ammette una curva punteggiata unita di genere $p>0$, è deducibile con successive trasformazioni quadratiche dalla trasformazione involutoria d' ordine $p+2$ che ammette una curva punteggiata unita d' ordine $p+2$ con un (solo) punto p^{plo} nel punto $(p+1)^{uplo}$ della trasformazione.

b) Ogni altra trasformazione involutoria di Jonquières è deducibile con successive trasformazioni quadratiche dall' omologia armonica.

Si osserva ancora che ogni trasformazione univoca involutoria che ammette una curva punteggiata unita di ordine n è necessariamente una trasformazione di Jonquières.

Pisa. E. Bertini.

Lüroth: Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen. (Zweite Abhandlung.) (Math. Annalen Bd. XI. S. 84.)

Die erste Abhandlung obigen Titels (erschienen im VIII. Bande, S. 145 der math. Annalen) giebt eine Darstellung der von v. Staudt vorgeschlagenen Darstellung des Imaginären in der Geometrie und des von demselben Geometer erfundenen Rechnens mit Würfen. Die oben angeführte zweite Abhandlung beschäftigt sich mit einer von Klein vorgeschlagenen Interpretation des Imaginären mit Hilfe cyklisch-projectivischer Punktreihen. Der erste Theil der Arbeit ist der näheren, rein geometrischen Betrachtung dieser Punktgruppen gewidmet. Sind mit $a_1\, a_2 \ldots a_n$ die Punkte einer Gruppe bezeichnet, so heisst sie *cyklisch-projectivisch*, wenn $a_1\, a_2 \ldots a_n \,\overline{\wedge}\, a_2\, a_3 \ldots a_n$ ist. Es zeigt sich, dass die Gruppe vollständig und eindeutig bestimmt ist, wenn drei, in der Geraden aufeinanderfolgende Punkte derselben gegeben sind, und dass jeder andere, nicht zur Gruppe gehörige Punkt der Geraden eine neue Gruppe bestimmt, von der gesagt wird, sie gehöre mit der gegebenen zu derselben *cyklischen Involution*. Bei der Betrachtung von cyklisch-projectivischen Punktgruppen eines



Kegelschnittes ergiebt sich eine vollständige Analogie mit den regulären Polygonen, die einem Kreis eingeschrieben sind, indem jede cyklisch-projectivische Gruppe auf einem Kegelschnitt aus den Ecken eines regulären Polygons durch Projection abgeleitet werden kann. In Folge dessen gehört, wie zu jedem regulären Kreispolygon die unendlich ferne Gerade, so zu jeder cyklischen Involution eines Kegelschnittes eine Gerade, die umgekehrt, wenn sie gegeben ist, die cyklische Involution eindeutig bestimmt.

Im zweiten Theil der Arbeit wird der Nachweis geführt, dass mit Hilfe der cyklisch-projectivischen Gruppen eine consequente Interpretation des Imaginären in der Geometrie durchgeführt werden kann, bei der, ebenso wie bei der v. Staudt'schen, die für reelle Gebilde gültigen Sätze ihre Gültigkeit beibehalten, und die, bei blosser Anwendung des Reellen bleibenden, Ausnahmen beseitigt werden.

Karlsruhe. Lüroth.

Lüroth: Vergleichung zweier Werthe des wahrscheinlichen Fehlers. (Astron. Nachrichten Nr. 2078, Bd. 87.)

Gegenstand dieser Abhandlung ist wesentlich die Vergleichung der Wurzel $\varrho = 0{,}47694$ der Gleichung

$$\int_0^{\varrho} e^{-x^2}\, dx = \int_{\varrho}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

mit der Wurzel ϱ_p der Gleichung

$$\int_0^{\varrho_p} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{p}{2}+1}} = \int_{\varrho_p}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{p}{2}+1}},$$

in der p eine positive ganze Zahl bezeichnet. Es ergiebt sich durch einen allgemeineren Satz über Wurzeln solcher Gleichungen einfach, dass

$$\varrho_p > \varrho \sqrt{\frac{2}{p+2}};$$

dagegen, auf einem complicirteren Wege, die genauere Begrenzung

$$\varrho \sqrt{\frac{2}{p+1}} < \varrho_p < \varrho \sqrt{\frac{2}{p}}.$$

Die Zahl ϱ wird gebraucht bei Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers bei p überschüssigen Beobachtungen, wenn man das Präcisionsmaass als bekannt annimmt, während ϱ_p anzuwenden ist bei unbestimmt gelassenem Präcisionsmaasse.

Karlsruhe. Lüroth.

M. Noether: Zur Eliminationstheorie. (Sitzungsber. der phys.-med Soc. in Erlangen am 4. Dec. 1876.)

Ein algebraisches Gebilde, von m Dimensionen und vom Grade μ, das durch irgend ein System von Gleichungen zwischen den Variabeln

$$x_1, x_2, \ldots . x_r$$

gegeben ist, kann, mittelst Elimination einiger der Variabeln, durch ein Gleichungssystem der Form definirt werden:

$$f(x_1, x_2, .. x_{m+2}) = 0, \varphi x_{m+3} = \psi_{m+3}, \ldots, \varphi x_r = \psi_r,$$

wo, wenn $(x_1 = x_2 = \ldots = x_{m+2} = 0)$ kein Werthsystem des Gebildes ist, f eine homogene Function μ^{ter}, die ψ solche Functionen ϱ^{ter}, φ eine solche $(\varrho - 1)^{ter}$ Ordnung von $x_1, x_2, .. x_{m+2}$ sind.

Für das Schnittgebilde zweier solcher Gebilde, bez. von den Dimensionen m, n und den Graden μ, ν, existirt der Satz, *dass der Grad desselben* $= \mu . \nu$ ist (vorausgesetzt, dass $m + n \geqq r - 1$, und dass die beiden Gebilde nicht ein solches von wenigstens $m + n - r + 2$ Dimensionen gemein haben). Aber dieser Satz war bisher nicht streng bewiesen worden. Erst H. Halphen hat in einem Aufsatze im Bull. d. l. Soc. math. d. France, t. II, p. 34, die Idee zu einem Beweis gegeben, indem er durch Zufügung weiterer Variabeln und einer Reihe von linearen Gleichungen die Eliminationsaufgabe auf eine solche von *einer* Variabeln aus *zwei* Gleichungen zurückzubringen sucht. In der vorliegenden Note wird der Beweis in einer für alle Fälle gültigen, strengen Gestalt geführt.

Erlangen. M. Noether.

Helmert: Ueber die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler und über einige damit im Zusammenhange stehende Fragen. (Zeitschr. f. Math. u. Phys. v. Schönmilch, 1876. S. 192—218.)

Die absoluten Werthe von n Beobachtungsfehlern (wahren Fehlern) seien $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$, die Summe ihrer m^{ten} Potenzen $n\sigma_m$, der durchschnittliche Werth aller möglichen $n\sigma_m$ gleich nS_m. Die Wahrscheinlichkeit, dass $[\varepsilon^m]$ zwischen $n\left(\sigma_m - \frac{\delta_m}{2}\right)$ und $n\left(\sigma_m + \frac{\delta_m}{2}\right)$ liege, werde mit $\varphi(\sigma_m)_n \delta_m$ bezeichnet. Hierdurch ist zugleich die Wahrscheinlichkeit der Differenz $S_m - \sigma_m = w_m$ charakterisirt. Betrachtet man aber verschiedene hohe Potenzsummen, so sind offenbar deren w_m nicht vergleichbar. An Stelle der Abweichungen w_m setzt man daher besser andere, v_m, wofür

$$\sqrt[m]{\sigma_m} = \sqrt[m]{S_m}\,(1 + v_m).$$

Der vorliegende Aufsatz beschäftigt sich damit, zunächst die einfachen Fälle zu betrachten, wo $n = 1$ oder 2, $m = 1$, 2 oder 3 ist und die Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers ε entweder constant ist oder der Gauss'schen Exponentialfunction folgt. Für diese Fälle werden die Wahrscheinlichkeitsfunctionen $\varphi(\sigma)$ und $\varphi(v)$ abgeleitet und letztere auch graphisch dargestellt. Die weitere Behandlung der Fälle $n > 2$ und $m > 3$ ist unterlassen und nur der Fall $m = 2$ für beliebiges n, als zu eleganter Formel führend, behandelt.

Ist h die Präcision der Beobachtungen, so wird für diesen Fall

$$\varphi(\sigma_2)_n \delta_2 = \frac{h^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (n\sigma_2)^{\frac{n}{2} - 1} e^{-h^2 n \sigma_2} n \delta_2$$

$$\varphi(v_2)_n dv_2 = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} (1 + v_2)^{n-1} e^{-\frac{n}{2}(1 + v_2)^2} dv_2$$

$$v_2 > -1.$$

Die Annäherung an die Gauss'sche Fehlerfunction ist Gegenstand weiterer Untersuchung. Da sie evident ist, die andern nicht behandelten Fälle aber ein ganz ähnliches Verhalten andeuten, so ist auch für diese einigermaassen der Grad der Annäherung an diese Function bei wachsendem n charakterisirt. Mit Hülfe von Discontinuitätsfactoren wird schliesslich für beliebig denkbares Fehler-

gesetz noch nachgewiesen, dass die in Rede stehenden Wahrscheinlichkeitsfunctionen, wenn nur n nicht zu klein ist, die Form der Gauss'schen Function annehmen.

Zwei vorletzte §§. des Aufsatzes beschäftigen sich mit der *Frage der günstigsten Hypothesen zur Berechnung des Genauigkeitsmaasses.* Man kann sich die Fälle hierbei sehr verschieden denken. Zur *absolut günstigsten Hypothese* kann man nur gelangen, wenn alle ε einzeln gegeben sind. Bei constanter Fehlerwahrscheinlichkeit setzt man dann den

Maximalbeob.-Fehler $a =$ dem beobachteten grössten ε.

Bei Vorhandensein des Gauss'schen Fehlergesetzes ist dagegen bekanntlich nach Gauss zu nehmen die Präcision

$$h = \sqrt{\frac{n}{2[\varepsilon^2]}}.$$

Sind die Fehler einzeln nicht gegeben, sondern nur $[\varepsilon]$ oder $[\varepsilon^2]$ oder irgend eine andere Potenzsumme, so erhält man nur eine *relativ günstigste* Hypothese.

Ist die Fehlerwahrscheinlichkeit *constant*, so ist zu setzen

$$a = \sqrt[m]{(m+1)\,\sigma_m}, \text{ falls } n \text{ gross.}$$

Bei kleinen n gilt diese Formel nicht. Man hat

$$a = \varepsilon \text{ für } n = 1,\ m \text{ beliebig}$$

$$a = \sqrt[m]{2\sigma_m} \text{ für } n = 2,\ m = 1 \text{ bis } 3.$$

Diese günstigste Berechnung scheitert für $n > 2$ daran, dass es schwer ist, allgemeine Formeln zu gewinnen. Man wird sich daher begnügen, eine *praktisch bequeme* Hypothese zu substituiren und annehmen, dass σ_m gleich S_m sei; für grosse n erhält man damit zugleich wieder die relativ günstigste Hypothese. Man setzt also

$$a = \sqrt[m]{(m+1)\,\sigma_m}$$

und hat den Exponenten m möglichst hoch zu nehmen (falls man die Wahl hat), um der besten Hypothese möglichst nahe zu kommen.

Besteht das *Gauss'sche Fehlergesetz* für die Beobachtungsfehler ε, so ist

$$\left.\begin{aligned} h^m &= \frac{\alpha}{\sigma_m}\left(1 + \frac{\beta - \alpha^2}{\alpha^2 n}\right) \\ h^m &= \frac{\alpha}{\sigma_m} \text{ genähert,} \end{aligned}\right\} n \text{ gross,}$$

wobei

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}},\quad m = 1,$$



$$\alpha = 1 . 2 . 3 \ldots \left(\frac{m-1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \; m \text{ ungerade}$$

$$\alpha = 1 . 3 . 5 \ldots (m-1) \, 2^{-\frac{m}{2}}, \; m \text{ gerade}$$

$$\beta = 1 . 3 . 5 \ldots (2m-1) \, 2^{-m}.$$

Ist n klein, so geben diese Formeln nicht die relativ günstigste Hypothese, da man diese aber für beliebige kleine n nicht ermitteln kann, behält man die Formeln als praktisch-bequeme Hypothese bei, was um so zulässiger ist, als dieselbe sich der relativ-günstigsten mit wachsendem n rasch zu nähern scheint.

Ein letzter § giebt nun noch *den wahrscheinlichen Fehler der Hypothesen* an (für Gauss'sches Gesetz der Beobachtungsfehler). Ist σ_m gegeben, so sind bei grossen n die wahrscheinlichen Grenzen von h und der wahrscheinlichste Werth desselben (s. o.)

$$\sqrt[m]{\frac{\alpha}{\sigma_m}} \left(1 \mp 0{,}6745 \sqrt{\frac{\beta - \alpha^2}{n m^2 \alpha^2}}\right).$$

Durch Betrachtung des Falles $n = 1$, $m = 1$ bis 3, wird noch gezeigt, dass diese Formel auch bei kleinen n als eine Näherung brauchbar ist.

Helmert: Die Genauigkeit der Formel von Peters zur Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers directer Beobachtungen gleicher Genauigkeit. — Die Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers aus den Quadraten der Verbesserungen directer Beobachtungen gleicher Genauigkeit und die Fechner'sche Formel. — Die Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers aus den ersten Potenzen der Differenzen gleich genauer directer Beobachtungen. (Astronomische Nachr. Nr. 2096—2097, Bd. 88, S. 115.)

Die Peters'sche Formel lautet: es ist der wahrscheinliche Beobachtungsfehler

$$\varrho = 0{,}84535 \frac{[\text{val. abs. } \lambda]}{\sqrt{n(n-1)}},$$

wo λ die Verbesserungen der n Beobachtungswerthe auf ihr arithmetisches Mittel sind. Der mittlere Fehler dieser Bestimmung von ϱ wird nun zunächst in der Abhandlung aufgesucht und gefunden gleich

$$\pm\varrho\sqrt{\frac{\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{n-1}-n+\sqrt{n(n-2)}}{n}}$$

oder in immer ausreichender Näherung

$$\pm\varrho\sqrt{\frac{\pi-2}{2(n-1)}}.$$

Hiernach berechnet sich derselbe gleich (je nach der angewandten Formel)

$\pm$ 0,756 ϱ	oder 0,756 ϱ	bei $n =$ 2
0,525	0,534	3
0,430	0,436	4
0,373	0,378	5
0,250	0,252	10
0,756 : $\sqrt{n-1}$		∞

Der wahrscheinliche Fehler in der Bestimmung von ϱ folgt hieraus durch Multiplication mit 0,67449 solange n gross ist; ist $n = 2$, so hat man ihn nach dieser Regel gleich $\pm$ 0,510ϱ, während eine strenge Ableitung $\pm$ 0,443ϱ ergiebt.

Die günstigste Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers ϱ erfolgt mittelst des mittlern Fehlerquadrates μ^2 nach den Formeln:

$$\varrho = 0{,}67449\,\mu$$

$$\mu^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{n-1}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}\right).$$

Das Wurzelglied in den Parenthesen ist selbst wieder der mittlere Fehler der Bestimmung. Diese Formeln werden scharf begründet bezw. verbessert. Zunächst wird zu dem Zweck die Wahrscheinlichkeit des Fehlersystems $\lambda_1 \ldots\ldots \lambda_n$ abgeleitet und gefunden

$$\sqrt{n}\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} e^{-h^2[\lambda\lambda]}\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{n-1}.$$

Daraus folgt sofort als günstigste Hypothese für h^2 oder μ^2

$$\frac{1}{2h^2} = \frac{[\lambda\lambda]}{n-1} = \mu^2.$$

Als Wahrscheinlichkeit einer Summe $[\lambda\lambda] = \sigma$ ergiebt sich weiter derselbe Werth, wie für die Wahrscheinlichkeit einer Quadratsumme $[tt]$ von $n - 1$ wahren Fehlern t gleich σ zu sein, d. i. nach der oben citirten Abh. in Schlöm. Zeitschr.

$$\frac{h^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sigma^{\frac{n-3}{2}} e^{-h^2\sigma} d\sigma.$$

Hiermit berechnet sich nun auch der mittlere Fehler in der Bestimmung von μ, den die oben angegebene Formel nicht correct giebt, trotzdem der mittlere Fehler für μ^2 ganz richtig ist, weil sie aus diesem unter der nicht immer zulässigen Voraussetzung berechnet ist, dass derselbe klein sei. Man erhält genauer

$$\varrho = 0{,}67449 \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}$$

mit dem mittlern Fehler

$$\pm \varrho \sqrt{2 - \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sqrt{\frac{8}{n-1}}}.$$

Folgende Tabelle zeigt den mittlern Fehler in der Bestimmung von ϱ, berechnet nach der ältern und nach der zuletzt angegebenen Formel:

$\pm$ 0,707 ϱ	und $\pm$ 0,636 ϱ	bei $n =$	2
0,500	0,477		3
0,408	0,397		4
0,354	0,346		5
0,236	0,234		10
$0{,}707 : \sqrt{n-1}$			∞.

Aus diesem mittleren Fehler folgt der wahrscheinliche durch Multiplication mit 0,67449, wenn n gross ist; ist $n = 2$, so giebt diese Regel $\pm$ 0,477 ϱ anstatt des strengen Werthes $\pm$ 0,382 ϱ.

Fechner hatte im Jubelbande von Pogg. Ann. folgende Formel angegeben:

$$\varrho = 0{,}67449\ [\text{val abs}\ \lambda] \sqrt{\frac{\pi}{n(\pi + 2n - 4)}}.$$

Diese Formel wird in der Abh. streng abgeleitet und gefunden

$$\varrho = 0{,}67449\ [\text{val abs}\ \lambda] \sqrt{\frac{\pi : (n-1)}{\pi + 2 \arcsin \frac{1}{n-1} + 2\sqrt{n(n-2)}}}.$$

Es ist jedoch kein irgend erheblicher Unterschied zwischen diesem und dem Fechner'schen Ausdruck, den man auch wie folgt schreiben kann:

$$\varrho = 0{,}84535 \frac{[\text{val abs } \lambda]}{\sqrt{n\left(n - \frac{4-\pi}{2}\right)}}.$$

Diese Formel schliesst sich für kleine n eng an die beste Berechnung von ϱ an, im Gegensatz zur Peters'schen Formel. Für grosse n fällt sie mit dieser zusammen. Der mittlere Fehler in dieser Berechnung von ϱ wird gleich

$$\pm \varrho \sqrt{2 - \sqrt{\frac{8(n-1)}{\pi + 2n - 4}}}$$

also

$\pm$ 0,636 ϱ bei $n =$ 2
0,486 3
0,408 4
0,359 5
0,246 10
0,756 : $\sqrt{n-1}$ ∞

Der wahrscheinliche Fehler folgt hieraus bei grossen n durch Multiplication mit 0,67449; bei $n = 2$ giebt diese Regel $\pm$ 0,477 ϱ anstatt des strengen $\pm$ 0,382 ϱ.

Der letzte Theil der Abhandlung giebt strenge Beweise einer von Herrn von Andrae aufgestellten Formel für die Berechnung von ϱ, die derselbe nur aus einer unvollständigen Induction gezogen. Es ist, wenn $[d]$ die Summe der $\frac{n(n-1)}{2}$ Beobachtungsdifferenzen (nach dem absoluten Werth genommen) bezeichnet

$$\varrho = 0{,}84535 \frac{[d]\sqrt{2}}{n(n-1)}$$

mit dem mittleren Fehler

$$\pm \varrho \sqrt{\frac{\frac{n+1}{3}\pi + 2(n-2)\sqrt{3} - 4n + 6}{n(n-1)}}.$$

Speziell hat man den letztern gleich

$\pm$ 0,756 ϱ bei $n =$ 2
0,525 3
0,425 4
0,366 5
0,241 10
0,715 : $\sqrt{n-1}$ ∞.

Ist n klein, so ist *Fechner's Formel* schon der Genauigkeit wegen vorzuziehen; wegen ihrer weit grösseren Bequemlichkeit wird man sie *immer vorziehen.*

Der wahrscheinliche Fehler in der Bestimmung von ϱ folgt aus dem mittleren durch Multiplication mit 0,67449; ist $n = 2$ so giebt diese Regel $\pm$ 0,510 ϱ anstatt des strengen Werthes $\pm$ 0,443 ϱ.

Helmert. Untersuchung über den Einfluss eines regelmässigen Fehlers im Gange der Ocularröhre des Visirfernrohrs auf Messungen, insbesondere auf das geometrische Nivellement. (Zeitschr. des Arch. und Ing.-Ver. zu Hannover. XXII. Heft 3.)

Eine mündliche Mittheilung des Herrn Director Cohen Stuart aus Delft verfolgend, untersucht Verf. den Einfluss einer Abweichung der Richtung der Bewegung der Ocularröhre von einer corrigirten Visiraxe. Es findet sich, dass ein aus Zielhöhendifferenzen abgeleitetes Nivellementsresultat frei von den durch die Bewegung der Ocularröhre entstehenden Fehlern bleibt, solange diese Bewegungen als geradlinig angesehen werden können und sobald entweder die corrigirte Visiraxe sich auf eine Ocularstellung für sehr entfernte Objecte bezieht, oder die Summen der Rück- und Vorwärts-Zieldistanzen gleich gross genommen werden.

Bislang fehlte bei der Theorie des Nivellements geradezu jede Untersuchung in dieser Beziehung, und man nahm nur an, dass ein Nivellirinstrument auf richtige Ocularröhrenbewegung untersucht sein müsse, ohne von dem Falle eines Fehlers zu reden.

Die Untersuchung wird durchgeführt für ein Visirfernrohr, dessen Ocular ausserhalb des Fadenkreuzes liegt und für ein solches, dessen Ocular dieses Kreuz einschliesst — Huyens'sches Ocular. Für diesen Fall wird auch der Begriff Visiraxe definirt, was unseres Wissens noch nicht geschehen war. Endlich wird auch kurz der Fall besprochen, wo das Objectiv beweglich ist, wie bei englischen und amerikanischen Instrumenten.

Helmert. Zur Untersuchung der Nivellirfernrohre. (Zeitschr. f. Vermessungswesen. 1876. S. 34—38.)

Wenn man ein in Ringen drehbares Fernrohr während der Beobachtung dreht, so beschreibt das Bild in der Regel einen Kreis, welcher davon herrührt, dass nicht nur der optische Mittelpunkt des Objectes, sondern *auch der des Oculars* excentrisch liegen. Der Aufsatz beschäftigt sich mit der Bestimmung derartiger Excentricitäten bei drehbaren und nicht drehbaren Fernröhren und zieht auch ein Beispiel für einen concreten Fall herbei.

Helmert. Ueber das Verticalaxensystem des Repetitionstheodoliten. (Zeitschr. f. Vermessungswesen 1876. S. 296—300.)

Dieser Aufsatz behandelt zwei Fälle: denjenigen, wo man beim Beginne der Arbeit die Repetitionsaxe vertical stellt und denjenigen, wo man (wie es meist geschieht), die Alhidadenaxe vertical stellt. Letzterer Fall ist der ungünstigere, sobald beide Axen einen kleinen Winkel mit einander einschliessen, was schon daraus folgt, dass im ersten Falle die Alhidadenaxe zwar immer schief ist, aber ihre Lagen einen Kegel mit verticaler Axe bilden, während im andern Falle dieser Kegel schief liegt.

Repetirt man bei verticaler Repetitionsaxe n mal, so ist die aus der Axen-Convergenz v folgende Verbesserung des einfachen Winkels

$$\text{(I)}\quad \frac{v}{n}\,\frac{\sin\frac{nA}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\left\{\sin\left(w+\frac{n-1}{2}A\right)\cot z-\sin\left(w+\frac{n+1}{2}A\right)\cot z'\right\},$$

worin z und z' die Zenithdistanzen für das linksliegende und rechtsliegende Object des Winkels A sind und w der horizontale Winkel zwischen der Verticalebene von v bei der ersten Einstellung aufs linksliegende Object und der Verticalebene durchs linksliegende Object ist.

Repetirt man aber, nachdem anfangs die Alhidadenaxe vertical gestellt worden ist, so hat man dieselbe Grösse gleich

$$\text{(II)}\qquad -I-v\left\{\sin(A+w)\cot z'-\sin w\cot z\right\}.$$

Während I mit n abnimmt, thut II wegen des hinzugetretenen Gliedes dies nicht. I lässt sich durch geeignete Wahl von n vernichten oder nahezu vernichten, dagegen II aber nicht.



Helmert. Zu Galles Methode der Nordlichtshöhen. (Astr. Nachr. 2070.)

Galle nimmt bei seiner Bestimmung der Höhe der Nordlichtstrahlen an, dass sie die Richtung der magnetischen Inclinationsnadel normal unterhalb auf der Erdoberfläche haben. Der Aufsatz leitet aus der Gauss'schen Potentialfunction für die erdmagnetische Kraft die Aenderung der Inclination mit der Meereshöhe ab. Dieselbe erweist sich nicht geradezu als in allen Fällen zu vernachlässigen.

Helmert: Constante Fehler in Cornus Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit. (Astr. Nachr. 2072.)

Verf. fand bei näherer Untersuchung der Cornu'schen Beobachtungswerthe, dass sie regelmässige, von der Drehgeschwindigkeit des Rades abhängende Abweichungen untereinander zeigen. Welches der richtige Werth der Lichtgeschwindigkeit ist, lässt sich schwer angeben und jedenfalls dürfte der von Cornu aus allen Beobachtungen abgeleitete Werth nicht ganz das hohe Maass von Zutrauen verdienen, das man ihm sonst wohl beizulegen geneigt ist.

Helmert: Discussion der Beobachtungsfehler in Koppe's Vermessung der Gotthardtunnelaxe. (Zeitschr. f. Vermessungswesen. 1876. S. 146—155.)

Es werden zuerst ausführlich die Verbesserungen der Horizontalwinkel discutirt. Dieselben befolgen nicht streng das Gauss'sche Gesetz, sondern häufen sich etwas an um den mittleren Fehler herum. Deutet dies auf constante Fehler, welche den Richtungen im Netz anhaften, so zeigt dies noch schärfer die Vergleichung des wahrscheinlichen Fehlers einer Richtungsbeobachtung nach der Netzausgleichung mit derjenigen nach der Stationsausgleichung, 1",04 gegen 0",88. Im letzteren Werth stecken ausserdem noch systematische Theilungsfehler, welche aus den Messungen nachgewiesen und geschätzt werden. Schliesslich ergiebt sich $\pm$ 0",8 als wahrscheinlicher Betrag der constanten Fehler der Richtungen im Netze.

Die trigonometrischen Höhenmessungen waren von Koppe nach der Hypothese

$$\text{Gewicht} = 100 : (\text{Distanz in Kilometern})^2$$

ausgeglichen worden. Die Verbesserungen der Höhen zeigen, dass es besser ist, die Gewichte proportional den Quadraten dieser Werthe zu nehmen — es wachsen also die Höhenfehler mit den Quadraten der Distanz, ein Umstand, der darauf hinweist, dass sie wesentlich von der Refraction herrühren.

Helmert: Näherungsformeln für die Gauss'sche Projection der Hannover'schen Landesvermessung. (Zeitschr. f. Vermessungswesen 1876. S. 238—253.)

Die Gauss'sche Projection des Ellipsoids auf die Ebene ist wenig bekannt in der Praxis, weil die Formelentwicklungen etwas umständlich sind. Beschränkt man sich aber auf Gebiete von 400^{km} Längen- und Breitenerstreckung, so lässt sich die Sache sehr einfach darstellen. Man hat dann aus Gauss' Untersuchungen nur zu adoptiren, dass innerhalb dieser Ausdehnung ein merklicher Unterschied zwischen den Dimensionen auf dem Ellipsoid und einer conformen Uebertragung auf eine Kugel mittlerer Krümmung nicht existirt. Darf man also das beobachtete Netz als auf dieser Kugel liegend annehmen, so handelt es sich nur darum, es conform von der Kugel auf die Ebene zu übertragen. Die sehr einfachen Entwickelungen zeigen einen innigen Zusammenhang mit den Formeln für rechtwinklige sphärische Coordinaten nach Soldner, so dass der Uebergang aus einem System ins andere sehr leicht ist. Die Benutzung der Gauss'schen Formeln erscheint aber dem Verf. bequemer als diejenige der Soldner'schen, was ausführlicher zu begründen versucht wird. Für die Correction der gemessenen Richtungswinkel, welche Gauss' Projection heischt, giebt Verf. eine *graphische* Tabelle, die innerhalb der gesteckten Grenzen völlig ausreicht.

Helmert: Zur Herstellung graphischer Tabellen mit zwei Eingängen. (Ztschr. f. Vermessungswesen 1876. S. 24—34.)

Ist w eine Function der Argumente u und v, gegeben durch die Gleichung

$$F(w, u, v) = 0,$$

so werden die Linien, welche alle Punkte mit den rechtwinkligen Coordinaten u und v für einen constanten w Werth enthalten, im Allgemeinen Curven sein. Bildet man aber die Curven dadurch ab, dass man als rechtwinklige Coordinaten nicht u und v, sondern $x = f_1(u)$ und $y = f_2(v)$ nimmt, so lassen sich die Functionen f_1 und f_2 unter Umständen so wählen, dass die Curven in Gerade übergehen. Der Aufsatz untersucht, vom Einfachen zum Schwierigeren aufsteigend, die Bedingungen dazu. Im Allgemeinen hängt die Möglichkeit der Abbildung durch Gerade ab von der Gleichung

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx}}{\frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dy}} = f(w),$$

worin $f(w)$ eine beliebig zu wählende Function und w aus $F(w, u, v) = 0$ zu entnehmen ist. In dieser Gleichung müssen sich die Variablen derart sondern lassen, dass u und $\frac{du}{dx}$ links, v und $\frac{dv}{dy}$ rechts stehen, wenn die gewünschte Abbildung möglich sein soll. Die Integration links und rechts ergiebt dann sofort auch die Functionen f_1 und f_2.

Der Aufsatz behandelt auch die Abbildung durch Kreise, beschränkt sich aber auf den Fall concentrischer Kreise. Solche sind immer möglich, wenn parallele oder in einem Punkt sich schneidende Gerade möglich sind.

Selbstverständlich ist auch des Falles gedacht, dass u oder v als Functionen, w, v oder u, w als Argumente genommen werden.

Als Beispiel dient *das graphische Einmaleins*, welches auf einem Kärtchen in vier verschiedenen Formen dargestellt ist.

Aachen. Helmert.

Guido Hauck: Grundzüge einer axonometrischen Theorie der darstellenden Perspective. I. Planperspective, II. Perspectivische und projectivische Collineation im Raume. (Zeitschrift für Mathematik und Physik 1876. Bd. 21, S. 81—99 u. S. 402—462, mit 2 Tafeln.)

Eine eigenthümliche Erscheinung auf dem Gebiete der descriptiven Geometrie ist die *Axonometrie*, welche zuerst von Weissbach auf die orthogonale Parallelperspective beschränkt —, von Pohlke durch den nach ihm benannten Satz auf die allgemeine Parallelperspective übertragen wurde und in Folge der Leichtigkeit und Handlichkeit ihrer Anwendung eine überraschend schnelle Carrière gemacht hat. Während jedoch alle übrigen Theile der descriptiven Geometrie sich von einem gemeinsamen Gesichtspunkt aus betrachten lassen, insofern sie sich alle unter die Rubrik „geometrische Verwandtschaften" unterordnen lassen, stand die Axonometrie seither noch ausserhalb dieses Verbandes. Dies war eine Lücke, deren Ausfüllung um so wünschenswerther erschien, als die einseitige Beschränkung der Axonometrie auf die Parallelperspective nicht in ihrem Wesen begründet ist. Denn definirt man die Axonometrie allgemein als Methode, welche lehrt, perspectivische Bilder von Objecten, die durch die rechtwinkligen Coordinaten ihrer Punkte gegeben sind, dadurch zu verfertigen, dass die projicirenden Parallelepipeda der einzelnen Objectpunkte abgebildet werden: so reicht diese Methode bis auf Desargues zurück, welcher in seiner „Méthode universelle de mettre en perspective les objets donnés réellement ou en devis etc." (Paris 1636) die Centralperspective in dem genannten Sinne behandelte.

Der Verfasser machte sich demgemäss zur Aufgabe, 1) die Methode der Axonometrie in der Art für die Centralperspective zu verallgemeinern, dass namentlich für die zwei Kernpunkte der modernen Axonometrie, nämlich die von Weissbach eingeführten rationalen Verhältnisse der Massstäbe und den von Pohlke entdeckten und verwertheten Satz Analoga in der Centralperspective sich ergeben, — 2) die wichtigsten Formeln und Constructionen der parallel-perspectivischen Axonometrie als specielle Fälle der zu findenden centralperspectivischen nachzuweisen, — 3) diese ganze neue Theorie der Axonometrie auf der Grundlage der allgemeinen Collineationsverwandtschaft aufzubauen.

Ueber den Anknüpfungspunkt der Axonometrie an die Theorie der Collineation räumlicher Systeme konnte nicht lange ein Zweifel bestehen. Dieser Anknüpfungspunkt musste wohl in der Möbius-schen Fundamentalconstruction collinearer Systeme (Barycentr. Calcul S. 329) zu suchen sein.

Ist O, xyz ein rechtwinkl. Coordinatensystem, auf welches das Originalsystem bezogen wird, und ist der Dreistrahl $\Omega, \xi\eta\zeta$ dessen collineare Abbildung, sind ferner $F_1 F_2 F_3$ diejenigen Punkte des griechischen Systems, welche den unendlich fernen Punkten der lateinischen Achsen entsprechen, $G_1 G_2 G_3$ diejenigen Punkte des lateinischen Systems, welche den unendlich fernen Punkten der griechischen Achsen entsprechen, und bezeichnet man die Seiten des Dreikants $\Omega, \xi\eta\zeta$ mit $w_{12} w_{23} w_{31}$, die Abscissen der Punkte $F_1 F_2 F_3$ mit $f_1 f_2 f_3$ (*Fluchtstrecken*), die Abscissen der Punkte $G_1 G_2 G_3$ mit $g_1 g_2 g_3$ (*Gegenstrecken*): so ist das Bildsystem vollständig bestimmt, wenn die 9 Grössen $w_{12} w_{23} w_{31} f_1 f_2 f_3 g_1 g_2 g_3$ gegeben sind. Man kann alsdann von jedem durch seine Coordinaten gegebenen Punkt das Bild durch eine einfache Construction finden, indem man das Bild des projicirenden Parallelepipedons des Punktes construirt. Die genannten 9 Grössen werden daher als axonometr. *Grundconstanten* bezeichnet, und es handelt sich nun darum, die Beziehungen aufzusuchen, die zwischen denselben für die einzelnen Specialfälle der collinearen Verwandtschaft bestehen.

Es ergiebt sich z. B. für die *centrische* Collineation die Bedingung, dass die zwei Dreiecke $F_1 F_2 F_3$ und $G_1 G_2 G_3$ ähnlich sind, dass also:

$$\lambda^2 (g_i^2 + g_k^2) = f_i^2 + f_k^2 - 2 f_i f_k \cos w_{ik},$$

wo λ ein unbestimmter Factor ist. — Geht die centrische Collineation in die *Planperspective* über, so kommt die weitere Bedingung hinzu:

$$w_{12} + w_{23} + w_{31} = 360^0.$$

Es dürfen daher bei der Planperspective 6 Grundconstanten (z. B. $f_1 f_2 f_3 g_1 g_2 g_3$) beliebig gewählt werden; die 3 übrigen sind dann Functionen der 6 willkürlich gewählten. Man erhält so z. B. folgenden Satz, welcher als Analogon zu dem Pohlke'schen Satz in der Parallelperspective angesehen werden kann:

„Zieht man in einer Ebene von einem Punkt Ω aus unter beliebigen Winkeln gegen einander drei Strecken von beliebiger Länge, jedoch so, dass das von den Endpunkten $F_1 F_2 F_3$ gebildete Dreieck

spitzwinklig ist: so können die drei Strecken jederzeit als das perspectivische Bild eines rechtwinkl. Achsensystems — und die drei Endpunkte als die Fluchtpunkte der drei Achsen angesehen werden. Die zugehörigen Gegenstrecken findet man durch folgende Construction: Beschreibe über den drei Seiten des Dreiecks $F_1 F_2 F_3$ nach aussen Halbkreise, welche von den Verlängerungen der drei Höhen des Dreiecks in $A_1 A_2 A_3$ geschnitten werden. Verbinde diese drei Punkte mit den Ecken des Dreiecks, so sind je zwei von derselben Ecke ausgehende Verbindungslinien gleich und repräsentiren die gesuchten Gegenstrecken."

Specialisirt man die allgemeine Centralperspective dadurch, dass man für die einzelnen Perspectivarten der Parallelperspective (Orthogonalpersp., Malerische Persp., Eskarppersp., Militärpersp., Cavalierpersp.) Analoga in der Centralpersp. aufstellt: so treten zu den obigen Beziehungen noch weitere hinzu. So erhält man z. B. für die *Orthogonalpersp.* (Centralstrahl senkrecht zur Bildebene) die Beziehungen:

$$\cos w_{ik} = -\frac{1}{2\frac{f_i}{g_i}\frac{f_k}{g_k}}\sqrt{\left(-\frac{f_i^2}{g_i^2}+\frac{f_k^2}{g_k^2}+\frac{f_l^2}{g_l^2}\right)\left(\frac{f_i^2}{g_i^2}-\frac{f_k^2}{g_k^2}+\frac{f_l^2}{g_l^2}\right)}.$$

Für die *malerische* Persp. kommt man auf die allgemein übliche (Desargues'sche) Methode, u. s. w.

Jede dieser einzelnen Perspectivarten lässt sich dann unmittelbar für die *Parallelpersp.* specialisiren, indem man f_i und $g_i = \infty$ und die Verhältnisse $\frac{f_i}{g_i} = p_i$ setzt. So gehen z. B. die zuletzt genannten Formeln für die Parallelperspective in die Weissbach'schen Formeln über. —

In den genannten zwei Abhandlungen erfährt nun diese axonometrische Theorie folgenden Gang der Entwicklung:

Die *erste* Abhandlung beschränkt sich auf die Planpersp., indem sie zuerst die Construction des Bildes lehrt, wenn die Grundconstanten gegeben sind. Sodann werden die Grundconstanten als Functionen der Orientirungsconstanten (d. h. derjenigen Grössen, durch welche die Lage des Projectionscentrums und der Bildebene zum Originalcoordinatensystem O,xyz bestimmt ist), entwickelt und einfache Constructionsverfahren (z. B. Herstellung von Reductionsmassstäben) zur praktischen Ausführung der Methode gelehrt. Hierauf folgt die Elimination der Orientirungsconstanten, die will-

kürliche Wahl der Grundconstanten und die Entwicklung der Orientirungsconstanten als Functionen der willkürlich gewählten Grundconstanten. Schliesslich werden die allgemeinen Formeln und Constructionen specialisirt 1) für die einzelnen Perspectivarten, — 2) für die Parallelperspective.

Die *zweite* Abhandlung überträgt zuerst die analytischen und graphischen Resultate der ersten Abhandlung auf die centrische Collineation räumlicher Systeme (Reliefpersp.) und verallgemeinert sie sodann für die projectivische Collineation, wobei sie auf die Möbius'sche Fundamentalconstruction stösst und ein einfaches Verfahren lehrt, zwei durch 5 Paare entsprechender Punkte gegebene centrisch-collineare Systeme in perspectivische Lage überzuführen, was jederzeit auf doppelte Weise (directe und inverse Lage) geschehen kann. — Es folgt sodann die Transformation des axonometrischen Coordinatensystems auf das conaxiale Cartesische Coordinatensystem, und werden im Zusammenhang damit die Beziehungen aufgestellt, die zwischen den axonometrischen Grundconstanten obwalten müssen, damit einem gegebenen Ellipsoid als collineare Abbildung ein bestimmter Flächentypus, namentlich eine Kugelfläche, entspreche. — Die Leichtigkeit, mit welcher sich diese Aufgabe erledigt, ist eben durch das axonometrische Princip bedingt, nach welchem die Bildfigur auf dasjenige Coordinatensystem bezogen wird, dessen Achsen die Abbildungen der Coordinatenachsen der Originalfigur sind. Bezieht man aber nun die Bildfigur auf ein vollkommen willkürliches Coordinatensystem, so erhält man die collineare Verwandtschaft dargestellt durch drei lineare Relationen der allgemeinsten Form zwischen den Coordinaten zweier entsprechender Punkte. Da diese Darstellungsweise den gewöhnlichen Ausgangspunkt bei der analytischen Untersuchung der collinearen Verwandtschaft bildet, so ergiebt sich die Aufgabe, diese Bestimmungsart der Collineation mit der axonometrischen Methode in Beziehung zu setzen, d. h. die 9 axonometrischen Grundconstanten auszudrücken als Functionen der in jenen Relationen enthaltenen 16 Coefficienten. Bei der Lösung dieser Aufgabe wird namentlich auch der Unterschied zwischen gleichstimmiger und ungleichstimmiger Collineation genauer beleuchtet.

Nachdem noch die in der allgemeinen Theorie mit inbegriffene Collineation *ebener Systeme* berührt ist und die wichtigsten diesbezüglichen Fragen erörtert sind, werden im Schlussparagraphen die axonometrischen Coordinaten mit den Chasles'schen und den

von Fiedler als Bindeglied der analytischen und constructiven Methode aufgestellten projectivischen Coordinaten in Beziehung gesetzt, — wie denn auch der Verfasser einen Hauptvorzug dieser axonometrischen Behandlung der Collineation darin sieht, dass sie ein Bindeglied zwischen der analytischen und constructiven Theorie der Collineation bildet.

Tübingen. G. Hauck.

R. Sturm: Sulle forze in equilibrio. (Ann. di Matem. (ser. II) VII, 217—246.)

Möbius hat in seinem Lehrbuch der Statik den Satz gefunden, dass die Actionslinien von vier Kräften im Gleichgewichte derselben Schaar eines Hyperboloids — Regelschaar — angehören. Es wird nun in dem vorliegenden Aufsatze zuerst bewiesen, dass Kräfte auf vier Geraden einer Regelschaar im Gleichgewicht sind, wenn ihr Kräftepolygon sich schliesst; der Schluss des Axen- oder Momentenpolygons folgt dann von selbst. Ein solches geschlossenes Kräftepolygon lässt sich auf dem Hyperboloide selbst construiren, was zu einem einfachen Beweise des bekannten Chasles'schen Satzes führt. Sodann wird eine einfache — wie es scheint, noch nicht hervorgehobene — lineare Construction der linearen Congruenz und des linearen Complexes aus 4, bez. 5 Geraden besprochen; mit Hilfe derselben gelingt es die Sätze — die Möbius wohl richtig erkannte aber damals (1837), wo die Vorstellungen der Liniengeometrie noch fehlten, noch nicht befriedigend beweisen konnte —, dass nämlich die Actionslinien von 5, bez. 6 äquilibrirten Kräften in derselben linearen Congruenz, demselben linearen Complexe sich befinden, und die Umkehrungssätze nachzuweisen, indem das einfache Mittel der Theilung der einen Kraft angewandt wird. Es folgen dann weitere Sätze über den Ort der Wirkungslinie einer Kraft, die mit theilweise ganz, theilweise nur durch ihre Actionslinien gegebenen Kräften äquivalent (oder im Gleichgewicht) ist.

In der zweiten Hälfte werden unter Benutzung der Grassmann'schen geometrischen Addition von Strecken, von welcher die Kräftecomponirung ein Specialfall ist, mehrere — zum Theil ohne Beweis mitgetheilte — analytische Resultate von Möbius, Sylvester, Cayley (Lehrb. der Statik; Comptes rendus Bd. 52, 61) nachgewiesen:

so die 1, 2, 3 Gleichungen zwischen den Coordinaten der Actionslinien von 6, 5, 4 äquilibrirten Kräften, die Ausdrücke für die Intensitäten dieser Kräfte. Besonders wird der Fall von vier Kräften eingehender behandelt und unter anderm ein irrthümlicher Schluss von Möbius, der für die Wirkungslinien von 4 Kräften im Gleichgewichte *eine* Gleichung für genügend hielt, richtig gestellt. Es findet sich dabei Gelegenheit, das „Doppelverhältniss von 4 Geraden im Raume" zu benutzen.

R. Sturm. Das Problem der Collineation. (Math. Ann. X, 117–146.) — **On correlative Pencils.** (Proc. Lond. Mathematical Soc. VII, 175—194.) — **Ueber correlative oder reciproke Bündel.** (Der Redaction der Math. Ann. übersandt.)

Schon längere Zeit habe ich mich mit Untersuchungen über die Lage von Trägern projectiver Gebilde beschäftigt; zuerst nahm ich (Math. Ann. I, 533) das Problem der ebenen Homographie oder Projectivität vor, das auch von Chasles, Jonquières, Cremona, Hesse behandelt ist, und gab eine vollständige synthetische Auflösung desselben.

Es sind in zwei (identischen oder verschiedenen) *Ebenen* zwei Gruppen von je σ Punkten gegeben, die einander zugeordnet sind; es sollen solche Paare von „associirten" *Punkten* gefunden werden, aus denen die homologen Punkte der Gruppen durch entsprechende Strahlen *projectiver Strahlbüschel* projicirt werden. Je nachdem $\sigma = 3, 4, 5, 6, 7$ ist, ist jedem Punkt der einen Ebene jeder der andern; eine Curve 2. O.; ein einziger Punkt associirt, der eine Curve 5. O. durchläuft, wenn jener sich auf einer Geraden bewegt; bilden die Punkte jeder Ebene, welche associirte besitzen, eine Curve 3. O.; existiren drei Paare associirter Punkte.

Darauf (Math. Ann. VI, 513) nahm ich die beiden Gruppen in zwei *Räumen* an und suchte solche associirte *Geraden*, aus denen homologe Punkte durch entsprechende Ebenen *projectiver Ebenenbüschel* projicirt werden. Wenn $\sigma = 3, 4, 5, 6, 7$, so ist einer Geraden des einen Raumes jede im andern; ein Reye'scher Complex 2. Gr.; das Sehnensystem einer cubischen Raumcurve; eine Regelschaar; eine einzige Gerade associirt. So viel hatte schon Herr H. Müller (Math. Ann. I, 413) gefunden. Ist $\sigma = 8, 9, 10, 11$, so bilden die

Geraden jedes Raumes, welche eine associirte besitzen, einen Complex 4. Gr., eine Congruenz 6. O. 10 Kl., eine Regelfläche 20. Gr., sind in der Zahl 20 vorhanden. Ausserdem wurden noch die Gebilde ermittelt, welche, je nachdem der Fall ist, einem Büschel, Bündel, einer Ebene, einem speciellen linearen Complexe associirt sind. Herr Schubert hat mit Hilfe seiner Correspondenzprincipien im Strahlenraume noch weitere Folgerungen hieraus gezogen (Math. Ann. X, 88).

In dem ersten der 3 Aufsätze der Ueberschrift werden nun für die beiden räumlichen Punktgruppen solche Paare von associirten *Punkten* gesucht, aus denen die homologen Punkte durch entsprechende Strahlen *collinearer Bündel* projicirt werden. Je nachdem $\sigma = 4, 5, 6, 7$ ist, ist jedem Punkte des einen Raumes jeder im andern; eine cubische Raumcurve associirt, welche eine Fläche 5. O. erzeugt, wenn jener Punkt eine Gerade durchläuft; bilden die Punkte jedes Raumes, welche einen associirten besitzen, eine Fläche 2. Gr.; giebt es 4 solche Punkte in jedem Raume.

Wären in dem einen Raume statt Punkte Gerade gegeben, so hätten wir es mit *reciproken oder correlativen Bündeln* zu thun, und zu diesen bin ich — auf Herrn Hirst's Veranlassung — in der weiteren Untersuchung übergegangen. Zunächst kann man die Grundelemente mischen: k Punkte, l Gerade in dem einen Raume, ihnen homolog k Gerade, l Punkte im andern. Verlangt man, dass ein Strahl des einen Bündels und eine Ebene des andern, die nach homologen Grundelementen geben, in der Correlation sich entsprechen, so ist das eine doppelte Bedingung; deshalb findet, wenn eine solche Bedingung neu hinzutritt, eine Erniedrigung um zwei Stufen statt; wie das auch das Collineationsproblem zeigt. Man erhält eine einfache Bedingung, wenn man blos verlangt, dass zwei Strahlen der beiden Bündel, die nach gegebenen Punkte, oder zwei Ebenen, welche nach gegebenen Geraden gehen, conjugirt seien; d. h. dass einer und infolge dessen jeder dieser beiden Strahlen in der dem andern entsprechenden Ebene liege, bez. eine und deshalb jede der beiden Ebenen den der andern entsprechenden Strahl enthalte. *Wir haben also k Punkte A_i, l Gerade a_i, m Punkte $\mathfrak{A}_i$, n Gerade $\mathfrak{a}_i$ im Raume A, ihnen homolog k Gerade b_i, l Punkte B_i, m Punkte $\mathfrak{B}_i$, n Gerade $\mathfrak{b}_i$ in B.* Diese Beschaffenheit der Grundelemente heisse die Signatur [$klmn$]. *Es sind solche associirte Punkte A, B gesucht, dass zwischen ihren Bündeln eine Correlation möglich ist, in welcher*

die AA_i, Bb_i *und die* Aa_i, BB_i *sich entsprechen, die* $A\mathfrak{A}_i$, $B\mathfrak{B}_i$, *sowie die* $A\mathfrak{a}_i$, $B\mathfrak{b}_i$ *conjugirt sind.*

Herr Hirst, der mich auch zu dieser Aufnahme conjugirter Elemente aufforderte, hat nämlich sich mit verwandten Untersuchungen beschäftigt: er hat die Anzahl der Correlationen zwischen zwei festen Bündeln A, B ermittelt für den Fall, dass $\sigma = 2k + 2l + m + n = 8$ ist, oder vielmehr das duale Problem der Correlation zweier festen Ebenen behandelt (Proc. Lond. Math. Soc. V, 40; Annali di Matem. (ser. II) VI, 260). Indem er sich dann zur Betrachtung der Correlation räumlicher Systeme wandte (worüber eine erste Mittheilung Proc. Lond. Math. Soc. VI, 7), ergab sich die Lösung des oben gestellten Bündelproblems oder des dualen als wünschenswerth. Wenn $n = 0$, so gelingt es mit Hilfe bekannter Eigenschaften der cubischen Fläche, der cubischen Raumcurve und der eindeutigen Raumtransformationen das Problem zu lösen; die Resultate sind in jedem Falle fast durch alle Signaturen gleich und zwar folgende:

1) $\sigma = 2k + 2l + m = 8$. Jedem B ist jeder A durch *eine* Correlation zugeordnet, Ausnahme [2200] (Hirst).

2) $\sigma = 9$. Einem B ist eine Fläche 3. O. associirt, Ausnahme [3110], [2210].

3) $\sigma = 10$. Einem B entspricht eine cubische Raumcurve Ausnahme [3200]; einer Geraden b eine Fläche 10. O.; Ausnahme [4100], [1400], [3200], [2300], [3120], [1320], [2220].

4) $\sigma = 11$. Jedem Punkte B ist ein und nur ein Punkt A associirt; wodurch sich eine eindeutige Transformation zwischen A und B ergiebt; keine Ausnahme. Einer Geraden b ist eine Curve, einer Ebene β eine Fläche 11. O. associirt; in jedem Raume giebt es eine Curve 10. O., deren jedem Punkte nicht nur ein Punkt, sondern eine ganze cubische Raumcurve entspricht. [3210], [2310] bilden Ausnahmen.

5) $\sigma = 12$. Die Punkte in jedem Raume, welche associirte besitzen, erzeugen eine Fläche 4. O. und einem ebenen Schnitte der einen entspricht eine Curve 14. O. auf der andern; Ausnahme [3300].

6) $\sigma = 13$. Die Punkte, welche associirte besitzen, erzeugen eine Curve 6. O.

7) $\sigma = 14$. Es giebt 4 Paare associirter Punkte.

Ueber diese engere Untersuchung handelt der zweite Aufsatz der Ueberschrift, doch *ohne ausführliche Beweise.*

Um aber das allgemeinere Problem zu lösen, benutze ich — wie Hirst — das Verfahren der Charakteristikentheorie. Hirst betrachtet, indem er bei festen Scheiteln A, B — ich dualisire, wie gesagt, seine Untersuchung — $\sigma = 7$ annimmt, das entstehende Correlationssystem. Ein solches System enthält eine Zahl von Correlationen, bei denen noch zwei gegebene Strahlen oder zwei gegebene Ebenen conjugirt sind; diese Zahlen nennt er die Charakteristiken des Systems: es sind die gesuchten Zahlen für $\sigma = 8$. Ausserdem enthält das System zweierlei ausgeartete Correlationen, die eine mit einem singulären Strahle (Axe), die andere mit einer singulären Ebene in jedem Bündel. Auf diese hat er — unabhängig von ihm hat sie auch Fiedler gefunden: Darst. Geom. 2. Aufl. — zuerst aufmerksam gemacht, ferner zwei Relationen zwischen ihren Zahlen und den Charakteristiken gefunden. Jene werden direct ermittelt, diese dann berechnet, und ähnlich geschieht es im Raume.

Die Correlation verwandelt sich bei diesen Ausartungen in eine Projectivität der Ebenenbüschel um die singulären Axen, bez. der Strahlbüschel in den singulären Ebenen. Ich bilde nun, durch Fallenlassen einer einfachen Bedingung, in den verschiedenen Problemen ebenfalls Correlationssysteme, in denen die Charakteristiken die Zahlen der Correlationen sind, bei welchen conjugirte Strahlen, bez. Ebenen durch gegebene Punkte, bez. gegebene Gerade gehen; wobei die Scheitel im allgemeinen beweglich sind. Während Hirsts Relationen dieselbe Gestalt haben, wie die für Kegelschnittssysteme, treten hier — infolge dieser Beweglichkeit — noch weitere Glieder zu. Z. B. bei $[klmn]_{\sigma=8}$ ist in B ein Punkt B, in A eine Gerade a gegeben. Die Correlationen der Bündel der Punkte A auf a und des festen Bündels B erzeugen das System; π_{8B}, λ_{8B} seien die Zahlen von dessen exceptionellen Correlationen mit singulären Strahlen, bez. Ebenen, μ_8, ν_8 die Charakteristiken d. h. die Zahl der A auf a, die dem B für $[k, l, m+1, n]_9$, bez. $[k, l, m, n+1]_9$ associirt sind, also die Ordnungen der hierfür dem B associirten Flächen; so hat man:

$$2\nu_8 = \mu_8 + \pi_{8B} + \zeta_8,$$
$$2\mu_8 = \nu_8 + \lambda_{8B};$$

worin ζ_8, die Hirst'sche Zahl der Correlationen für $[klmn]_8$ bei festen Scheiteln, hinzutritt.

Diese additiven Glieder, wie hier ζ_8, sind stets aus der vorhergehenden Untersuchung bekannt, die Ausartungszahlen sind zu ermitteln, woraus μ und ν berechnet werden; dass ν für $[klmn]$

μ für $[k, l, m-1, n+1]$ wird, sowie dass die Zahlenwerthe für $n=0$ schon anderweitig gefunden sind, dient als Controlle.

Die Ausartungszahlen $\varkappa$ und λ lassen sich mit Hilfe meiner in diesem Referate zuerst genannten Abhandlungen über projective Ebenen- und Strahlenbüschel ermitteln. Doch ist die Arbeit sehr mühsam und habe ich sie nur in dem leichteren Falle der Correlationen mit singulären Axen ganz durchgeführt, im andern nur angefangen. Man kann vielmehr die Charakteristikentheorie — und diese Idee verdanke ich Hirst — fortsetzen und, indem wiederum eine einfache Bedingung fallen gelassen wird, Systeme von ausgearteten Correlationen der einen und der andern Art bilden. In solchen Systemen giebt es Ausartungen vom 2. Typus von nur einer Art, in welche beide Ausartungen vom 1. Typus degeneriren. Sie enthalten in jedem Bündel einen singulären Strahl und eine durch ihn gehende singuläre Ebene. Hirst und Fiedler haben diesen zweiten Typus beschrieben. Für jedes solche System lässt sich je nur eine den früheren Formeln analoge Formel aufstellen, die andere wird illusorisch. Infolge dessen ist es doch nothwendig, die Ausartungen des 1. Typus für $n=0$ zu ermitteln; da wird aber, wie man a priori einsehen kann, die Zahl der Correlationen mit singulären Ebenen, die sonst grössere Schwierigkeiten bereitet, in den meisten Fällen 0, in den übrigen bietet sich keine grosse Schwierigkeit. Es verbleibt dann noch die wesentlich einfachere directe Ermittelung der Zahlen der Ausartungen des 2. Typus, bei denen es sich nur um reine Lagenbedingungen handelt. Also aus diesen Zahlen und denen der Ausartungen des 1. Typus für $n=0$ werden die übrigen Zahlen dieser Ausartungen berechnet, aus diesen dann die Zahlen der allgemeinen Correlationen.

Im allgemeinen ergiebt sich, dass für $n = 1, 2, 3 \ldots$ die Zahlen für $n=0$ sich verdoppeln, vervierfachen u. s. w. und zwar mit um so weniger Ausnahmen, je grösser σ ist. Anderseits wachsen die Ausnahmen mit n und spätestens bei $n=8$ haben sie die Regel zurückgedrängt.

Als Beispiel wählen wir die Signaturen [illegible]:

Für $n = 8, 9, 10, 11$ ist einem Punkte F jeder Punkt einfach, eine Fläche 6. O., eine Curve 18. O., eine Gruppe von 32 Punkten associirt. Die Ordnung der Fläche, Curve, die bei $n = 10, 11$ einer Geraden associirt ist, ist 40, 152; die bei $n = 11, 12$ einer Ebene associirte Fläche, Curve hat die Ordnung 152, 476. Bei $n = 12, 13, 14$ erzeugen die Punkte jedes Raumes, welche associirte

besitzen, eine Fläche 256., eine Curve 1008. O. und sind in der Zahl 2384 vorhanden.

Mit Hilfe der Correlationen mit singulären Ebenen erhalten wir z. B. folgende Sätze:

Man habe zwei Gruppen von einander zugeordneten Geraden $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_n$; $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \ldots \mathfrak{b}_n$. Es sollen projective Strahlbüschel (A, α) — d. h. dessen Scheitel A und Ebene α ist — und (B, β) gefunden werden, so dass $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_i$ von homologen Strahlen getroffen werden

$n = 6$; B, β fest; die Punkte A erzeugen eine Fläche 4. Ordnung.

$n = 7$; B, β fest; die A erzeugen eine Curve 8. Ordnung.

$n = 8$; B, β fest; es giebt 6 Strahlbüschel (A, α). Blos B oder β fest; die A erzeugen eine Fläche 16. O.

$n = 9$; B oder β fest; die A erzeugen eine Curve 42. O.; B auf einer Geraden oder β um eine Gerade beweglich; die A erzeugen eine Fläche 96. O.

$n = 10$; B oder β fest; es giebt 60 Büschel (A, α). B oder β auf oder um eine Gerade beweglich, bez. B auf einer Ebene oder β um einen Punkt beweglich; die A erzeugen eine Curve, bez. eine Fläche 280. O.

$n = 11$; die Punkte A, B erzeugen eine Fläche 440. O.; soll B auf einer Ebene liegen oder β durch einen Punkt gehen, so erzeugen die A eine Curve 900. O.

$n = 12$; die A, B erzeugen eine Curve 1560. O.

$n = 13$; es giebt 3120 Paare von Büscheln (A, α) (B, β).

Die Ebenen α umhüllen das duale Gebilde zu dem von den A erzeugten.

Diese Untersuchungen, sowie die weiter ausgeführten des zweiten Aufsatzes enthält die dritte in der Ueberschrift genannte Abhandlung.

Darmstadt. R. Sturm.

Kostka: Ueber Borchardt's Function. (Journal f. d. reine u. angew. Mathematik, Bd. 82, S. 212—229.)

In Folge einer Aufforderung des Hrn. Professor Borchardt habe ich in dem vorliegenden Aufsatz es unternommen, den *Zähler* der bekannten erzeugenden Function aller ganzen symmetrischen Verbindungen genauer zu entwickeln. Derselbe hat die Form:

$$Z = \frac{\Sigma \pm F_0(t_1) F_1(t_2) \ldots F_{n-1}(t_n)}{\Pi(t_1, t_2, \ldots t_n)},$$

wobei
$$F_k(t) = t^k f'(t) - k \,.\, t^{k-1} f(t)$$
$$f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots a_n t^n$$

und Π das Differenzenprodukt der t bedeutet. Dividirt man Z durch $f(t_1)\, f(t_2) \ldots f(t_n)$, so erhält man Borchardt's Function. Auf das Interesse einer solchen Entwicklung hat schon vor längerer Zeit Hr. Cayley und neuerdings wieder Hr. Faà de Bruno aufmerksam gemacht.

Mit Hilfe der Multiplicationsregel der Determinanten und desjenigen Satzes, über welchen ich in dieser Zeitschrift Bd. I, S. 158 f. berichtet habe, erhält Z die Form

$$\text{I.} \quad Z = \Sigma B.C,$$

worin die Grössen B Determinanten bedeuten, welche aus den Coefficienten von $f(t)$ zusammengesetzt sind, die C aber symmetrische und homogene Funktionen der t. Wenn man mit c_k die Summe der Combinationen der t ohne Wiederholung zur k^{ten} Klasse bezeichnet, so wird jedes C durch eine Determinante der c von der Beschaffenheit dargestellt, dass die Indices der c in jeder Zeile eine aufsteigende, in jeder Colonne eine absteigende Reihe bilden; und zwar ist die Reihe der Differenzen zwischen je zwei auf einander folgenden Indices bei *allen* Zeilen *dieselbe*, und ebenso erhält man nur *eine* derartige Reihe von Differenzen für *alle* Colonnen. Die Form I, deren Bildungsgesetz leicht übersichtlich ist, soll nun verglichen werden mit der Form

$$\text{II.} \quad Z = \Sigma A.T,$$

in welcher jedes T eine jener bekannten symmetrischen Grundfunctionen, deren Glieder sämmtlich aus einem einzigen durch Permutation der Exponenten entstehen, und A den zugehörigen Factor bedeutet, der natürlich eine ganze Function der a sein wird.

Zunächst zeigt sich, dass die Formen I und II in der Anzahl der Glieder sowol im ganzen als in den einzelnen Dimensionen übereinstimmen; die weitere Betrachtung gliedert sich dann naturgemäss in zwei Theile: 1° Ueberführung einer Function C in ein Aggregat der T; 2° Zusammensetzung der A aus den B, resp. Darstellung der B in entwickelter Form. Für die Lösung dieser beiden Aufgaben werden in der Abhandlung Regeln angegeben, welche hier nicht ins einzelne verfolgt werden können. Erwähnt sei nur, dass es nicht gelungen ist, ein wirkliches, durchsichtiges Bildungsgesetz

für II aufzustellen; vielmehr hat die Untersuchung nur dahin geführt, dass der Factor irgend einer bestimmten Function T im Werthe von Z ohne Kenntniss der übrigen Glieder von II nach übersichtlichen Rechenregeln ermittelt werden kann; auch ist gezeigt, dass die Aufgabe, *sämmtliche* Glieder von Z nach diesen Regeln zu berechnen, wegen des sehr symmetrischen Baues der untersuchten Function sich nahezu um die Hälfte reducirt. Indessen scheint mir die Meinung nicht ungerechtfertigt, dass die Functionen C sich ebenso gut zu symmetrischen Grundfunctionen eignen als die T, und dass bei Untersuchungen von allgemeiner Natur die Form I, deren Bildungsgesetz klar liegt, vor II den Vorzug verdient. Freilich wird der Uebergang auf II nothwendig sein, wenn Borchardt's Function dem Zwecke dienen soll, für den sie eigentlich aufgestellt ist, nämlich durch Entwickelung nach fallenden Potenzen der t die symmetrischen Functionen der Wurzeln von $f(t) = 0$ durch die Coefficienten auszudrücken; doch ist es mir nicht vergönnt gewesen, nach dieser Richtung hin das Thema weiter zu verfolgen.

Kostka: Ueber ein bestimmtes Integral. (Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik u. Physik.)

Die kurze Abhandlung gibt den Beweis des Satzes: „Wenn

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \,.\,.\, a_1 z + a_0 = 0$$

nur solche Wurzeln für $z_1, \ldots z_n$ liefert, deren reelle Theile gleiches Vorzeichen haben, so ist

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_0 + A_1 z^2 + \ldots A_{n-1} z^{2n-2}}{(z^2 + z_1^2)(z^2 + z_2^2)\ldots(z^2 + z_n^2)}\, dz$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_0 + A_1 z^2 + \ldots A_{n-1} z^{2n-2}}{(z^n - a_{n-2}z^{n-2} + a_{n-4}z^{n-4} - \,.\,.)^2 + (a_{n-1}z^{n-1} - a_{n-3}z^{n-3} + \ldots)^2}\, dz$$

$$= \pm \pi \begin{vmatrix} a_0 & a_{-1} & \ldots a_{-n+2} & A_0 \\ a_2 & a_1 & \ldots a_{-n+4} & -A_1 \\ a_4 & a_3 & \ldots a_{-n+6} & A_2 \\ . & . & \ldots . & . \\ a_{2n-2} & a_{2n-3} & \ldots a_n & (-1)^{n-1} A_{n-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0 & a_{-1} & \ldots a_{-n+2} & a_{-n+1} \\ a_2 & a_1 & \ldots a_{-n+4} & a_{-n+3} \\ a_4 & a_3 & \ldots a_{-n+6} & a_{-n+5} \\ . & . & \ldots . & . \\ a_{2n-2} & a_{2n-3} & \ldots a_n & a_{n-1} \end{vmatrix},$$

wobei $+\pi$ oder $-\pi$ zu nehmen ist, je nachdem die reellen Theile der z_h sämmtlich positiv oder sämmtlich negativ, und wo $a_n = 1$ und $a_{-h} = a_{n+h} = o$ zu setzen sind."

Angegeben ist dieser Integralwerth bereits von Hrn. Matthiessen im Jahrg. 1867 d. Schlöm. Zeitschrift, und nur weil der Beweis sich etwas einfacher gestalten lässt, bin ich nochmals darauf zurückgekommen. Von Interesse ist vielleicht die Schlussbemerkung, dass aus jenem Integralwerth n Verhältnisse von Determinanten der a sich ergeben, welche, falls alle a reell sind, sämmtlich positiv oder sämmtlich negativ sein müssen, je nachdem alle reellen Theile der Wurzeln von $f(z) = 0$ positiv oder negativ sind.

Insterburg. Kostka.

R. Engelmann: Abhandlungen von Fr. W. Bessel. Herausgegeben von R. Engelmann. Dritter Band: VI. Geodaesie. VII. Physik. VIII. Verschiedenes. — Literatur. — Mit einem Bildniss Bessel's aus dem J. 1839, fünf lithographirten Tafeln und dem Facsimile eines Briefes an Encke. Leipzig, Engelmann 1876. (Zweiter Band, besprochen in dieser Zeitschr. I. Bd. 2. Hft. S. 318.)

Bei dem verschiedenartigen und reichen Inhalt des vorliegenden letzten Bandes der Bessel'schen Abhandlungen kann hier nur das Wesentlichste der Arbeiten über Geodaesie, Physik und verschiedene Theile der Astronomie kurz berichtend dargelegt werden. — Die VI. Abtheilung, *Geodaesie,* enthält neben rein theoretischen Aufsätzen und Abhandlungen über Berechnung geodätischer Vermessungen (125—129) und über den Einfluss der Unregelmässigkeiten der Figur der Erde auf geodätische Arbeiten (130) hauptsächlich die Arbeiten, die sich auf die Ermittelung der wahrscheinlichsten Figur der Erde aus den von verschiedenen Seiten unternommenen Gradmessungen beziehen (131—134). Die Grundlagen, aus denen Bessel seine bis vor Kurzem allgemein angenommenen Constanten des Erdsphäroids ableitete, haben bekanntlich die peruanische, 1. und 2. indische, französische, englische, hannoversche, dänische, preussische, russische und schwedische Gradmessung geliefert; die Constanten, die sich aus ihrer Verbindung und nach Berücksichtigung eines Fehlers der französischen Gradmessung ergaben, sind: Halbe Achse (a) des Erd-

sphäroids 3272077,1, halbe kleine Achse (*b*) 3261139,3 Toisen, $\frac{a}{b} = \frac{299,15}{298,15}$.

In mehr als einer Hinsicht massgebend für alle späteren wurde die in Verbindung mit Baeyer 1831—34 ausgeführte Gradmessung in Ostpreussen; sowohl die Originalität und Schärfe der Beobachtungs- und Reductions-Methoden, wie die durch Repsold's Kunst im Basisapparat wesentlich geförderte Genauigkeit der geodätischen — wie auch der astronomischen — Messungen und die Sicherheit der hieraus gezogenen Schlüsse und Resultate haben dieser eine der ersten Stellen unter allen neueren und jedenfalls die erste unter den Gradmessungen aus dem 1. Drittel des 19. Jahrhunderts verschafft. Aus dem umfangreichen, von Bessel und Baeyer hierüber veröffentlichten Werke (Berlin, 1838) findet sich das Hauptsächliche in Abh. 135 des vorliegenden Bandes; nur die eigentlichen Beobachtungen und numerischen, den speciellen Fall dieser Gradmessung betreffenden Daten wurden ausgeschlossen; dagegen Alles von allgemeinerem Interesse, Entstehung und Plan der Gradmessung, Untersuchungs- und Beobachtungsmethoden, Rechnungsvorschriften, sowie die Endresultate unverkürzt wiedergegeben.

Zwar nicht in beabsichtigtem und directem, aber in einem durch das gemeinsame Ziel doch erkennbaren Zusammenhang mit den geodätischen Arbeiten stehen die Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels (Abh. 137), die Bessel im Jahre 1826 an einem nach seinen Angaben von Repsold construirten Pendelapparat in Königsberg (später, 1835, auch in Berlin) anstellte. Diese grosse Arbeit gilt mit Recht als Muster einer exacten Untersuchung im Gebiete der *Präcisions-Physik*, sowohl nach Anordnung und Ausführung der Beobachtungen, wie hinsichlich der theoretischen Behandlung der Beobachtungsresultate. Abgesehen von verschiedenen zum Theil wenig einflussreichen Störungen, denen die Bewegung eines Pendels zufolge seiner Construction unterworfen ist, zeigte und berücksichtigte er zuerst den nicht unerheblichen Einfluss, den die Luft als mitschwingende Masse auf die Pendelbewegung ausübt, und der mathematisch in einem bisher vernachlässigten Glied der Reduction auf den leeren Raum, physikalisch in einer Vermehrung des Trägheitsmoments des Pendels zum Ausdruck kommt. In einer spätern Abhandlung kam er nochmals auf diesen Gegenstand zurück (Abh. 138). — Die Pendelversuche und der Besitz des vortrefflichen Pendelapparats führten Bessel zur Behandlung der Frage, ob die

Kraft, mit welcher die Erde Körper von verschiedener Beschaffenheit anzieht, für alle als gleich anzusehen sei. Die Untersuchung von 13 Körpern von sehr verschiedenem specifischen Gewicht (Wasser — Eisen) bestätigten das schon von Newton aus freilich sehr rohen Versuchen gefundene Resultat der Proportionalität von Masse und Anziehung (Abh. 139).

Verschiedene kleinere, zum Theil durch die Reduction der Meridian-Höhen veranlasste Arbeiten behandeln meteorologische und physikalische Instrumente und deren Berichtigung; so giebt Abh. 141 die bekannte Calibrirungs-Methode für Thermometer; in Abh. 142 ist eine Tafel für die Reduction der Abwägungen, in 143 die Reduction beobachteter Barometerhöhen entwickelt; zwei umfangreichere (145 und 146) behandeln barometrische Höhenmessungen.

In dem Aufsatz 144, Bemerkungen über eine angenommene Atmosphäre des Mondes, zeigt Bessel, dass die Dichtigkeit einer solchen im günstigsten Fall $\frac{1}{500}$, wahrscheinlich aber geringer als $\frac{1}{968}$ der Erdatmosphäre sei. Drei kurze Aufsätze (147—149) berichten über das Nordlicht vom 18. October 1836, Irrlichter und eine bei einer Feuersbrunst wahrgenommene Lufterscheinung. — In den Jahren 1835—38 wurde die preussische Längeneinheit neu festgestellt und alle hierauf wie auf die Anfertigung genauer Copien des neuen Normalmasses bezüglichen Untersuchungen in einer besonderen Schrift (Berlin, 1839), ihre wesentlichen Resultate aber in den Astron. Nachrichten mitgetheilt (Abh. 150). Die Entwicklung des Schwereeinflusses auf die Figur eines geraden Stabes findet sich als besondere Beilage zu der genannten Schrift (Abh. 151). — Die letzte Abhandlung (152) der Physik stellt die Grundformeln der Dioptrik in einer der Möbius'schen ähnlichen Art, mit Hülfe von Kettenbruchsentwickelung, dar; Bessel leitete sie bei der Untersuchung des Königsberger Heliometers ab (vgl. Abh. 71).

Die letzte, VIII. Abtheilung des 3. Bandes der Abhandlungen umfasst eine Reihe von grösseren und kleineren Aufsätzen und Arbeiten aus *verschiedenen* Theilen der Astronomie, die sich theils nicht ohne Zwang einer der früheren Abtheilungen einordnen liessen, theils noch nachträglich und bei einer genauen Durchsicht aller Schriften als wünschenswerth zur Aufnahme herausstellten. Unter den grösseren mögen die Arbeiten: „über die Figur des Saturns, mit Rücksicht auf die Attraction seiner Ringe“ (154) — eine der frühesten theoretischen Untersuchungen Bessels aus dem Jahre

1807 —, ferner die Beobachtungen und Betrachtungen über die „persönliche Gleichung bei Durchgangsbeobachtungen" (161, mit 2 Nachträgen), die Untersuchung „über den Einfluss der Veränderungen des Erdkörpers auf die Polhöhen" (162), die „Betrachtungen üb. die Methode der Vervielfältigung der Beobachtungen" (163), „über die Bestimmung der Libration des Mondes durch Beobachtungen" (164) und „über Sternschnuppen" (165), hier namentlich erwähnt werden. Die umfangreichste Abhandlung, die „Analyse der Finsternisse" (169), ist, wie die über den „Einfluss der Strahlenbrechung auf Mikrometerbeobachtungen" (Auszug, 167), die „Bestimmung der Masse des Jupiter" (168), die „Neue Berechnungsart für die Methode der Entfernungen des Mondes von anderen Himmelskörpern", sowie zwei kürzere Aufsätze, von denen der zweite — die Beobachtung des Mercur-Durchganges am 5. Mai 1832 — die erste zuverlässige astronomische Untersuchung und Bestimmung der Irradiation enthält (171), den Astronomischen Untersuchungen (Königsberg, 1841, 42) entnommen. — Ausser einigen Aufsätzen biographischer Natur: Erinnerungen an F. W. Flemming (180, nur zum Theil von Bessel), Sir William Herschel (181), Ueber Olbers (182) sind schliesslich noch einige Stücke nicht-astronomischen Inhalts, die zur Beurtheilung Bessel's in anderer Hinsicht aber nicht ohne Interesse schienen, mit aufgenommen worden: ein Aufsatz über Erman's Reise in Sibirien und Kamtschatka (183), über Uebervölkerung (184) und endlich ein Schreiben an die Redaction der Königsberger Allgemeinen Zeitung (185), welches den Menschen und Politiker Bessel trefflich charakterisirt.

Den Abschluss vorliegender Ausgabe bilden *Literatur-Verzeichnisse*; zunächst ein „allgemeines Verzeichniss der Schriften Bessel's", von dessen 487 Nummern Bessel selbst 401 angehören, die übrigen 86 Mittheilungen seiner Methoden, Formeln, Beobachtungen, sowie Auszüge und Uebersetzungen aus seinen Schriften und Abhandlungen enthalten. Als zweites schliesst sich noch die Literatur über Bessel, mit 25 Nummern, an. — Dem 3. Band ist überdiess noch ein Bildniss aus dem Jahre 1839 (Lichtdruck nach dem Jensen'schen Oelgemälde), sowie das Facsimile eines Briefes an Encke beigegeben.

R. Engelmann.

S. Günther: Note sur Jean-André Segner, premier fondateur de la météorologie mathématique. (Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, Aprilheft 1876.)

Die Idee, meteorologische Veränderungen auf die durch Mond und Sonne bedingte Ebbe und Fluth der Atmosphäre zurückzuführen, findet sich nahezu bei allen Fachschriftstellern aus der zweiten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts, allein es scheint bisher allgemeine Unkenntniss darüber geherrscht zu haben, wer als der Erste die bezüglichen Verhältnisse mathematisch untersucht habe. Vorliegende Abhandlung vindicirt dies Verdienst dem tüchtigen Pressburger Andreas Segner, der folgeweise mathematische Professuren zu Jena, Halle und Göttingen bekleidete. In einem einführenden Paragraphen werden kurz die nicht unbeträchtlichen Leistungen, welche dieser produktive Gelehrte besonders im Fache der Mechanik und Optik bethätigte, skizzirt; alsdann wird das Jenaische Universitätsprogramm, welches die durch kosmische Einflüsse bedingten Oscillationen des Barometerstandes rechnerisch behandeln lehrt, wörtlich abgedruckt. Als positiv interessant wird an demselben die mathematische Einkleidung des physikalischen Problems und die Einführung der Nebenbedingungen in die aufgelöste Differentialgleichung hervorgehoben; als Mängel sind zu verzeichnen die Ignorirung des Mariotte'schen Gesetzes, Vernachlässigung mehrerer integrirender Nebenumstände und irrthümliche Auffassung der Halley'schen Erklärung der Passatwinde. Da natürlich auch das numerische Resultat ein viel zu erhebliches ist werden zur Vergleichung die von Laplace für den nämlichen Zweck aufgestellten complicirten Formeln sowie deren Ausrechnung durch Bouvard reproducirt. Als Anhang folgt die Bemerkung, dass noch vor Letzterem ein deutscher Astronom, Namens Stark, bei Beantwortung einer von der kurbayrischen Akademie gestellten Preisfrage zu analogen Ergebnissen gelangt ist.

Ansbach. S. Günther.

S. Günther: Anfänge und Entwicklungsstadien des Coordinatenprincipes. (Abhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Nürnberg, 6. Band.)

Diese Arbeit, welche eine Menge da und dort versprengter Einzelbemerkungen zu sammeln und durch neu aufgefundene Materialien

zu verbinden bestimmt ist, zerfällt naturgemäss in drei Theile: Alterthum, Mittelalter, Neuzeit bis zum Jahre 1636. Was den ersten anlangt, so galt es eigentlich einzig und allein kritisch zu untersuchen, ob die mannigfachen Fakta, welche eine bewusste oder unbewusste Anwendung des Coordinatenprincipes bei den Griechen zu involviren schienen, wirklich in diesem Sinne gedeutet werden dürfen. Diese Untersuchung lehrte, dass bei den allein in Frage kommenden Vertretern der reinen Mathematik, Archimedes und Apollonius, hievon gar keine Rede sein kann, und auch im Gebiete der angewandten Mathematik nur in sehr beschränktem Masse. Erst bei Eratosthenes und Hipparch tritt die Bestimmung eines Ortes der Sphäre durch zwei Bögen grösster Kreise bestimmt hervor; die Idee einer Ortsbestimmung durch Punktcoordinaten in der Ebene dagegen dürfte sich einzig und allein in der Geodaesie des Alexandriners Hero (100 v. Chr.) finden. — Was nun das Mittelalter anbelangt, so ist es dem Verf. gelungen, das Verbindungsglied zwischen jenen ersten Anfängen und der bereits ziemlich fortgeschrittenen Auffassung Nicole Oresme's aufzufinden. Ein lateinischer Münchener Codex (Nr. 14436) des ehemaligen Emeram-Klosters zu Regensburg enthält nämlich als Zugabe zum Somnium Scipionis des Macrobius einen Auszug aus Plinius, welcher die Bahnen der Planeten im Thierkreis behandelt und — was bis jetzt nicht nachweisbar gewesen sein dürfte — graphisch durch Abscisse und Ordinate darstellt. Würde man einen beliebigen Meridanschnitt durch die Zodiakalzone führen und von diesem aus die Gürtelfläche wie den Mantel eines abgestumpften Kegels nach der Tangentialebene des Aequatorpunktes abrollen, so bekäme man etwa jene Zeichnung, und zwar würde die Aufschlitzungslinie die Ordinatenaxe, der Parallelkreis von 66°30′ Südpol-Distanz die Abscissenaxe vorstellen. Der astronomischen Entstehung gemäss werden x und y beziehungsweise als latitudo und longitudo bezeichnet, und es erscheint so nicht unmöglich, dass jene allgemeinere Terminologie des Oresme — latitudines-Coordinaten — unmittelbar auf jenen Vorläufer im zehnten Jahrhundert zurückleitet. — Dass der genannte französische Geometer um die Mitte des vierzehnten Säculums den Coordinatenbegriff soweit ausgebildet hatte, als die Beschränkung auf den ersten Quadranten zuliess, war bereits seit längerer Zeit durch die umfassenden Forschungen Curtze's bekannt, und so musste sich an dieser Stelle die Darstellung darauf beschränken, von jenen Arbeiten Bericht zu erstatten, einzelne ferner liegende

Gesichtspunkte hervorzuheben und zumal auf Beziehungen jener alten Lehre von den „latitudines“ zu neueren Doktrinen hinzuweisen. — In der sogenannten Neuzeit ragt besonders Fermat's Name hervor; er operirte, wie dies zuerst von Baltzer nachgewiesen wurde, mit den Coordinaten ganz in unserem Sinne und wandte dieselben vielfach bei seinen Untersuchungen über algebraische Curven an; wie viel Gewicht seine Zeitgenossen auf diese Versuche legten, geht u. a. aus der hier ausführlicher erörterten Thatsache hervor, dass der bekannte Compendienschreiber Herigone selbst nach dem Jahre 1636 die Coordinaten nicht mit Descartes', sondern lediglich mit Fermat's Namen in Verbindung bringt. In jenem Jahre erschien des Erstgenannten „Geometria“, und damit endet die Vorgeschichte des Coordinatenprincipes, um in dessen Geschichte überzugehen. Damit endet denn auch naturgemäss unsere Erzählung, aus der jedenfalls so viel hervorgeht, dass die Coordinatengeometrie keine „proles sine matre creata“ genannt werden dürfe, wie dies von Chasles und im Anschluss an ihn auch von Anderen geschehen ist.

Ansbach. S. Günther.

A. Toepler: Bemerkung zur Fourier'schen Reihe. Notiz in No. XXVI u. XXVII des Anzeigers der kaiserl. Akademie d. Wissensch. zu Wien vom 7. Dec. 1876.

Ich habe darauf aufmerksam gemacht, dass durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadratsumme der Coefficient der Fourier-schen Reihe bei endlicher Gliederzahl bestimmt ist, bevor überhaupt die Darstellbarkeit von Functionen durch die Reihe mit unendlicher Gliederzahl bewiesen ist.

Es sollen die Coefficienten a und b der nach ganzen Vielfachen von $\frac{\pi x}{\lambda}$ fortschreitenden Reihe:

$$Y_1 = \sum_{k=1}^{k=n} a_k \sin\frac{k\pi x}{\lambda} + \sum_{k=1}^{k=m} b_k \cos\frac{k\pi x}{\lambda},$$

welche sich auf beliebige, endliche Gliederzahl (n und m) erstreckt, so bestimmt werden, dass die Reihe für alle Werthe des x innerhalb des Intervalles von $-\lambda$ bis $+\lambda$ eine gegebene Function $Y_2 = F(x)$ mit möglichst grosser Annäherung darstellt. Dies erfordert, dass das Integral:

$$Z = \int_{-A}^{+A} \left\{ F(x) - \sum_{k=o}^{k=m} a_k \sin \frac{k\pi x}{A} - \sum_{k=o}^{k=n} b_k \cos \frac{k\pi x}{A} \right\}^2 dx$$

ein Minimum werde, wobei die Coefficienten a und b als unabhängige Veränderliche zu betrachten sind.

Die Differentiation liefert $m + n$ Bedingungsgleichungen, in welchen jedoch die Integrale der Glieder von der Form sin . cos, ferner sin . sin und cos . cos ungleicher Vielfacher von $\frac{\pi x}{A}$, zwischen den Gränzen verschwinden. Die Gleichungen reduziren sich auf die Gestalt:

$$\int_{-A}^{+A} F(x) \sin \frac{k\pi x}{A} dx = a_k \int_{-A}^{+A} \overline{\sin \frac{k\pi x}{A}}^2 dx \text{ und}$$

$$\int_{-A}^{+A} F(x) \cos \frac{k\pi x}{A} dx = b_k \int_{-A}^{+A} \overline{\cos \frac{k\pi x}{A}}^2 . dx$$

Aus diesen gehen die a und b als die bekannten Fourier'schen Coefficienten hervor. Es ist dabei gleichgültig, ob man in der Reihe eine begränzte oder unbegränzte Gliederzahl annimmt. Jeder beliebige Complex von Gliedern beider Arten, selbst ein einzelnes Glied führt zu demselben Coefficienten. Hat überhaupt eine Function $f(x)$ die Eigenschaft, dass

$$\int_0^A f(gx) f(kx) dx = 0$$

und dass $\int_0^A \overline{f(kx)}^2 dx$ einen bestimmten, endlichen Werth besitzt, wobei unter g und k zwei von einander verschiedene ganze Zahlen zu verstehen sind, so ist ohne Weiteres ersichtlich, dass nach derselben Methode die Coefficienten der Reihe

$$\sum_o^k a_k f(kx)$$

so bestimmt werden können, dass die Reihe eine gegebene Function mit möglichst grosser Annäherung zwischen $x = 0$ und $x = A$ darstellt, wobei stets die Werthe der Coefficienten von der Anzahl der Reihenglieder unabhängig sind.

Nach einer Bemerkung von Prof. Boltzmann*) steht diese Eigenschaft bei der Fourier'schen Reihe im Zusammenhange mit dem bekannten Satze, dass die mittlere lebendige Kraft der schwingenden Bewegung eines materiellen Punktes gleich ist der Summe der mittleren lebendigen Kräfte der einfachen Pendelschwingungen, in welche jene Bewegung zerlegt werden kann. Es lässt sich unter dieser Voraussetzung zeigen, dass der Ausdruck

$$\int_0^{+A} \left\{ F(x) - a_k \sin \frac{k\pi x}{A} \right\}^2 dx$$

ein Minimum ist, wenn a_k gleich dem Coefficienten des entsprechenden Gliedes in der für $F(x)$ gesetzten Fourier'schen Reihe wird; dies drückt in der That die obige Eigenschaft aus. Indessen wird bei dieser Betrachtungsweise die Entwickelung der Fourier'schen Reihe vorausgesetzt, während die in Rede stehende Eigenschaft für Reihen mit begränzter Gliederzahl unter den bezeichneten Bedingungen ausgesprochen werden kann, bevor die Darstellbarkeit von Functionen in unendlicher Reihe erwiesen ist.

Dresden. Toepler.

G. Escherich: Flächen II. Ordnung mit einer Symptosen-Axe.
(Grunert's Archiv. Theil LX.)

Als ich, durch die Abhandlnng Steiner's „Allgemeine Betrachtungen über doppelt berührende Kegelschnitte", angeregt, die einander einbeschriebenen Flächen II. Ordnung zu behandeln versuchte, bedurfte ich bei dem gewählten Gange der Untersuchung verschiedener Sätze über jene Lage zweier Flächen II. Ordnung, bei welcher sie sich in ebenen Curven schneiden. Da die hierbei aufgetauchten Fragen meines Wissens nirgends in *rein geometrischer* Weise besprochen waren, so versuchte ich dies in der obigen Abhandlung. Ich war hiebei besonders bemüht, die Darstellung so einzurichten, dass eine Unterscheidung, ob einzelne Elemente der auftretenden Gebilde reell oder imaginär sind, überflüssig würde. Nach Ableitung der allgemeinen Eigenschaften untersuche ich dann, unter welchen Umständen einzelne dieser Gebilde reell oder imaginär sind.

*) Anzeiger der Wiener Akad. II vom 11. Jan. 1877.

G. Escherich: Die reciproken linearen Flächensysteme. (Erscheint in den Sitzungsberichten von 1877 der kaiserl. Akademie in Wien.)

Hiemit habe ich aus naheliegenden Analogien zwei solche lineare Flächensysteme bezeichnet, deren Parameter durch *nur eine* lineare Gleichung an einander geknüpft sind. Ich erörtere zunächst die geometrische Bedeutung dieser Verbindungsweise der Parameter. Die hiebei erhaltenen Gleichungen führen zu der Erkenntniss, dass in jedem der beiden linearen Systeme sich ein dreifach unendliches System von Flächen vorfindet, dessen einzelne Flächen als den einzelnen Punkten des Raumes zugeordnet erscheinen. *Die* Punkte des Raumes, welche in ihren zugeordneten Flächen dieser Systeme liegen, bilden eine Fläche, deren Ordnung gleich der Summe der Ordnungen der beiden linearen Systeme ist. Diese Fläche nenne ich das Erzeugniss der beiden reciproken linearen Systeme. Durch jeden Punkt dieser Fläche gehen seine beiden ihm zugeordneten Flächen der beiden Systeme und jede Schaar dieser Flächen, welche demselben linearen Systeme angehört, umhüllt*) eine neue Fläche. Diese beiden Eingehüllten fallen zusammen, wenn die beiden reciproken Systeme aus demselben linearen Flächensysteme der III. Stufe abgeleitet werden. Bilden überdies in diesem Falle die Constanten der reciproken Beziehung eine symmetrische Determinante, so wird die Eingehüllte mit dem Erzeugniss der beiden reciproken Systeme identisch (Polarsystem); bilden die Constanten eine „schiefe" Determinante, so entspricht immer irgend einem Punkte des Raumes in beiden Systemen dieselbe Fläche und jeder Punkt liegt in seiner zugehörigen Fläche (Nullsystem).

Ausgehend von der Gleichung der von den beiden reciproken Systemen erzeugten Fläche, erörtere ich nun die Frage, ob auch umgekehrt jede Fläche $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung sich durch zwei reciproke lineare Flächensysteme darstellen lässt. Während nun für zwei reciproke lineare Systeme von höherer als der II. Stufe dies unmittelbar aus der Form der Gleichung einleuchtet, erscheint dies fraglich bei zwei reciproken Flächenbündeln. Für diesen Fall hat schon Reye**) nachgewiesen, dass sich die Fläche $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung dann durch zwei reciproke Bündel m^{ter} und n^{ter} Ordnung herstellen lässt, sobald sich auf derselben eine Punktgruppe (m, m, m) oder (n, n, n) vorfindet. Er hat ferner gezeigt, dass auf jeder

*) Dies Wort in etwas weiterer Bedeutung als gewöhnlich genommen.

**) Math. Annalen Bd. II.

Fläche nicht nur, wie selbstverständlich, die Gruppe $(1, 1, 1)$, sondern auch $(2, 2, 2)$ existirt, dass also jede Fläche auf zwei Arten durch reciproke Bündel erzeugt werden kann. Die Fragen nun, welche Reye hiebei als der Erledigung bedürftige hinstellte, ob sich auf einer Fläche $(m + n)^{\text{ter}}$ Ordnung immer eine (m, m, m) construiren lässt, oder welche derartigen Gruppen sich auf ihr vorfinden, suche ich vollständig zu beantworten. Ich zeige auf Grund einiger von Reye bei dieser Gelegenheit gegebenen Sätze, dass sich mit Ausnahme der Fläche sechszehnter jede Fläche n^{ter} Ordnung nur durch Bündel 1ter bis 7ter und zu ihnen reciproke $(n - 1)^{\text{ter}}$ bis $(n - 7)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugen lässt, und dass die Fläche sechszehnter Ordnung auch durch zwei reciproke Bündel 8ter Ordnung hergestellt werden kann.

Im Anschlusse hieran bestimme ich die Anzahl der Knotenpunkte, welche von den beiden eine gegebene Fläche erzeugenden Bündeln willkürlich auf derselben angenommen werden darf. Damit ist bekannt, wie viele von den eine Fläche $(m + n)^{\text{ter}}$ Ordnung bestimmenden Punkten man bei der Construction derselben aus dieser Anzahl von Punkten zu Knotenpunkten zweier reciproker Bündel verwenden darf, welche die Fläche hervorbringen sollen. Diese Zahl ist bei zwei reciproken Bündeln m^{ter} und n^{ter} Ordnung:

$$\tfrac{1}{2}\{3N(n) + 3N(m) - N(n + m)\} - 2$$

wenn eben diese Zahl eine ganze Zahl ist oder, wenn dies nicht zutrifft:

$$\tfrac{1}{2}\{3N(n) + 3N(m) - N(n + m) - 1\} - 2$$

wo aber dann noch eine Coordinate eines anderweitigen Knotenpunktes disponibel bleibt. Da aber in diesem Falle sich für eine directe Construction der gesuchten Fläche $(m + n)^{\text{ter}}$ Ordnung aus den gegebenen $N(m + n)$ Punkten die Verfügbarkeit über diese eine Coordinate nicht auswerthen lässt, so wird man durch $N(n + m) - 1$ der gegebenen Punkte einen Flächenbüschel $(m + n)^{\text{ter}}$ Ordnung legen und dann in diesem die Fläche suchen, welche durch den ausgeschiedenen Punkt hindurchgeht. Denn bei der Construction einer Fläche $(m + n)^{\text{ter}}$ Ordnung aus nur $N(m + n) - 1$ Punkten darf man

$$\tfrac{1}{2}\{3N(n) + 3N(m) - N(n + m) + 1\} - 2$$

derselben zu Knotenpunkten der beiden reciproken Bündel wählen, mit deren Wahl aber die Fläche vollständig bestimmt ist. Je nach der verschiedenen Vertheilung dieser Zahl der verfügbaren Knoten-

punkte unter die $N(n + m) - 1$ Punkte erhält man *verschiedene* Flächen $(m + n)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche also den gesuchten Flächenbüschel bilden.

Dieses Verfahren wird nun zur *Construction der allgemeinen Fläche III. Ordnung aus 19 gegebenen Punkten* eingeschlagen.

Ich zeige also zuvörderst eine Construction der Fläche III. Ordnung aus 18 gegebenen Punkten. In diesem Falle darf man nach den obigen Angaben sieben der gegebenen Punkte zu Knotenpunkten der beiden reciproken Bündel wählen. Ich bestimme sie zu Knotenpunkten des Bündels der II. Ordnung. Da nun ein Flächenbündel zu seinem Polarenbündel bezüglich irgend eines Punktes projectivisch ist, so reducirt sich die gestellte Aufgabe auf folgende:

„Den Mittelpunkt eines zu einem gegebenen reciproken Strahlenbündels zu finden, wenn von jeder Ebene des gesuchten Bündels, welche einem von elf bestimmten Strahlen des gegebenen entspricht, ein Punkt gegeben ist."

Eine einfache Discussion dieser Aufgabe lehrt, dass der gesuchte Punkt ein bestimmter von den vier Ausnahmepunkten eines tetraedalen quadratischen Complexes ist, zu dessen Construction man durch Lösung der folgeuden Aufgabe gelangt:

„Zu einem gegebenen Systeme ein reciprokes zu construiren, wenn einem gegebenen Punkte des ersten eine bestimmte Ebene des gesuchten zugewiesen und wenn von jeder Ebene des gesuchten Systems, welche einem von elf bestimmten Punkten des ersten entsprechen soll, ein Punkt gegeben ist."

Diese Aufgabe ist in der allgemeineren enthalten:

„Zu einem gegebenen Systeme ein reciprokes zu construiren, wenn von jeder der fünfzehn Ebenen des gesuchten Systems, welche einem von fünfzehn bestimmten Punkten des ersten entspricht, ein Punkt gegeben ist."

Diese Aufgabe löse ich durch ein stufenförmiges Verfahren, welches mit jedem Schritt von einem angenommenen Systeme, in welchem fünf Ebenen des gesuchten Systems durch fünf der gegebenen Punkte willkürlich gelegt und den bestimmten fünf Punkten des gegebenen Systems zugewiesen wurden, zu einem neuen führt, in welchem immer zwei weitere Ebenen durch die ihnen bestimmten der fünfzehn gegebenen Punkte gehen.

— Nebenbei bemerkt ist mit der Lösung dieser Aufgabe nicht allein der gesuchte Mittelpunkt des Strahlenbündels, sondern auch eine, allerdings nichts weniger als elegante, punktweise Construction

der Fläche der II. Ordnung aus neuen gegebenen Punkten gefunden, und die Aufgabe erledigt:

Es sind zweimal vierzehn Punkte $A_1, A_2 \ldots A_{14}$; $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_{14}$ gegeben, man soll zwei Punkte O und O' finden, welche die Mittelpunkte zweier reciproker Strahlenbündel sind, dergestalt, dass den Strahlen $OA_1, OA_2 \ldots OA_{14}$ des einen im anderen Ebenen entsprechen, welche bezüglich durch $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_{14}$ gehen. —

Ich zeige nunmehr, wie sich zu jedem Strahle des Strahlenbündels die entsprechende Fläche des Flächenbündels und ihre Durchschnittspunkte finden lassen. Diese Constructionen können ebenso wie alle vorhergehenden mit blosser Hilfe von Lineal und Cirkel ausgeführt werden.

Nach Lösung dieser vorbereitenden Aufgaben gehe ich an die Construction der allgemeinen Fläche III. Ordnung aus neunzehn Punkten. Zu diesem Behufe lege ich durch achtzehn derselben zwei Flächen III. Ordnung d. h. es werden die sie erzeugenden reciproken Bündel in der gelehrten Weise construirt und ich zeige dann, wie man mit Hilfe derselben eine beliebige Zahl von Punkten der gesuchten Fläche construiren könne. Eine bestimmte Anzahl solcher hinzugewonnener Punkte genügt jedoch, um zwei reciproke Bündel festzulegen, welche die gesuchte Fläche erzeugen.

Die Möglichkeit, auch die hiebei aufgetauchte Aufgabe:

„Wenn von sechs Durchschnittspunkten einer Curve III. Ordnung und eines Kegelschnittes zwei bekannt sind, den durch die vier anderen bestimmten Kegelschnittsbüschel zu construiren"

blos mit Lineal und Cirkel lösen zu können, verstattet es, diese ganze Construction der allgemeinen Fläche III. Ordnung durch nur diese Hilfsmittel ausführen zu können.

Graz. G. Escherich.

E. Hess: Ueber einige merkwürdige, nicht convexe Polyeder.
(Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg. No. 1. Jan. 1877. S. 1—13.)

Der Verfasser hat durch die Ausdehnung seiner Untersuchungen über die *zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder* (vgl. diese Berichte I, S. 229 ff.) auf die *nicht convexen*, sowie auch auf die

nicht continuirlichen Polyeder eine Anzahl von Körpern erhalten, die noch nicht berücksichtigt zu sein scheinen, obwohl sie in verschiedener Hinsicht merkwürdige und ausgezeichnete Eigenschaften besitzen. In dem vorliegenden Berichte werden die hierhergehörigen *nicht convexen*, aber *continuirlichen* Polyeder unter Angabe einiger ihrer wichtigsten Eigenschaften kurz aufgeführt.

Zuerst werden einige Definitionen und Sätze, die sich zumal auf die Bestimmung der *Art* eines nicht convexen Polyeders beziehen, vorausgeschickt und sodann kurz das Verfahren entwickelt, durch welches man die hierhergehörigen Polyeder auffinden und näher bestimmen kann. Das Verfahren beruht auf der Eigenschaft der zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder höherer Art, vermöge deren der *innerste Kern* ein gleichflächiges, die *äussere Hülle* ein gleicheckiges Polyeder der ersten Art bildet.

Die auf diese Weise erhaltenen, nicht convexen Polyeder zerfallen in zwei *Hauptgruppen*, in *eigentliche* und *uneigentliche* Polyeder, d. h. in solche, welche das von Moebius sog. *Gesetz der Kanten* erfüllen und in solche, bei denen dies nicht der Fall ist.

Die betreffenden *uneigentlichen* Polyeder, welche sog. Möbius-sche Körper sind, d. h. solche, bei denen die Oberfläche sowohl durch die *Aussen-*, wie durch die *Innenseite* jeder Grenzfläche gebildet wird, deren Oberfläche und körperlicher Inhalt hiernach *Null* ist, werden nur kurz erwähnt, dagegen wird auf die hierher gehörenden *eigentlichen*, nicht convexen Polyeder etwas genauer eingegangen.

Diese letzteren werden in *zwei Classen* eingetheilt. Für die Polyeder der *ersten* Classe ist die die Art bestimmende Zahl $A < \frac{K}{2}$, wenn K die Summe der Kanten bedeutet, für die der *zweiten* Classe dagegen ist $A = \frac{K}{2}$; dabei ist zugleich für die ersteren Oberfläche und körperlicher Inhalt *von Null verschieden*, für die der zweiten Classe dagegen *gleich Null*, obwohl diese letzteren das Gesetz der Kanten erfüllen, also keine Möbius'schen Polyeder sind.

Die Zahl der Polyeder der *ersten Classe* beträgt 4, indem durch Anwendung des angegebenen Verfahrens aus der Gruppe des $(6 + 8 + 12)$eckigen (2×24) Flachs *zwei*, sich gegenseitig polar entsprechende und aus der Gruppe des $(12 + 20 + 30)$eckigen (2×60) Flachs ebenfalls *zwei* solcher Polyeder erhalten werden, von denen aber jedes sich selbst polar reciprok entspricht.

Die Polyeder der *zweiten Classe* haben, wie erörtert, die Eigenschaft, dass die *Oberfläche* und der *körperliche Inhalt gleich Null* wird. Jede der gleichen Grenzflächen setzt sich nämlich aus einer Anzahl *positiver* Zellen (mit dem gemeinsamen Coefficienten + 1) und einer ebenso grossen Anzahl von *negativen* Zellen (mit dem Coefficienten — 1) zusammen, welche bezüglich den ersteren *entgegengesetzt gleich* sind, so dass hiernach der *Inhalt jeder Grenzfläche Null* wird. Für sämmtliche hierhergehörige Polyeder erhält der *innerste Kern* d. h. die innerste körperliche Zelle, so wie auch diesem anliegende Zellen den Coefficienten Null, dieselben bilden also *Löcher* des Polyeders.

Als solche *nicht convexe* Polyeder der zweiten Classe werden aus der Gruppe der gleichflächigen Polyeder mit *Hauptaxe zwei Gruppen* von Körpern erhalten, für welche der Verfasser mit Rücksicht auf ihre kronenförmige Gestalt den Namen *Stephanoide* vorschlägt.

Aus der Gruppe des (6 + 8 + 12)eckigen (2 × 24) Flachs ergeben sich ferner *zwei* nicht convexe Polyeder der 2. Classe, welche sich polar entsprechen und zu den beiden ersten, oben erwähnten der 1. Classe in naher Beziehung stehen.

Endlich liefert die Gruppe des (12 + 20 + 30) eckigen (2 × 60) Flachs noch 5 solcher Polyeder, von denen sich je zwei polar entsprechen, während der 5. sich selbst entspricht.

Auf die nähere Beschaffenheit der abgeleiteten Polyeder kann hier nicht eingegangen werden; es möge daher nur noch erwähnt werden, dass die inneren Kerne und äusseren Hüllen derselben in vielen Fällen durch die *archimedeischen*, in einzelnen Fällen sogar durch die regulären *(platonischen)* Varietäten von gleichflächigen, bezw. gleicheckigen Polyedern gebildet sind.

Aus der Beschaffenheit dieser inneren Kerne und äusseren Hüllen ergibt sich auch die am Schlusse erwähnte Darstellung dieser Polyeder durch Papp- oder Fadenmodelle.

Marburg. E. Hess.

S. Günther: Note sur la résolution de l'équation indéterminée $y^2 - bx^2 = az$ en nombres entiers. (Journal de mathém. pures et appliquées, Octobre 1876.)

Das Bestreben, auch nicht homogene Gleichungen zweiten Grades in's Bereich der Betrachtung zu ziehen, liess die vorstehend ge-

nannte Gleichung bald als eine leicht lösbare erkennen. Setzt man den eingliedrig-periodischen Kettenbruch

$$\cfrac{b}{a - \cfrac{b}{a - \dots - \cfrac{b}{a_{(n)}}}} = \frac{P_n}{Q_n},$$

so besteht die Relation

$$Q_{2n} = Q_n^2 - bQ_{n-1}^2,$$

welche an diesem Orte auf zwiefache Weise, durch Determinanten, wie durch direkte algebraische Umformung, hergeleitet wird. Da, wie hieraus ersichtlich, der constante Partialzähler ein für allemal gegeben ist, so handelt es sich weiterhin blos darum, die Grösse a aus der Gleichung

$$Q_{2n} = \frac{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)^{2n+1} - \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)^{2n+1}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}} = \dot{a}$$

zu bestimmen, wo $\dot{a}$ nach Crelle allgemein eine durch a ohne Rest theilbare Zahl vorstellt.

Es wird gezeigt, wie sich diese Aufgabe stets auf die Lösung der fundamentalen Gauss'schen Congruenz $u^2 \equiv av \pmod{b}$ zurückführen lässt, ferner werden die Fälle ausgeschieden, in welchen eine Lösung überhaupt nicht möglich ist, und zuletzt wird jeder mögliche Fall durch ein vollständiges Zahlenbeispiel erläutert. — Angehängt ist eine algebraische Notiz von Prof. Mansion in Gent.

S. Günther: Kritik der Raumtheorieen von Helmholtz und Schmitz-Dumont. (Zeitschr. f. d. Realschulwesen, 1. Jahrg. 6. u. 7. Hft.)

Dieser Aufsatz soll eine vergleichende Kritik zweier modernen Raumtheorieen liefern, wie solche einerseits von Seite der empiristischen, andererseits von derjenigen der idealistischen Schule aufgestellt wurden; die beiden Arbeiten von Helmholtz (in dessen bekannten populären Vorträgen, 3. Heft) und von Schmitz-Dumont (Zeit und Raum, Leipzig 1876) können mit Fug als für jede dieser beiden verschiedenen Auffassungsweisen des Raumes charakteristisch gelten.

Es wird der Nachweis zu führen gesucht, dass der Begriff der ortsverschiedenen Identität (Congruenz) auch von solchen Organismen

durch logische Schlüsse erreicht werden könne und müsse, welche durch ihre subjectiven Zustände an der anschauenden Erkenntniss jenes Begriffes gehindert sind, im Uebrigen aber denselben Denkgesetzen gehorchen, wie wir Menschen. Wäre es gelungen darzuthun, dass jene Geometrie, welche die von Helmholtz supponirten „Flächenwesen" auf ihre specielle wie immer gestaltete Wohnfläche begründen sollen, principiell von der unsrigen sich nicht unterscheide, so würde hieraus auch mit Nothwendigkeit folgen, dass, einen „unebenen" Raum in Riemann's Sinne als existirend vorausgesetzt, die darin lebenden Individuen gleichwohl in das Wesen eines krümmungslosen *(euclidischen)* Raumes mit unbeschränkter Transponibilität der Körper sich hineinzudenken im Stande wären.

Indem die zweitgenannte Untersuchung die Existenz eines dreidimensionalen ebenen Raumes als aprioristische Denknothwendigkeit zu begründen unternimmt, tritt sie gegen die Helmholtz'sche Lehre in Opposition. Es gelingt ihr, bei manchen dem ersten Versuche noch anhaftenden Mängeln, beachtenswerthe Gründe für jene Behauptung beizubringen; jedoch soll und kann nicht geleugnet werden, dass die Anschauung der Raumverhältnisse bei solchen Organisationen eine total verschiedene sein könne, welche mit durchaus abweichenden Perceptions- und Denkorganen operiren müssen.

S. Günther: Neue Methode der directen Summation periodischer Kettenbrüche. (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 22. Jahrg. 1. Hft.)

Die einzige bislang bekannte Methode, jenes Problem in völlig expliciten Formeln zu lösen, rührt von Oettinger her; dieselbe leidet aber an dem Uebelstand, die bekannte Summenformel für den eingliedrig-periodischen Kettenbruch zu verwenden und somit also einen Specialfall der erst zu erledigenden Aufgabe als bereits bekannt vorauszusetzen. Diese neue Behandlung geht aus von der Identitat eines aufsteigenden und absteigenden Kettenbruches; es ist:

$$\cfrac{\beta_1 + \cfrac{\beta_2 + \cdots + \cfrac{\beta_n + \cfrac{\beta_1 + \cdots + \cfrac{\beta_1 \cdots + \cfrac{\beta_n + \cdots + \cfrac{\beta_q}{\alpha_q}}{\alpha_{n(p)}}}{\alpha_1}}{\alpha_1}}{\alpha_n}}{\alpha_2}}{\alpha_1} = \cfrac{\beta_1 \beta_n}{\alpha_1 \beta_n - \cfrac{\alpha_1 \beta_2 \beta_n}{\alpha_2 \beta_1 + \beta_2 - \cfrac{\alpha_2 \beta_1 \beta_3}{\alpha_3 \beta_2 + \beta_3 - \cdots - \cfrac{\alpha_1 \beta_n \beta_2}{\alpha_2 \beta_1 + \beta}}}}$$

Der linkssteigende aufsteigende Kettenbruch ist rein periodisch und besitzt nebst p vollkommenen Perioden noch eine unvollständige von q Theilbrüchen; der rechtsstehende gewöhnliche Kettenbruch ist unrein periodisch, doch umfasst auch seine Periode je n Glieder, und nach p Perioden folgen noch $(q-1)$ Theilbrüche. Der Ausdruck zur rechten Hand ist leicht in independente Form zu bringen; um alsdann den absteigenden Kettenbruch auf die Normalform

$$\frac{b_1}{a_1 - \ldots - \frac{b_n}{a_n - \frac{b_1}{a_1 - \ldots}}}$$

zu bringen, hat man nur das Gleichungssystem der $2n$ Unbekannten α, β

$$\alpha_i \beta_{i-1} \beta_{i+1} = b_i, \quad \alpha_{i+1} \beta_i + \beta_{i+1} = a_i \; (n + i = i)$$

zu lösen. Nachdem α und β allgemein durch Determinanten dargestellt und in die Summenformel eingesetzt sind, ist der angestrebte Zweck völlig erreicht. — Aus diesem Resultat fliesst dann ohne Weiteres ein Satz für zweigliedrig-periodische Kettenbrüche, der von Kahl und dem Referenten früher mit Hilfe verwickelterer Betrachtungsweisen bewiesen worden war.

Ansbach. S. Günther.

A. Favaro: Saggio di cronografia dei matematici dell' antichità (A. 600 a. C. — A. 400 d. C.)

(Padova, premiata tipografia Francesco Sacchetto, 1875.)

Il presente lavoruccio, steso per celebrare una festa di famiglia, non era certamente destinato dall' autore al pubblico scientifico, eppure successivamente se ne occuparono il Cantor nella *Zeitschrift für Mathematik und Physik* (XX. Jahrg. Hist. Lit. Abth. S. 20), il Günther nell' *Archiv der Mathematik und Physik* (LVIII. Theil, Lit. Ber. CCXXX, S. 14—17) ed il Curtze nel *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (VII. Bd., Jahrg. 1875, S. 1—2): alcuni appunti mossi dal primo e dall' ultimo di questi scrittori decisero autore ad esprimere i suoi intendimenti intorno a questo saggio, cosa, dalla quale si sarebbe astenuto se le sue intenzioni fossero state più giustamente interpretate.

Per quanto consta all' autore, prima di lui non si era peranco pensato ad applicare i metodi grafici agli studi cronologici, chè certa-

mente in questo senso non devono intendersi i tentativi fatti per l'addietro dal Luini, dal Priestley, dal Quetelet e dal Poggendorff: per dare quindi un saggio di questa nuova applicazione egli scelse i dieci secoli che comprendono all' incirca le autichità classiche greca e romana e compilò un elenco degli scienziati che in questo lungo periodo si occuparono di scienze matematiche pure od applicate e ne distribuì i nomi in un rettangolo sopra uno dei cui lati segnò cento divisioni ognuna delle quali corrisponde ad un decennio Per facilitare il collocamento a posto dei singoli nomi, per ognuna delle divisioni segnate sopra uno dei lati del rettangolo condusse una parallela all' altro lato, cosicchè riesce anche più facile al lettore l' assegnare l' epoca nella quale visse un dato personaggio, la quale ricerca è anche agevolata perciò che i varii nomi sono disposti nel rettangolo secondo l' ordine alfabetico. Parve all' autore che per tal modo si possa ruiscire ad una rappresentazione grafica, la quale si presti in modo assai opportuno ad un giudizio sintetico intorno allo stato delle scienze in una determinata epoca, risultando con una semplice occhiata evidenti i nomi di quelli che contemporaneamente le coltivavano.

Naturalmente riferendosi ad epoche così remote sarebbe fuori di luogo il pretendere che la rappresentazione grafica si prestasse ad assegnare l' anno di nascita o di morte, giacchè questi dati nella maggior parte dei casi non sono somministrati dalla storia e la rappresentazione grafica non può crearli: la data relativa ai varii nomi è quella che presso gli scrittori più autorevoli si trova esposta ed in pressochè tutti i casi niuno saprebbe dire se essa si riferisca alla nascita, a qualche fatto importante della vita, od alla morte. La fretta poi colla quale, indipendentemente dalla sua volontà, l' autore dovette pubblicare per quel dato giorno il suo lavoro, non gli permise una esatta correzione, ciocchè per qualche nome aperse l' adito ad errori ortografici, i quali tuttavia non hanno alcuna influenza sulla essenza dello scritto e sullo scopo propostosi dall' autore, che è quello, lo ripetiamo, di porgere una nuova applicazione dei metodi grafici.

A. Favaro: Sulla ipotesi geometrica nel Menone di Platone.

(Padova, Tipografia del Seminario. 1875.)

Nel dialogo platonico che s' intitola da Menone, chiede questi a Socrate se la virtù possa o meno insegnarsi, o se non insegnandosi

essa possa almeno venir praticata, ovvero, se non potendosi nè insegnare nè praticare, essa venga da natura agli uomini od in qual altro modo. Dopo una lunga disquisizione, affermando Socrate che ricercare ed apprendere è solo un ricordarsi e Menone richiedendolo di porgere una dimostrazione di questo suo asserto, il Filosofo fa chiamare uno dei servi di Menone ed in un lungo interrogatorio prova trovarsi esso a conoscenza di talune proprietà geometriche, delle quali *a priori* il servo istesso avrebbe potuto ritenersi affatto digiuno. L' autore riproduce questo interrogatorio, illustrandolo con opportune figure geometriche che non si trovano nel testo platonico e giunge finalmente al passo il quale sollevò tante e così animate discussioni e che il prof. Ferrai dell' Università di Padova tradusse come segne '*Ma almeno rimetti qualche poco del tuo imperio sovra di me, e permetti che per via d' ipotesi consideriamo s' ella si possa insegnare o per qual altro modo s' acquisti. E quand' io dico per via d' ipotesi, dico al modo che spesso praticano i geometri, quando si domanda loro per esempio d' una figura, se sia possibile in un dato circolo iscriverla come triangolo: un d' essi in tal caso ci risponderebbe: i' non so se questo sta; ma i' la prendo per un' ipotesi in quanto giova alla soluzione presente. Se questa figura è tale che su le sue linee date descrivendo un cerchio avanzi tanto spazio quanto sia quello della figura inscritta, parmi si ottenga un risultato e appostamente un altro, se ciò non sia possibile, accada: posta questa ipotesi adunque, voglio dirti quanto risulta dalla inscrizione della figura nel cerchio, e se la sia possibile o no.*

Ora ritiene l' autore evidente che Socrate, giovandosi, per chiarire il suo concetto, d' un esempio tratto dalla geometria, ne agevolasse al suo interlocutore la intelligenza, mantenendolo nell' ordine stesso di idee tracciato nell' interrogatorio del servo, si servisse anzi dell' ultima figura che rimaneva tuttavia segnata sulla sabbia innanzi ad ambedue. Osservando dapprima come la essenza della ipotesi geometrica non abbia nel caso attuale importanza alcuna, ma solo importi di verificare se di ipotesi realmente si tratti, nel senso che di tale artifizio approfittano i geometri, con quello che v' aggiunge il filosofo ogni difficoltà potrebbe dirsi tolta completamente. Chiesto al geometra se sia possibile di inscrivere quel triangolo in un dato cerchio, questi avrebbe risposto: io non so se ciò sia, ma lo suppongo, poichè tale ipotesi mi giova per il progresso della soluzione. Se questa figura proposta è tale che adattata sul diametro del cerchio, avanzi tanto spazio che basti per adattarvi una figura uguale alla

precedente, si ottiene un risultato, vale a dire la figura proposta trasformata nel triangolo può essere inscritta nel cerchio ed oppostamente avviene se ciò non ha luogo, vale a dire non è possibile la inscrizione del triangolo, qualora non si verifichi l' accennata condizione.

L' autore dimostra in seguito che la ipotesi è geometricamente esatta, e passa poi in breve rassegna alcune delle diverse interpretazioni date al passo medesimo. Osserva pertanto non doversi quì trattare di questione involuta, perciò che ponendo Platone in bocca a Socrate un esempio tratto dal dominio delle matematiche onde illustrare un concetto filosofico, ripugna il pensare che, mentre a chiarire che cosa intendano i geometri quando formulano una ipotesi, si prestano esempii tratti dalla parte più elementare delle matematiche, Socrate dovesse sceglierne uno la cui interpretazione presentasse difficoltà maggiori che non il concetto ch' esso era destinato a chiarire. L' autore accenna ancora all' importanza del passo sotto il punto di vista della storia delle matematiche.

A. Favaro: Notizie storiche sulle frazioni continue dal secolo decimoterzo al decimosettimo.

(Bulletino di Bibl. e Storia delle Scienze Mat. e Fis. Roma 1875.)

Sono note le contraddizioni nelle quali caddero più volte gli storici delle scienze matematiche, i quali si fecero a studiare l' origine delle frazioni continue: sino al Libri era generalmente invalsa l' opinione che questa forma analitica fosse stata trovata dal Brouncker: Libri aveva accennato come un tale onore dovesse invece attribuirsi all' italiano Cataldi, fatto che venne in seguito sostenuto e vittoriosamente dimostrato dal Grunert.

Il Cantor ed il Martin avevano accennato di volo ad una certa forma di frazioni affatto speciale offerta da Leonardo Pisano nel suo *Liber Abbaci*, ma non riconoscendo in tal fatto tutta la importanza del quale è meritevole.

Ora l' autore, seguendo in parte le traccie segnate dal Günther nei suoi '*Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche*' si è proposto di sviluppare la storia delle frazioni continue dal decimoterzo al decimosettimo secolo, ma in ciò fare egli non si è vietata una breve escursione nei tempi che precedono e susseguono questo

periodo. Prendendo le mosse dagli antichi Greci, egli dimostra che se riuscirebbe malagevole provare indiscutibilmente che gli antichi fossero in possesso delle frazioni continue, tuttavia il fatto che la maggior parte dei valori approssimati da essi usati sono vere frazioni d' approssimazione, dimostra che quei matematici già le conoscevano, od almeno avevano in ciò un tatto singolare ed è ad ogni modo accertato che essi possedevano gli stessi mezzi per rappresentare sotto forma più comoda il rapporto che passa fra due grandi numeri, benchè non si possa con tutta esattezza precisare l' artificio del quale a tale scopo facevano uso. A dimostrazione del suo assunto cita l' autore i *cicli* della cronologia degli antichi Greci e segnala la proposizione prima del libro settimo di Euclide siccome quella che contiene in sè stessa il metodo ancora oggidì generalmente seguìto per trasformare una frazione comune in una continua. Un altro indizio dell' antichità della forma analitica in questione lo ricava l' autore dalla soluzione data da Teone del problema di trovare in modo approssimato il lato d' una superficie che non ha radice esatta.

Passa quindi a prendere in esame le opere di Leonardo Pisano e dei matematici arabi, dai quali, secondo ogni probabilità, apprese il Fibonacci gran parte del tesoro di che egli seppe arricchire l'Occidente, e, tradotti nel linguaggio algebrico moderno i risultati ai quali erano pervenuti, ne mostra lo stretto nesso con quanto ci tramandarono fra Luca Pacioli, l'Ortega, F. Galigai, F. Feliciano da Lazisio, G. Cardano, N. Tartaglia, R. Bombelli, G. Unicorno ed altri, giungendo senza interruzioni al Cataldi, Del Cataldi si occupa l' autore in modo assai particolareggiato, esponendo un passo nel quale si contiene la invenzione delle frazioni continue, commentandolo algebricamente e porgendo ancora una idea del cammino seguìto dal matematico bolognesse onde pervenirvi.

Contemporaneamente al Cataldi, in Germania ed in Olanda lo Schwenter ed Alberto de Girard avevano accennato ad una forma analitica che ha colle odierne frazioni continue una grandissima affinità ed anche di questi si occupa l' autore.

Dopo ciò si arriva al Brouncker ed al Wallis e nelle ricerche che si riferiscono al metodo col quale il primo di essi sarebbe arrivato alle frazioni continue, l' autore dissente profondamente da quanto scrissero in proposito altri matematici, provando il suo assunto con documenti e dimostrazioni irrefragabili.

L'Huygens chiude la serie degli scienziati, i quali potrebbero

vantare qualche pretesa alla invenzione delle frazioni continue, alle quali egli sarebbe pervenuto disegnando di costruire una rappresentazione del moto dei pianeti ed il lavoro si chiude con brevi cenni dati al fine di porgere una idea della parte che le frazioni continue furono chiamate a rappresentare nello sviluppo successivo delle matematiche per opera d' Eulero, dei Bernoulli e di Lagrange.

In tutto il corso del lavoro, l' autore si è astenuto dal sollevare odiose questioni di priorità, dalle quali del resto fa rifuggire l' assoluta originalità della via seguìta da pressochè tutti i citati matematici.

A. Favaro: Lezioni di Statica Grafica.
(Padova, premiata tipografia F. Sacchetto. 1877.)

Corrispondentemente al metodo da lui seguìto nell' insegnamento della Statica grafica al quale attende nella Università di Padova fin dall' anno 1870—71, l' autore ha diviso queste sue lezioni in tre parti, cioè Geometria di Posizione, Calcolo grafico e Statica grafica. Fin da bel principio egli ebbe motivo di riconoscere che troppo scarso era il numero dei suoi allievi, i quali conoscessero la lingua tedesca con profondità sufficiente da essere al caso di consultare con profitto la magistrale opera del Culmann e perciò egli pensò di redigere ad uso dei suoi scolari un riassunto degli scritti originali che gli servono di guida per le lezioni, citando scrupolosamente in capo ad ogni paragrafo le fonti alle quali attinse. Per la Geometria di Posizione egli si valse in particolar modo dell' opera di v. Staudt e di quella del Reye e per il Calcolo grafico e la Statica grafica di quella del Culmann, tenendo conto anche di tutte le pubblicazioni che da altri autori erano state fatte intorno ai medesimi argomenti.

Per quanto riguarda in particolare la Statica grafica, nel presente volume si occupò esclusivamente della parte teorica, riservandosi di pubblicarne le applicazioni in altro volume che vedrà la luce entro il 1878.

A. Favaro: Intorno al probabile autore di una predizione di terremoto riferita da Petrarca.

(Venezia, tip. Grimaldo e C. 1876.)

Quantunque dal titolo apparisca che questo lavoro sia estraneo alle matematiche, pure esso ne interessa la storia, giacchè vi si contengono notizie intorno ad un Vescovo d'Isola che fu discepolo di Andalò di Negro matematico ed astronomo genovese del secolo decimoquarto. Intorno a questo vescovo somministrarono notizie inesatte il Tiraboschi, lo Spotorno ed il Libri, tratti in errore dal P. Ximenes, il quale alla sua volta lo fu da un catalogo di manoscritti magliabechiani compilato dal Targioni-Tozzetti: nè tuttavia può dirsi che il presente scritto soddisfi a tutte le esigenze, ma maggior copia di materiali non riuscì l'autore a raccogliere e ciò non pertanto giudicò opportuno di pubblicare quei pochi dei quali venne a cognizione nella speranza di animare altri a studii ulteriori i quali approdino a qualche cosa di più concreto, somministrando esatte nozioni intorno a questo personnaggio, il quale a più titoli deve destare un certo interesse in quanti si occupano con amore della storia delle scienze.

Padova. A. Favaro.

Enrico Giordani: I sei cartelli di matematica disfida, primamente intorno alla generale risoluzione delle equazioni cubiche, di Lodovico Ferrari, coi sei contro-cartelli in risposta di Nicolò Tartaglia, comprendenti le soluzioni dei quesiti dall' una e dall' altra parte proposti. Raccolti, autografati e pubblicati da Enrico Giordani Bolognese. Premesse notizie bibliografiche ed illustrazioni sui cartelli medesimi, estratte da documenti già a stampa ed altri manoscritti favoriti dal Comm. Prof. Silvestro Gherardi, Preside dell' Istituto Tecnico Provinciale di Firenze. Milano, 1876. R. Stabilimento litograficodi Luigi Ronchi, e Tipografia degli Ingegneri.

La disputa accompagnata da sfide, che ebbero fra loro Nicolò Tartaglia e Lodovico Ferrari in occasione della scoperta, fatta dal

primo, della risoluzione delle equazioni algebriche del 3^0 grado, era nota da lungo tempo nei suoi tratti principali agli studiosi della storia delle Matematiche; ma le relative notizie erano quasi tutte d' origine tartagliana, e non potevano condurre lo storico ad un giudizio imparziale della questione. I sei cartelli di sfida del Ferrari, e le sei corrispondenti risposte del Tartaglia, che costituiscono i documenti più importanti in tale argomento erano sconosciuti, o si consideravano come irreparabilmente perduti. Nel 1844 al sig. Professore Gherardi riuscì fortunatamente di scoprire un esemplare di undici fra quei cartelli, mancandone un solo, cioè la sesta ed ultima risposta del Tartaglia. Più tardi fu ancora egli tanto fortunato, da trovare un esemplare di questo. Da tali scritti il Prof. Gherardi trasse importanti e affatto nuove notizie, che comunicò nel suo pregevole scritto, intitolato: *Alcuni Materiali per la storia della Facoltà Matematica dell' antica Università di Bologna* (Bologna 1844) Ma non sembra che i nuovi fatti esposti in questa Memoria siano stati ponderati da tutti con uguale attenzione, perchè vediamo il signor Hankel nella sua pregevolissima recente opera sulla storia delle Matematiche non tenerne conto alcuno, e narrare questa parte della storia con evidente parzialità verso il Tartaglia.*)

La completa collezione dei 12 Cartelli riuniti in un volume, di cui altro esemplare ugualmente perfetto non esistette nè prima nè dopo, fu ceduta dal Prof. Gherardi al celebre matematico ed istorico Guglielmo Libri: dalle mani del quale uscì più tardi non si sa come, per andare a collocarsi non si sa in qual luogo. Dovendo dunque essa riguardarsi praticamente come perduta, o almeno come sottratta indefinitamente al pubblico uso, venne in mente a me sottoscritto di salvare da una totale distruzione quella parte, che ancora si potesse, di così preziosi ed interessanti monnmenti. Fatte perciò ricerche in tutte le principali Biblioteche d' Italia così pubbliche come private (per le quali mi prestò efficace e potente ajuto il sign. Principe Boncompagni), trovai che di alcuni Cartelli esistevano quà e là scompagnati e dispersi ora due, ora tre, ora quattro esemplari; ad eccezione del sesto di Tartaglia, del quale un solo esemplare si conosce esistere qui in Milano; e del sesto Cartello di Ferrari, del quale più non fu possibile trovare esemplare alcuno in nessun luogo. Di tutto quello che ho potuto trovare, non badando

*) Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und im Mittelalter. Leipzig 1874.

nè a fatica nè a spesa, ho tratto copia in forma di fac-simile con tutta quella esattezza, di cui sono stato capace, riproducendo non solamente la figura dei tipi, ma ancora tutte le più minute particolarità, in guisa da produrre esemplari per ogni uso equivalenti agli stessi originali.

Nel presente volume sono dunque riprodotti in fac-simile colla litografia tutti i cartelli, meno l' ultimo del Ferrari, che come si è detto, non esiste più, od è tenuto gelosamente nascosto. Ma anche questo si è voluto che non mancasse; e per completare la collezione, si è riprodotto coi tipi ordinarii e colla massima esattezza ortografica che si è potuto, la copia manoscritta, che per buona fortuna ne aveva conservato presso di sè il Professor Gherardi. Il volume è preceduto da una Introduzione storico-bibliografica, che per sua somma cortesia il Prof. Gherardi volle scrivere appositamente: vi è aggiunto un elenco, dove sono registrati per ciascuno dei 12 cartelli tutti gli esemplari, di cui si conosce l' esistenza e la loro sede. Del quale elenco per la massima parte sono debitore alla gentilezza di S. E. il Principe Boncompagni, ben chiaro in Italia e fuori per il largo e disinteressato favore, che presta a questi studi.

Con questo lavoro, nel quale se poco fu il merito dell' ingegno grave fu la fatica, e gravissima la spesa incontrata nella pubblicazione, io spero d' aver reso qualche servizio non solo agli amatori delle curiosità bibliografiche, ma anche alla storia della scienza. Infatti la materia di questi dodici cartelli non è già tutta di sfide, di minacce e d' insulti reciproci, come si potrebbe credere, e come era il costume di quei tempi: ma oltre ai materiali per ricostruire la vera storia della scoperta della risoluzione delle equazioni cubiche vi s' incontra il testo e la soluzione dei 31 problemi proposti da Tartaglia a Ferrari e degli altrettanti proposti da Ferrari a Tartaglia: problemi dei quali la difficoltà e l'estensione superano in alcuni casi tutto quello che si potrebbe immaginare in quel tempo. Così per esempio ad alcune questioni proposte da Tartaglia, concernenti la risoluzione di certi problemi di geometria con una data apertura di compasso risponde il Ferrari, dando in poche pagine sciolte in quel modo al suo avversario non solo le proposizioni date, ma tutti i teoremi e problemi d' Euclide. Noi apprendiamo qui ancora, che il primo a proporsi i problemi con data apertura di compasso non fu nè il Ferrari, nè il Benedetti, ma quello stesso Scipione dal Ferro, che primo riuscì nella soluzione delle equazioni cubiche.

Il volume consta di 164 pagine di litografia in-quarto e di 44



pagine stampate al modo ordinario. Del piccolo numero di esemplari che se ne è tirato gli amatori potranno ottenerne, inviando per ogni esemplare Marchi 48 (o Franchi 60) *al Signor Enrico Giordani, Milano, presso il Regio Osservatorio Astronomico,* oppure dandone commissione ad un librajo, al quale dietro pagamento in pronti contanti si farà lo sconto del 20 p%.

Milano 18 Marzo 1877. Enrico Giordani.

A. Cayley: An elementary treatise on Elliptic Functions. 8°. 1876 pp. I to X and 1 to 384.)

The treatise is founded upon Legendre's *traité des Fonctions Elliptiques* and upon Jacobi's *Fundamenta Nova* and Memoirs by him in Crelle's Journal: comparatively very little use is made of the investigations of Abel, or of those of later writers. It is shown how the transition is made from Legendre's Elliptic Integrals of the three kinds to Jacobi's amplitude, which is the argument of the Elliptic Functions (the sine, cosine, and delta of the amplitude, or as, with Gudermann, they are written sn, cn, dn) and also of Jacobi's functions Z, Π which replace the integrals of the second and third kinds, and of the functions Θ and H, which he was thence led to. Not included in the *Fundamenta Nova* there is the important theory of the partial differential equation satisfied by the functions Θ, H, and deduced therefrom, the partial differential equations satisfied by the numerators and denominator in the theories of the multiplication and transformation of the elliptic functions; these are regarded as essential parts of Jacobi's theory, and they are given in the treatise accordingly.

The work is an elementary one, and makes no pretensions to originality or completeness: as already mentioned the idea is to combine Legendre and Jacobi.

The Chapters are I. General Outline. II. The Addition-Equation; Landen's theorem. III. Miscellaneous Investigations. IV. On the Elliptic Functions sn, cn, dn. V. The three kinds of Elliptic Integrals. VI. The functions $\Pi(u, \alpha)$, Zu, Θu, Hu. VII. Transformation; General Outline. VIII. The quadric transformation $n = 2$; and the odd-prime transformations, $n = 3, 5, 7$. Properties of the

modular equation and the multiplier. IX. Jacobi's partial differential equations for the functions H, Θ and for the numerators and denominator in the multiplication and transformation of the elliptic functions sn, cn, dn. X. Transformation for an odd and in particular an odd-prime order; development of the theory by means of the n-division of the complete functions. XI. The q-functions: further theory of the functions H, Θ. XII. Reduction of the differential expression $\frac{Rdx}{\sqrt{X}}$. XII. Quadric transformation of the elliptic integrals of the first and second kinds: the arithmetico-geometrical mean. XIV. The general differential equation $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$. XV. On the determination of certain curves the arc of which is represented by an elliptic integral of the first kind. XVI. On two integrals reducible to elliptic integrals. Addition. Further theory of the linear and quadric transformations.

A few points may be adverted to.

I use throughout Gudermann's notation sn, cn, dn in place of Jacobi's sin am, cos am, Δ am: the amplitude itself in the few places where it occurs is written indifferently am, or $\sin^{-1}$ sn.

I consider explicitly, and introduce a notation for the extreme case $k = 1$, viz. am u is here the Gudermannian of u and is written gd. u. The sin am and the cos am and Δ am (which last two functions are of course equal) become sin gd u and cos gd u, or simply sg u, cg u. The formula for the Gudermannian are interesting for their own sake, and they afford very convenient verifications for the general formulae; viz. these, writing therein $k = 1$, should give the far more simple formulae which belong to the Gudermannian.

A notation is frequently used which seems to me convenient: we have, as in the expressions for $\text{sn}(u + v)$, $\text{cn}(u + v)$, $\text{dn}(u + v)$, groups of formulae involving fractions which have a common denominator, the numerators and denominator being complicated algebraical functions: I write down the numerators only, putting after each numerator the sign $(\div)$, thus, $\text{sn}(u + v) =$ numerator in question $(\div)$; and, at the end of the group of formulae, say, where denominator = its given value.

In chapter IV, I start from fundamental formulae for the sn, cn and cn of $u \pm v$, and give in considerable detail the various resulting formulae: viz. the formulae for the different combinations

of the functions of $u + v$, $u - v$, Fund. Nova pp. 32. 34, showing the algebraical ground of the reductions which present themselves in the process of obtaining these formulae: the formulae belonging to the periods, viz. those for the functions of $u + (0, 1, 2, 3) K + (0, 1, 2, 3) iK'$; those for the duplication $2u$; for the dimidiation $\frac{1}{2}u$, and for the dimidiation of the periods, or formulae for the functions of $\frac{1}{2}K$, $\frac{1}{2}iK'$, $\frac{1}{2}K + \frac{1}{2}iK'$ etc.: also, in several forms, the formulae for the functions of $u + \frac{1}{2}K$, $u + \frac{1}{2}iK'$, $u + \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}iK'$; the formulae for the triplication $3u$: and for the multiplication by 4, 5, 6 and 7 (the cases 6 and 7 after Baehr). I show also how the formulae are to be obtained for the multiplication by any positive integer n: and show how by the aid of the functions of $\frac{mK + m'iK'}{n}$, the several numerators and the denominator can be expressed in a factorial form. It is remarked that writing $\frac{u}{n}$ in place of u, and supposing ultimately that n is $= \infty$, we are thus led to formulae of the form

$$\text{sn}\, u = u\left\{1 + \frac{u}{(m, m')}\right\} \div \left\{1 + \frac{u}{(m, m')}\right\}$$

where m, m' have each of them every integer value from $-\infty$ to $+\infty$, the simultaneous values $m = 0$, $m' = 0$ being excluded from the numerator of sn u; but that, the formulae thus arrived at are not only not proved, but that, *in the absence of further definition as to the limits*, they are wholly meaningless. This has of course reference to the double factorial form of the functions H, Θ, but the subject is not much gone into in the sequel.

The theory of the functions Θ, H is established as follows: the function Zu being introduced as in the Fundamenta Nova, and Θu defined by reference to it, $\Theta u = \Theta o\, e^{-\int_o Zu\,du}$, we obtain Jacobi's formula $\Pi(u, a) = u\, Za + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u - a)}{\Theta(u + a)}$; which may be written $\Pi(u + a, a) = (u + a)\, Za - \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u + 2a)}{\Theta u}$; the function $\Pi(u + a, a)$ becomes integrable for the three values $a = \frac{1}{2}iK'$, $\frac{1}{2}K + \frac{1}{2}iK'$, $\frac{1}{2}K$ viz. the values in question contain log sn u, log cn u and log dn u, and we thus obtain sn u, cn u, dn u as fractions with the common denominator Θu, having in their numerators (besides a constant or exponential factor) $\Theta(u + iK')$, $\Theta(u + K + iK')$, $\Theta(u + K)$ respectively: or introducing Hu in place of $\Theta(u + iK')$, the numerators contain Hu, $H(u + K)$, $\Theta(u + K)$ respectively.

The transformation theory gives $\operatorname{sn} u$ equal to a quotient of two q-functions, and the denominator herein is identified with Θu as in the Fundamenta Nova.

The partial differential equations satisfied by the numerators and the denominator in the multiplication and transformation of the functions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ are discussed Chap. IX in some detail. It is remarked that they are practically useless as regards the problem of transformation: for even when the modular equation is known, in seeking a solution by the method of indeterminate coefficients, the coefficients of the several powers of x are functions of (u, v) not only unknown, but in form indeterminate (as admitting of modification by means of the modular equation); and when the actual expression as a function of (x, u, v) is known, as of course it is for the cubic, quintic etc. transformations, it is from the complexity of the modular equations by no means easy to verify the formulae: in illustration, it is shown how the formula is verified in the case of the cubic transformation.

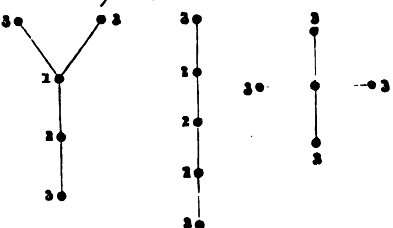
Chapters XIII to XVI may be regarded as supplementary. In Chapter XIV I gives some new developments in regard to Euler's integral $\left(\frac{\sqrt{X}-\sqrt{Y}}{x-y}\right)^2 = C + d(x+y) + e(x+y)^2$, of the equation $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$; showing how the integral equation when rationalised, assumes the form $u = 0$, where u is a rational and integral function of the second order as regards each of the variables x, y, and also of the second order as regards the constant C: it thence appears that regard C as a variable, the equation is an integral of the differential equation $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{dC}{\sqrt{\mathfrak{C}}} = 0$, where $\mathfrak{C}$ is a cubic function of C, invariantively connected with the function X, the actual expression (when $X = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$) being $\mathfrak{C} = ad^2 + b^2e - bcd + C\{-4ae + bd + (C-c)^2\}$. I have further pursued the enquiry in a paper recently presented to the London Mathematical Society.

Cambridge. A. Cayley.



A. Cayley: On the analytical forms called Trees, with application to the theory of chemical combinations. (From the Report of the British Association for the advancement of Science for 1875, pp. 257—305.)

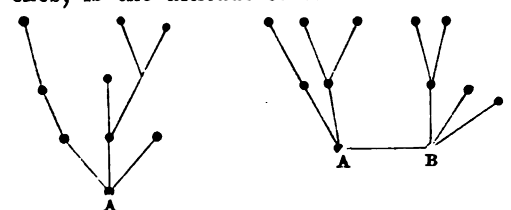
I have in two papers "On the Analytical forms called Trees," Phil. Mag. vol. XIII. (1857) pp. 172—176, and ditto, vol. XX. (1860) pp. 337—341, considered this theory, and in a paper „On the Mathematical Theory of Isomers," ditto, vol. XLVII. (1874) p. 444, pointed out its connexion with modern chemical theory. In particular as regards the paraffines C_nH_{2n+2}, we have n atoms of carbon connected by $n-1$ bands, under the restriction that from each carbon-atom there proceed at most 4 bands (or, in the language of the papers first referred to, we have n knots connected by $n-1$ branches), in the form of a tree; for instance, $n=5$, such forms (and the only such forms) are



And if (under the foregoing restriction of only 4 bands from a carbon-atom) we connect with each carbon-atom the greatest possible number of hydrogen-atoms (as shown in the diagrams by the affixed numerals), we see that the number of hydrogen-atoms is 12 $(=2\cdot 5+2)$, and we have thus the representations of three different paraffines, C_5H_{12}. It should be observed that the tree-symbol of the paraffine is completely determined by means of the tree formed with the carbon-atoms, or say of the carbon-tree, and that the question of the determination of the theoretic number of the paraffines C_nH_{2n+2} is consequently that of the determination of the number of the carbon-trees of n knots, viz. the number of trees with n knots, subject to the condition that the number of branches from each knot is at most $=4$.

In the paper of 1857 (which contains no application to chemical theory) the number of branches from a knot was unlimited; and moreover the trees were considered as issuing each from one knot taken as a root, so that, $n=5$, the trees regarded as distinct (instead of being as above only 3) were in all 9.

To count the trees on the principle first referred to, we require the notions of „centre“ and „bicentre“, due, I believe, to Sylvester; and to establish these we require the notions of „main branch“ and „altitude“: viz. in a tree, selecting any knot at pleasure as a root, the branches which issue from the root, each with all the branches that belong to it, are the main branches, and the distance of the furthest knot, measured by the number of intermediate branches, is the altitude of the main branch. Thus in the

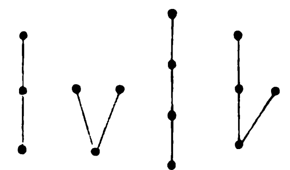


left-hand figure, taking A as the root, there are 3 main branches of the altitudes 3, 3, 1 respectively: in the right-hand figure, taking A as the root, there are 4 main branches of the altitudes 2, 2, 1, 3 respectively; and we have then the theorem that in every tree there is either one and only one centre, or else one and only one bicentre; viz. we have (as in the left-hand figure) a centre A which is such that there issue from it two or more main branches of altitudes equal to each other and superior to those of the other main branches (if any); or else (as in the right-hand figure) a bicentre AB, viz. two contiguous knots, such that issuing from A (but not counting AB), and issuing from B (but not counting BA), we have two or more main branches, one at least from A and one at least from B, of altitudes equal to each other and superior to those of the other main branches in question (if any).

Hence, since in any tree there is a unique centre or bicentre, the question of finding the number of distinct trees with n knots is in fact that of finding the number of centre- and bicentre-trees with n knots; or say it is the problem of the „general centre- and bicentre-trees with n knots“: *general*, inasmuch as the number of branches from a knot is as yet taken to be without limit; or since (as will appear) the number of the bicentre-trees can be obtained without difficulty when the problem of the root-trees is solved, the problem is that of the „general centre-trees with n knots“. It will appear that the solution depends upon and is very readily derived from that of the foregoing problem of general root-trees, so that this last has to be considered, not only for its own sake, but with

a view to that of the centre-trees. And in each of the two problems we doubly divide the whole system of trees according to the number of the main branches (issuing from the root or centre as the case may be), and according to the altitude of the longest main branch or branches, or say the altitude of the tree; so that the problem really is, for a given number of knots, a given number of main branches, and a given altitude, to find the number of root-trees, or (as the case may be) centre-trees.

We next introduce the restriction that the number of branches from any knot is equal to a given number at most; viz. according as this number is $= 2$, 3 or 4, we have, say oxygen-trees, boron-trees*), and carbon-trees respectively; and these are as before root-trees or centre- or bicentre-trees, as the case may be. The case where the number is 2 presents no difficulty: in fact if the number of knots be $= n$, then the number of root-trees is either $\frac{1}{2}(n+1)$ or $\frac{1}{2}n$; viz. $n = 3$ and $n = 4$, the root-trees are



and the number of centre- or bicentre-trees is always $= 1$: viz. n odd, there is one centre-tree; and n even, one bicentre-tree; the case is considered only as a particular case of the general theorem. The number is $= 3$ is analytically interesting: although there may not exist, for any 3-valent element, a series of hydrogen compounds $B_n H_{n+2}$ corresponding to the paraffines. The case where the number is $= 4$, or say the carbon-trees, is that which presents the chief chemical interest, as giving the paraffines $C_n H_{2n+2}$; and I call to mind here that the theory of the carbon-root trees is established as an analytical result for its own sake and as the foundation for the other case, but that it is the number of the carbon centre- and bicentre-trees which is the number of the paraffines.

The theory extends to the case where the number of branches

---

*) I should have said nitrogen-trees; but it appears to me that nitrogen is of necessity 5-valent, as shown by the compound, Ammonium-Chloride, $= HN_4 Cl$: of course the word boron is used simply to stand for a 3-valent element.

from a knot is at most $= 5$, or $=$ any larger number; but I have not developed the formula.

As regards the analytical theory: considering first the case of general root-trees, we endeavour to find for a given altitude N the number of trees of a given number of knots n and main branches α, or say the generating function

$$\Sigma \Omega t^{\alpha} x^{n},$$

where the coefficient Ω gives the number of the trees in question. And we assume that the problem is solved for the cases of the several inferior altitudes $0, 1, 2, 3 \ldots N-1$. This being so, we are able to form the generating function for the case of an altitude N and the formula with a slight modification becomes applicable to centre-trees. The bicentre-trees can be taken account of separately without much difficulty; and the general problem is thus solved.

Cambridge. A. Cayley.

Schiaparelli, G. V. Di alcune questioni concernenti il movimento degli occhi. (Annali di Oftalmologia del Profess. A. Quaglino. Anno V. Fascicolo 2 e 3. Milano 1876.)

Lo scopo di questa breve Memoria è di rischiarare alcuni dubbi, che erano stati proposti sulla teoria geometrica del movimento degli occhi, quale è sviluppata da Helmholtz nel §. 27 della *Physiologische Optik*. Queste spiegazioni, che sono di carattere affatto elementare, non avrebbero meritato di essere citate nel presente Giornale, se come loro conseguenza non mi fosse riuscito di presentare tutta la teoria geometrica della roteazione dell' occhio intorno alla linea visuale (cioè del fenomeno appellato *Rollung* dagli oftalmologi tedeschi) in una legge molto semplice, dalla quale tutte le proposizioni relative a quella teoria si deducono facilmente e brevemente.

Sopra una superficie sferica, concentrica al centro del moto rotatorio del bulbo si projettino i movimenti di questo, e s' indichi col punto fisso A la direzione primaria della linea visuale; con un altro punto mobile B di quella superficie designiamo la direzione che prende la stessa linea visuale durante un suo movimento qualunque. Chiamo *arco vettore* del punto B l' arco AB di circolo massimo, il quale

si moverà esso pure intorno al suo estremo fisso A, variando ad ogni momento di direzione e di lunghezza. Nel moversi di B l' arco vettore descriverà sulla superficie sferica un' area in modo simile a quello, che fanno i raggi vettori dei pianeti nei piani delle loro orbite. Ciò posto, ed ammesso che il movimento dell' occhio abbia luogo esattamente secondo le leggi di Donders e di Listing, la sua roteazione intorno alla linea visuale si farà secondo quest' altra legge:

„Nel passare della linea visuale (o del punto B) da una posizione qualunque ad un' altra qualunque, percorrendo qualunque via intermedia: la roteazione dell' occhio intorno alla linea visuale si fa sempre in senso contrario al moto dell' arco vettore intorno alla posizione primaria A; e questa roteazione è ad ogni istante proporzionale all' area descritta dall' arco vettore intorno ad A, per modo che la roteazione cresce di un grado ogni volta che l' area predetta cresce di $\frac{1}{720}$ di tutta la superficie sferica."

Questa proposizione vale, qualunque sia il movimento di B rispetto ad A e qualunque sia la natura della curva percorsa da B sulla sfera. Quando la descrizione delle aree si fa in senso opposto, anche la roteazione cambia di segno. Si può così facilmente calcolare la quantità di roteazione (o *Rollung*) dell' occhio fra due fasi qualunque di movimento. Come caso particolare si deducono le formule date da Helmholtz pel calcolo di ciò ch' egli chiama *Raddrehung*, e pel calcolo dell' *inclinazione* di Donders. E facilmente si possono anche derivarne dimostrazioni dei teoremi eleganti sulla rotazione dell' occhio, che Helmholtz ha sviluppato a pag. 467—468 e 487—495 del suo grande Trattato.

Milano, Marzo 1877. G. V. Schiaparelli.

Désiré André: Développements en séries des fonctions elliptiques et de leurs puissances.

I. Si l'on désigne par n un exposant entier et positif, et par $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\nu(x)$ les trois fonctions elliptiques, on peut, comme on le sait, en ordonnant par rapport aux puissances croissantes de x, écrire:

$$\lambda^\pi(x) = A_0^{(\pi)} \frac{x^\pi}{\pi!} - A_1^{(\pi)} \frac{x^{\pi+2}}{(\pi+2)!} + A_2^{(\pi)} \frac{x^{\pi+4}}{(\pi+4)!} - \cdots\cdot$$

$$\mu^\pi(x) = B_0^{(\pi)} - B_1^{(\pi)} \frac{x^2}{2!} + B_2^{(\pi)} \frac{x^4}{4!} - \cdots\cdots$$

$$\nu^\pi(x) = C_0^{(\pi)} - C_1^{(\pi)} \frac{x^2}{2!} + C_2^{(\pi)} \frac{x^4}{4!} - \cdots\cdots$$

On sait de plus que, dans ces développements, les coefficients $A^{(\pi)}$, $B^{(\pi)}$, $C^{(\pi)}$ sont des polynômes entiers en k^2, de telle sorte que l'on a

$$A_q^{(\pi)} = \alpha_{q,0}^{(\pi)} + \alpha_{q,1}^{(\pi)} k^2 + \alpha_{q,2}^{(\pi)} \varkappa^4 + \cdots\cdot$$

$$B_q^{(\pi)} = \beta_{q,0}^{(\pi)} + \beta_{q,1}^{(\pi)} k^2 + \beta_{q,2}^{(\pi)} \varkappa^4 + \cdots\cdots$$

$$C_q^{(\pi)} = \gamma_{q,0}^{(\pi)} k^{2q} + \gamma_{q,1}^{(\pi)} k^{2q-2} + \gamma_{q,2}^{(\pi)} k^{2q-4} + \cdots\cdot$$

M. Désiré André s'est proposé de trouver la forme générale des coefficients $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$, $\beta_{q,i}^{(\pi)}$, $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$ regardés comme des fonctions de q, les indices π et i étant supposés constants. Ses résultats ont été présentés à l'académie des sciences de Paris dans la séance du 10 Juillet 1876 et son travail fait l'objet d'un mémoire inséré in extenso dans les annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure.

Nous allons exposer d'abord, le plus brièvement possible, la méthode employée dans ce travail. Nous ferons connaître ensuite les résultats obtenus.

II. La détermination des coefficients du développement d'une fonction quelconque revient au calcul des dérivées successives de cette fonction. Dans le cas particulier des fonctions elliptiques et de leurs puissances, tout se ramène au calcul des dérivées d'ordre pair. L'auteur du mémoire s'occupe donc en premieur lieu de ces derivées, et, afin de conduire de front tout ce qui est relatif aux trois fonctions elliptiques, il étudie, non pas ces fonctions elles-mêmes, mais une fonction $\varphi(x)$, qui satisfait à l'équation différentielle

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = D + V\varphi^2 + G\varphi^4,$$

et qui contient les trois fonctions elliptiques comme cas particuliers.

Il est très-facile de voir que les dérivées d'ordre pair de $\varphi^\pi(x)$ sont des polynômes entiers en φ, pairs ou impairs suivant que l'exposant π est lui-même pair ou impair; et, comme tout se passe

à très-peu près de la même manière dans les deux cas, nous pouvons, dans ce résumé, n'en considérer qu'un seul, supposer que l'exposant π et impair est égal à $2p+1$, et écrire

$$\frac{d^{2q}\varphi^{2p+1}}{dx^{2q}} = F_{q,0}^{(2p+1)}\varphi + F_{q,1}^{(2p+1)}\varphi^3 + F_{q,2}^{(2p+1)}\varphi^5 + \cdots.$$

M. Désiré André dispose en un triangle, analogue au triangle de Pascal, tous les coefficients F correspondant au développement de φ^{2p+1}, de telle sorte que chaque ligne horizontale présente les coefficients d'une même dérivée et chaque colonne verticale les coefficients d'une même puissance de φ; puis il montre que chaque F de ce triangle est égal à la somme des trois F les plus voisins de la ligne horizontale immédiatement supérieure multipliés respectivement par des facteurs déterminés.

Il s'ensuit que $F_{q,r}^{(2p+1)}$ est un polynôme dont les différents termes présentent chacun un coefficient numérique et une puissance d'exposant positif ou nul de chacune des quantités V, D, G. Si l'on n'a effectué aucune réduction, le nombre des termes de ce polynôme est égal au nombre des chemins qui remontent, conformément à la loi de formation des F, du polynôme considéré $F_{q,r}^{(2p+1)}$ au polynôme initial $F_{o,p}^{(2p+1)}$. Si l'on figure chacun de ces chemins par des points marquant les F où il passe et par des traits, verticaux ou obliques, joignant ces points successifs, on obtient une ligne présentant des traits de trois sortes et formant ce que l'Auteur appelle un chemin ternaire. Le terme du polynôme qui correspond à ce chemin est le produit des facteurs apportés respectivement par chaque trait et chaque point. Quant au polynôme $F_{q,r}^{(2p+1)}$, il est la somme de tous ces produits.

Ce même polynôme $F_{q,r}^{(2p+1)}$ est homogène et du degré q par rapport aux quantités V, D, G. Son terme général est représenté par l'expression

$$f_{q,r,i}^{(2p+1)}\, V^{q-e-2i} G^{\mathrm{G}+i} D^{\mathrm{D}+i}$$

dans laquelle $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$ désigne un coefficient numérique, e la différence, prise en valeur absolue, des deux nombres r et p, G et D deux entiers égaux l'un à e et l'autre à zéro. Ce terme général est la somme de tous les termes du polynôme considéré qui proviennent des chemins ternaires présentant chacun $q - e - 2i$ traits verticaux. Si, dans chacun de ces chemins, on supprime tous les traits ver-

ticaux, ainsi que tous les points qui les surmontent immédiatement, puis qu'on rapproche les tronçons restants, on forme de nouveaux chemins, dits chemins binaires, parce qu'ils ne contiennent plus que deux sortes de traits. Les termes provenant de tous les chemins ternaires qui se réduisent ainsi à un même chemin binaire ont une somme dans laquelle les quantités correspondant aux points et aux traits de ce chemin binaire se mettent en facteur commun; et il en résulte que cette somme se présente sous la forme d'un produit de deux facteurs dont le premier ne dépend pas de q, tandis que le second en dépend.

En étudiant, dans cette somme partielle, mise ainsi sous la forme d'un produit, le facteur qui dépend de q, on constate qu'il est le terme général du développement, suivant les puissances croissantes de la variable, d'une certaine fraction rationelle. Il en est de même de la somme partielle que nous considérons. De même encore du coefficient $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$, pris dans tout son ensemble. La fraction rationelle qui correspond à ce dernier cas est la fonction génératrice de $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$ considéré comme fonction de q, les indices p, r, i étant supposés constants. M. Désiré André forme le dénominateur de cette fraction, il le donne tout décomposé en facteurs du premier degré, et il montre que le numérateur est un polynôme d'un degré inférieur au degré du dénominateur.

Puisque le dénominateur de cette fraction rationnelle se présente ainsi tout décomposé en facteurs du premier degré, il suffit d'appliquer les propriétés connues des séries récurrentes proprement dites pour obtenir le terme général du développement de la fraction, et c'est en opérant ainsi que l'auteur parvient à la forme analytique générale du coefficient $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$ regardé comme une fonction de q, tous les autres indices étant supposés constants.

On connaît ainsi la forme analytique de tous les coefficients des dérivées d'ordre pair de $\varphi^{2p+1}(x)$. En y remplaçant V, G, D par les quantités convenables, on arrive aux dérivées d'ordre pair des puissances $(2p+1)^{ième}$ des trois fonctions elliptiques. Il en résulte que l'on connaît la forme analytique des coefficients des puissances successives de x dans les développements considérés.

Seulement ces coefficients ne sont pas encore ordonnés par rapport aux puissances de x^2: ils présentent des puissances de k^2, de $1+k^2$, de $1-k^2$, de $2k^2-1$, de $2-k^2$. On suppose toutes

ces puissances développées, on groupe les termes renfermant une même puissance de k^2, et l'on parvient finalement à la forme analytique générale des coefficients $\alpha_{q,i}^{(2p+1)}$, $\beta_{q,i}^{(2p+1)}$, $\gamma_{q,i}^{(2p+1)}$.

C'est une méthode absolument semblable qui conduit à la forme analytique générale des coefficients $\alpha_{q,i}^{(2p)}$, $\beta_{q,i}^{(2p)}$, $\gamma_{q,i}^{(2p)}$.

III. Voici les résultats, tout nouveaux, selon nous, auxquels M. Désiré André est parvenu en suivant la voie que nous venons d'indiquer:

Chacun des coefficients $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$, $\beta_{q,i}^{(\pi)}$, $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$, où q est seul variable, est le terme général d'une série récurrente proprement dite.

Cette série récurrente est définie par l'une ou l'autre des deux équations

$$\prod_{0}^{p}{}_t [z-(2t+1)^2]^{i+1} \times \prod_{p+1}^{p+i}{}_t [z-(2t+1)^2]^{p+i+1-t} = 0$$

$$\prod_{1}^{p}{}_t [z-(2t)^2]^{i+1} \times \prod_{p+1}^{p+i}{}_t [z-(2t)^2]^{p+i+1-t} = 0,$$

suivant que p est égal à $2p+1$ ou à $2p$.

Dans le cas où π est égal à $2p+1$, chacun des coefficients $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$, $\beta_{q,i}^{(\pi)}$, $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$ est de la forme

$$\sum_{0}^{p}{}_t \Xi_t(q)(2t+1)^{2q} + \sum_{p+1}^{p+i}{}_t \xi_t(q)(2t+1)^{2q};$$

dans le cas où π est égal à $2p$, chacun de ces coefficients est au contraire de la forme

$$\sum_{1}^{p}{}_t \Xi_t(q)(2t)^{2q} + \sum_{p+1}^{p+i}{}_t \xi_t(q)(2t)^{2q};$$

les expressions $\Xi_t(q)$, $\xi_t(q)$ représentant deux polynômes entiers en q, le premier toujours du degré i, le second du degré $p+i-t$.

Il suffit évidemment de remplacer p par zéro dans la première de ces formules pour obtenir les résultats relatifs aux fonctions elliptiques elles-mêmes, et de remplacer dans la seconde p par l'unité pour obtenir les résultats relatifs aux carrés de ces fonctions.

Mischer: Die Gesetze der Bewegung punktueller Massen. (Progr. des Gymn. u. der Realschule 1. O. zu Minden, 1877.)

Die Arbeit enthält eine Erweiterung einer in Schlömilch's Zeitschrift früher von mir veröffentlichten Abhandlung (die Bewegung materieller Punkte auf vorgeschriebenen beweglichen Bahnen), worüber ich bereits in diesem Repertorium referirt habe. Der Calcül ist vollständig angegeben und die Methode auf mehrere Aufgaben der Mechanik angewendet.

Es wird gezeigt, dass die in jener Abhandlung aufgestellten Bewegungsgleichungen die ganze Mechanik eines Massenpunktes enthalten. Ferner wird (ein dort nur kurz berührter Punkt) folgendes Resultat gewonnen:

Die Zeit tritt auch dann nicht explicite in die Bewegungsgleichungen ein, wenn ein mit der Bahn fest verbundener Punkt O' sich entweder in einer Graden mit constanter Geschwindigkeit oder in einer Parabel wie ein geworfener Punkt bewegt, Wege, deren Ebenen der Richtung der das Mobile beeinflussenden constanten Kraft — nur eine solche darf wirken — parallel sein müssen. Dabei darf die Bahn mit constanter Winkelgeschwindigkeit um eine durch O' gehende, der Richtung jener Kraft parallel bleibende Axe rotiren.

Die behandelten Aufgaben sind folgende:

1) Das sphärische Pendel.

2) Bewegung eines schweren Punktes auf einem Kreiscylinder, für verschiedene Bewegungsgesetze des letzteren.

3) Bewegung eines schweren Punktes auf einer rotirenden Geraden.

Minden i. Westf. Mischer.

Martin Krause: Algebraische Untersuchungen aus der Theorie der elliptischen Functionen. (Math. Annalen, Bd. XII, S. 1—22.)

Neben anderen Gleichungen haben in der Theorie der elliptischen Functionen diejenigen Gleichungen Beachtung gefunden, welche zwischen dem Producte des ursprünglichen Moduls in dessen complementären und dem Producte des transformirten in dessen complementären bestehen. Die Theorie derselben ist für einen unpaaren

Transformationsgrad n, der keinen quadratischen Theiler enthält, von den Herren Hermite, Joubert, Königsberger begründet worden, beschränkt sich jedoch auf die Gleichungen selbst, während die Discriminante unberücksichtigt bleibt. Die oben erwähnte Arbeit hat den Zweck, diese Lücke auszufüllen. Es wird in derselben zunächst die Form der Discriminante festgestellt, dann eine Methode zur Bestimmung der von einander verschiedenen Wurzeln derselben gegeben und endlich nach Lösung des allgemeinen Problems der Wurzelentwickelung fixirt, wie vielfach eine jede dieser Wurzeln ist.

Als Beispiele sind die Transformationszahlen bis 30 gewählt worden.

Breslau. Martin Krause.

Hamburger: Ueber das Pfaff'sche Problem. (Grunert's Archiv, Theil LX, 185—214.)

In der Abhandlung „Ueber totale und partielle Differentialgleichungen" Borch. J. Bd. 58) hat Herr Natani zuerst die Lösung des Pfaff'schen Problems auf die successive Integration integrabler Systeme totaler Differentialgleichungen zurückgeführt, derart dass von jedem Systeme nur je eine Lösung erforderlich ist. Nach ihm hat Clebsch im 60. und 61. Bande des Borch. Journ. die Lösung desselben Problems durch die successive Aufstellung simultaner partieller Differentialgleichungen, von denen je ein Integral zu ermitteln ist, bewerkstelligt. Vorliegende Abhandlung bezweckt, eine Darstellung des Problems zu geben, welche auf direktem Wege zu der Natani'schen Form der Lösung und zu den anderen von Hrn. Natani wie von Clebsch gefundenen Resultaten führt. Als Ausgangspunkt dient folgender Satz:

Besteht die Transformation

$$X_1 \delta x_1 + \ldots + X_n \delta x_n = U_1 \delta u_1 + \ldots + U_s \delta u_s$$

wo $X_1 \ldots X_n$ beliebige Functionen von x und $U_1 \ldots U_s$, $u_1 \ldots u_s$ ebenfalls Funktionen von x bedeuten, die vorstehender Gleichung genügen, so gelten als analytische Folgen derselben stets die n Identitäten

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \left(\frac{dX_i}{dx_\varkappa} - \frac{dX_\varkappa}{dx_i}\right) \delta x_\varkappa =$$

$$X_i \frac{\delta U_s}{U_s} + U_s \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s-1} \frac{du_\lambda}{dx_i} \delta\left(\frac{U_\lambda}{U_s}\right) - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \frac{dU_\lambda}{dx_i} \delta u_\lambda$$

Aus diesen ergeben sich unmittelbar die zur Lösung des Pfaff-schen Problems nacheinander aufzustellenden Systeme integrabler Differentialgleichungen.

Es werden nacheinander behandelt

1) der Fall einer geraden Anzahl der x unter der Voraussetzung, dass die Determinante der Grössen

$$(i\varkappa) = \frac{dX_i}{dx_\varkappa} - \frac{dX_\varkappa}{dx_i}$$

nicht verschwindet.

2) der allgemeinere Fall, in welchem der vorhergehende als besonderer Fall enthalten ist, und welchen Clebsch den „determinirten Fall" des Pfaff'schen Problems nennt.

3) der Fall einer ungeraden Anzahl der x unter der Voraussetzung, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} (1{:}1)\,..\,(1n), & -X_1 \\ \dots\dots\dots & \\ (n1)\,..\,(nn), & -X_n \\ X_1\,..\,X_n, & 0 \end{vmatrix}$$ von Null verschieden ist.

Derselbe dient als Beispiel für die Behandlung des allgemeineren von Clebsch sogenannten „indeterminirten Falles" des Pfaff'schen Problems, auf welchen in der vorliegenden Arbeit nicht näher eingegangen wird.

Zum Schluss folgt eine Anwendung auf die Integration der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\varphi(z, x_1\,..\,x_n, p_1\,..\,p_n) = a \quad \left(p_\varkappa = \frac{dz}{dx_\varkappa}\right)$$

d. h. auf die Transformation

$$dz - p_1 dx_1\,..-p_n dx_n = U_1 du_1 + \dots U_{n+1} du_{n+1}$$

mit der Bestimmung, dass u_1 die gegebene Function φ sei.

Berlin. Hamburger.

Inhaltsverzeichniss.

Berichtigungen.

S. 63. Zeile 5 v. unten, lies: Culmann's graphische Statik statt „statische Graphik."

S. 90. Formel (2) lies $V + V_0 = (G + G_0)\,(xu + \sigma)$ statt $G\,(xu + \sigma)$

S. 212. Zeile 18 v. unten, lies: des Richtungskegels.

S. 216. Zeile 6 v. oben, lies: Hyperboloid.

S. 218. Zeile 19 v. unten, lies: „oder" statt der (Anfangswort).

S. 220. Zeile 10 v. unten, streiche „und" vor aus.

S. 225. Zeile 1 v. unten, lies: „der" statt den.

S. 225. Zeile 7 v. unten, fehlt ein Komma nach Classe.

S. 226. Zeile 4, v. oben. Der Schlusssatz sollte kurz heissen: Man weiss, dass die Schraubenlinie dasselbe thut.

REPERTORIUM

DER LITERARISCHEN ARBEITEN

AUS DEM GEBIETE DER

REINEN UND ANGEWANDTEN MATHEMATIK

„ORIGINALBERICHTE DER VERFASSER"

GESAMMELT UND HERAUSGEGEBEN

VON

Dr. LEO KOENIGSBERGER, Prof. d. Mathematik a. d. Univ. z. Wien

und

Dr. GUSTAV ZEUNER, Prof. d. Mechanik a. d. Polytechnikum z. Dresden.

II. BAND.



LEIPZIG

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1879.



H. G. Zeuthen: Brahmeguptas Trapez. (Tidsskrift for Mathematik 1876, pp. 168—174 et 181—191.)

On trouve dans l'ouvrage posthume de Hankel „Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter" l'hypothèse qu'il faut regarder les constructions à la fin de la partie géométrique du chapitre arithmétique de Brahmegupta comme les véritables définitions des figures dont s'occupe le géomètre indien; mais l'ingénieux savant allemand n'indique pas complètement ses suppositions sur la manière dont les Indiens ont pu trouver les propriétés de ces figures. En suivant ses allusions à cet égard j'ai essayé d'établir, par des moyens qui étaient à la disposition des Indiens, quand même en forme moderne, les propriétés de la figure appelée trapèze dans la traduction anglaise de Brahmegupta. J'ai cru devoir renoncer, dans cette déduction, à l'usage de toute proposition géométrique où l'on considère expressément les quantités d'angles.

Entre les théorèmes déduits ainsi se présente de lui-même celui qui sert à exprimer le rayon du cercle inscrit à un triangle, et je ne puis croire que la démonstration de Chaturveda, qui n'est qu'une périphrase du théorème, est celle qui a conduit les Indiens à *trouver* ce théorème; je ne partage donc pas, par rapport à ce théorème, l'opinion de Hankel qui cite cette démonstration comme un exemple de l'intuition des Indiens.

Les Indiens, pourquoi se sont ils occupés de leurs „trapèzes"? Je crois parce que ces figures représentent immédiatement la formule de $\sin(x + y)$.

A la fin de mon article j'étends les démonstrations, données pour les „trapèzes", à tous les quadrilatères inscriptibles.

H. G. Zeuthen: Övelser i grafisk Statik.*) (Tidsskrift for Mathematik 1877, pp. 27—53.)

Cet article contient 42 questions plus ou moins simples, demandant la construction, par la règle et le compas, de polygones funiculaires, soit appartenant à un système donné de forces et satisfaisant à trois autres conditions, soit appartenant à un système de forces en partie inconnu et satisfaisant encore à plus de trois conditions.

Les questions sont accompagnées des considérations théoriques d'où dépend leur solution. J'en citerai ici les propositions suivantes Si un côté d'un polygone funiculaire, appartenant à un système. donné de forces, passe par un point donné (ou, plus généralement, si sa tension a une puissance donnée par rapport à un point donné), deux autres côtés formeront deux figures homologiques, le centre d'homologie étant au point donné; et la figure formée par un côté sera correlative à celle que forme le pôle qui correspond, dans la figure des forces, au polygone funiculaire variable; on peut donner à ces deux figures correlatives la position de deux polaires réciproques par rapport à un cercle. — Si, pour un système donné de forces, le pôle correspondant à un polygone funiculaire se trouve sur une droite donnée, deux côtés du polygone formeront des figures homologiques ayant pour centre d'homologie le point à l'infini de la droite donnée.

Une partie des questions où le système de forces n'est pas entièrement connu se réduisent, par la substitution de la réaction d'un côté du polygone funiculaire à une force, à celles qui demandent la construction pour un système donné de forces, et réciproquement.

Le dernier No. contient la construction graphique des tensions de $2n$ barres dont les n sont les côtes d'un polygone plan et fermé, pendant que les n autres en joignent les sommets à des points fixes, les n sommets étant soumis à des forces données. M. Maxwell a traité de questions analogues à celle-ci dans son mémoire: On Reciprocal Figures and Diagrams of Forces (Philosophical Magazine 1864).

Copenhague. H. G. Zeuthen.

*) Exercices de statique graphique.

H. Grassmann: Zur Elektrodynamik. (Journal für Math. Bd. 83. S. 57.)

Im Jahre 1845 hatte ich in Poggendorffs Annalen Bd. 64. S. 1 ff. für die Einwirkung eines unendlich kleinen elektrischen Stromtheiles auf einen andern eine Formel aufgestellt, welche von der Ampère'schen wesentlich abweicht und sich durch ihre grössere Einfachheit auszeichnet. Nun hat Herr Clausius kürzlich eine neue, auf sicherer Grundlage ruhende Theorie der Elektrodynamik in dem Journal für Math. Bd. 82. S. 85 ff. aufgestellt, aus welcher sich mir durch eine kurze Rechnung ergab, dass diese Theorie auf die gegenseitige Einwirkung unendlich kleiner elektrischer Stromtheile angewandt genau dieselbe Formel ergab, welche ich 1845 als die muthmasslich richtige aufgestellt hatte. Sind nämlich AA_1 und BB_1 unendlich kleine Stücke elektrischer Ströme und i und i ihre Intensitäten, und wird iAA_1 mit a, iBB_1 mit b, die senkrechte Projection von b auf die Ebene AA_1B mit b_1, AB mit r und Winkel A_1AB mit α bezeichnet, so ergab sich als Einwirkung X des ersten Stromtheils auf den zweiten, abgesehen von einem constanten Zahlfactor, die Formel

$$X = \frac{ab_1 \sin \alpha}{r^2},$$

wie ich sie in Pogg. Ann. a. a. O. aufgestellt habe. Hier liegt X senkrecht gegen b_1 in der Ebene AA_1B. Ich habe nachgewiesen, dass die Formel aus der Clausius'schen Theorie mit Nothwendigkeit hervorgeht. Ferner habe ich aus dieser Formel auf ganz elementare Weise die Wirkung abgeleitet, welche ein constanter geschlossener Strom im Raume auf einen Stromtheil übt. Ich betrachte nämlich jenen geschlossenen Strom zunächst als ein durchströmtes Polygon. Ist BC irgend eine Seite desselben, i die Intensität des Stromes und A der Anfangspunkt eines unendlich kleinen Stromtheiles, dessen senkrechte Projection auf $ABC = b_1$ ist, so ergiebt sich die Wirkung v

$$v = \frac{2ib_1 \sin \frac{\alpha}{2}}{m},$$

wo $\alpha = \angle BAC$ und m die von A nach BC gezogene Linie ist, welche den Winkel α halbirt. Die Richtung von v ist senkrecht auf b_1 in der Ebene ABC. Ist v_1 die Wirkung der nächstfolgenden Seite des Polygons, u. s. w., so wird die gesammte Wirkung V jenes Polygons

$$V = v + v_1 + \dots,$$

wo die Addition auf der rechten Seite die geometrische ist. Eine sehr einfache, auf die Ausdehnungslehre gegründete Betrachtung ergiebt dann den allgemeinen Satz:

„Wenn ein beliebiger geschlossener Strom im Raume gegeben ist, so giebt es zu jedem Punkt A eine bestimmte Ebene, die man die Wirkungsebene des Stromes nennen kann, und welche die Eigenschaft hat, dass jedes durch A gehende Stromelement durch jenen Strom dieselbe Wirkung erfährt wie seine senkrechte Projection auf die Wirkungsebene, ferner dass diese Wirkung in der Wirkungsebene senkrecht gegen das Stromelement erfolgt und ihrer Grösse nach unabhängig von der Richtung jener Projection ist."

Stettin. H. Grassmann.

H. Weber: Ueber die Transcendenten zweiter und dritter Gattung bei den hyperelliptischen Functionen erster Ordnung.

(Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. LXXXII. S. 131.)

Die Theorie der elliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung hat Jacobi zu einem Abschluss gebracht, indem er als unabhängige Veränderliche das Integral erster Gattung einführte. Es lassen sich dann diese Functionen und damit alle elliptischen Integrale überhaupt durch die eine Function $\Theta(u)$ ausdrücken, wobei die Functionen

$$\frac{\partial \log \Theta(u)}{\partial u}; \qquad \log \frac{\Theta(u-v)}{\Theta(u+v)}$$

als Normalintegrale zweiter und dritter Gattung auftreten, wenn u und v Integrale erster Gattung sind. In dem Integral dritter Gattung heisst u das Argument, v der Parameter, und beide können mit einander vertauscht werden. Dadurch ist dies Integral dritter Gattung, welches ursprünglich von drei Veränderlichen abhängt, zurückgeführt auf die nur von zwei Veränderlichen abhängige Function Θ.

Analoge Untersuchungen für die nächst höhere Classe von Functionen, die hyperelliptischen Functionen erster Ordnung durchzuführen, ist der Zweck der vorliegenden kleinen Abhandlung. Die Analogie mit den elliptischen Functionen ist bis auf einen gleich zu berührenden Punkt eine vollständige, und die Resultate sind fast einfacher als erwartet wurde.

Bekanntlich müssen der Theorie dieser Functionen *zwei* unabhängige Variable zu Grunde gelegt werden, welche definirt sind als Summen von je zwei gleichartigen Integralen erster Gattung mit zwei verschiedenen oberen Grenzen, die aber in beiden Summen dieselben sind. Nach den Untersuchungen von Rosenhain kann die Aufgabe als gelöst betrachtet werden, rationale und symmetrische Functionen der beiden oberen Grenzen und der für dieselben geltenden Werthe der in den Integralen vorkommenden Quadratwurzel, als eindeutige Functionen dieser beiden unabhängigen Variabeln darzustellen, und zwar gelingt dies mit Hilfe der Functionen

$$\vartheta\left\{\begin{smallmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{smallmatrix}\right\}(u_1, u_2) =$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{u_1}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{u_2}\, e^{\Sigma_{\lambda k}\, a_{\lambda,k}\left(n_\lambda + \frac{g_\lambda}{2}\right)\left(n_k + \frac{g_k}{2}\right) + 2\sum_1^2\left(n_\lambda + \frac{g_\lambda}{2}\right)\left(u_\lambda + \frac{\pi i h_\lambda}{2}\right)}$$

deren Moduln $a_{k,\lambda}$ durch die vollständigeren Integrale erster Gattung ausgedrückt sind.

Alle algebraischen Integrale der hier betrachteten Classe können dargestellt werden durch zwei Integrale erster Gattung, zwei Integrale zweiter Gattung und ein von einem Parameter abhängiges Integral dritter Gattung, wozu noch algebraische und logarithmische Functionen kommen. Die Aufgabe, die also nach der Analogie mit den elliptischen Functionen noch zu lösen bleibt, ist die, Summen von zwei gleichartigen Integralen zweiter und dritter Gattung durch die beiden unabhängigen Veränderlichen darzustellen. Es zeigt sich jedoch, dass man bei den Integralen dritter Gattung zwei Parameter einführen muss, welche ebenso wie die Argumente durch Summen von Integralen erster Gattung definirt sind, so dass diese Functionen ausser von den Moduln von vier Veränderlichen abhängig sind. In umgekehrter Fassung stellt sich die Aufgabe dann so:

Es sollen die Functionen

$$\frac{\partial \log \vartheta\left\{\begin{smallmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{smallmatrix}\right\}(u_1, u_2)}{\partial u_1}; \qquad \frac{\partial \log \vartheta\left\{\begin{smallmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{smallmatrix}\right\}(u_1, u_2)}{\partial u_2}$$

$$\log \frac{\vartheta\left\{\begin{smallmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{smallmatrix}\right\}(u_1 - v_1, u_2 - v_2)}{\vartheta\left\{\begin{smallmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{smallmatrix}\right\}(u_1 + v_1, u_2 + v_2)}$$

in welchen für u_1, u_2, v_1, v_2 Integralsummen erster Gattung mit von einander unabhängigen oberen Grenzen gesetzt sind, durch Summen von Integralen zweiter und dritter Gattung ausgedrückt werden.

Der Zahlencomplex $\left\{\begin{smallmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{smallmatrix}\right\}$, (die Thetacharakteristik) **kann unbeschadet** der Allgemeinheit beliebig angenommen werden, da vermittelst der Formeln von Rosenhain alle diese Functionen aus einer derselben hergeleitet werden können. Die Einfachheit der Resultate wird durch eine passende Wahl dieses Zahlencomplexes wesentlich erhöht. Der Unterschied, der gegenüber den elliptischen Functionen hier zu Tage tritt, besteht darin, dass bei den Integralen zweiter Gattung noch eine algebraische, bei denen der dritten Gattung noch eine logarithmische Function der oberen Grenzen hinzutritt, die sich aber ebenfalls, wenn auch nicht sehr einfach nach den Rosenhain'schen Formeln durch ϑ-Functionen darstellen lässt.

Behufs der Lösung der Aufgabe müssen nun zunächst aus den Eigenschaften der Periodicität die Normalintegrale zweiter und dritter Gattung erklärt werden. Die Ausdrücke für dieselben vereinfachen sich ausserordentlich durch ein System von Relationen zwischen den vollständigen Integralen erster und zweiter Gattung, welches ganz analog ist der bekannten Legendre'schen Relation aus der Theorie der elliptischen Functionen $K'E + E'K - KK' = \frac{\pi}{2}$ und welches man leicht durch Integration über die Begrenzung eines Gebietes ableitet. Darnach bieten nun die Riemann'schen Principien einen einfachen und naturgemässen Weg, um zur Lösung des Problems zu gelangen.

Königsberg, den 2. Juli 1877. H. Weber.

A. Brill: Ueber Systeme von Curven und Flächen. (Mathematische Annalen Bd. 8.)

Gewisse Sätze, die in der Theorie der Charakteristiken eines einfach unendlichen Curven- bezw. Flächen-Systems eine Rolle spielen, werden mit Hilfe des bekannten Chasles'schen Correspondenzprincips abgeleitet. Dahin gehört der Ausdruck: $m\nu + n\mu$ für die Anzahl der Curven eines Systems mit den Charakteristiken μ, ν, welche eine gegebene Curve von der m Ordnung und n. Klasse berühren; ferner die Zahl $m\nu + n\mu + r\varrho$ der Flächen eines Systems (μ, ν, ϱ), die eine gegebene Fläche (m, n, r) berühren und die Zahl der Raumcurven aus einer einfach unendlichen Schaar, die der

gleichen Bedingung genügen — Zahlen, welche sich durch jenes Princip und einen leicht aus demselben herzuleitenden Satz über Entsprechen von Punkten in einer Ebene bestimmen lassen, ohne dass man genöthigt ist, beschränkende Voraussetzungen bezüglich der berührten Curve oder Fläche zu machen.

A. Brill: Ueber die Discriminante. (Mathematische Annalen Bd. 12.)

Dieser Aufsatz, der die Einleitung zu dem nachfolgend besprochenen bildet, enthält einige elementare, wie es scheint bisher nicht ausgesprochene Sätze über das Verhalten der Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit veränderlichen Coefficienten in der Nähe solcher Werthe der Letzteren, für welche die Discriminante verschwindet.

A. Brill: Ueber rationale Curven vierter Ordnung. (Mathematische Annalen Bd. 12.)

Die Coordinaten einer Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten lassen sich bekanntlich als rationale Functionen eines Parameters darstellen. Man kann das Studium der projectivischen Eigenschaften einer solchen Curve unter Verlegung der drei Doppelpunkte in die Eckpunkte des Coordinatendreiecks an die Betrachtung des simultanen Formensystems von drei binären Formen zweiten Grades: f_1, f_2, f_3 anknüpfen. So lässt sich die Gleichung für die Parameter der sechs Wendepunkte auf die Form bringen:

$$R f_1 f_2 f_3 + 4 \vartheta_{12} \vartheta_{23} \vartheta_{31} = 0,$$

wenn R die in den Coefficienten der drei Formen lineare Invariante und die ϑ Functionaldeterminanten von je zwei derselben darstellen. Diese Gleichung sechsten Grades hat im Allgemeinen keine Affecteigenschaften, wie sie z. B. die Gleichung achten Grades für die Berührungspunkte der Doppeltangenten besitzt. Indess stehn beide Gleichungen in einem gewissen Zusammenhang. Ihre Discriminanten zerfallen nämlich in Factoren, die theilweise für Beide dieselben sind. So erscheinen die Realitätsverhältnisse der Wendepunkte und Doppeltangenten von einander nicht unabhängig, ein Umstand, dem

unter Bezugnahme auf die Sätze des vorstehend besprochenen Aufsatzes eine eingehendere Discussion gewidmet wird. Man findet zum Schluss noch eine Zusammenstellung der wesentlich verschiedenen gestaltlichen Typen der Curven vierter Ordnung, wobei auch die Grenzfälle Berücksichtigung finden. Schematische Figuren veranschaulichen diese Aufzählung.

München. A. Brill.

S. Gundelfinger: Ueber das Schliessungsproblem bei zwei Kegelschnitten. (Borchardts Journ. Bd. 83. S. 171 ff.)

Bedeuten $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ und $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$ die Gleichungen der beiden Kegelschnitte in trimetrischen Coordinaten, so hängt das fragliche Problem wesentlich ab von dem Integrale des Differentiales:

$$dJ = \frac{\Sigma \pm \alpha_1 x_2 dx_3}{\frac{1}{2}\{\alpha_1 f'(x_1) + \alpha_2 f'(x_2) + \alpha_3 f'(x_3)\} \sqrt{\varphi(x_1, x_2, x_3)}}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Der Verfasser hat, nach Darlegung dieser Abhängigkeit, zwei Substitutionen angegeben, deren jede in einfacher Weise das Integral $\int dJ$ in die Grundform der elliptischen Transcendenten $\int \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$ *) überführt.

Die erste Substitution nimmt als Ausgangspunkt die Gleichung zwischen den ternären quadratischen Formen f, φ und ihren beiden fundamentalen Covarianten ψ, Ω, die aus der Zwischenform

$$N = \frac{1}{4} \sum \left(\pm \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} u_3 \right)$$

durch die Operationen abgeleitet sind:

$$\psi = \frac{3}{2} \sum \sum \frac{\partial^2 N}{\partial x_\alpha \partial u_\beta} \frac{\partial^2 N}{\partial x_\beta \partial u_\alpha}; \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial N}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{8} \sum \left(\pm \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right).$$

Diese Gleichung kann unter Einführung der Bezeichnungen:

---

*) Ueber dieses Integral und die anderweitige hierher gehörige Literatur vgl. man eine Abhandlung des Herrn Simon in Borchardt's Journal Bd. 81, S. 301 ff.

$$\tfrac{1}{6}\sum \pm \left[\frac{\partial^2(\varkappa f+\lambda\varphi)}{\partial x_1^2}\,\frac{\partial^2(\varkappa f+\lambda\varphi)}{\partial x_2^2}\,\frac{\partial^2(\varkappa f+\lambda\varphi)}{\partial x_3^2}\right] = G(\varkappa,\lambda)$$

$$\tfrac{1}{36}\left(\frac{\partial^2 G(\varkappa\lambda)}{\partial\varkappa^2}\,\frac{\partial^2 G(\varkappa\lambda)}{\partial\lambda^2} - \frac{\partial^2 G(\varkappa\lambda)}{\partial\varkappa\,\partial\lambda}\,\frac{\partial^2 G(\varkappa\lambda)}{\partial\varkappa\,\partial\lambda}\right) = H(\varkappa,\lambda)$$

$$\tfrac{1}{3}\left(\frac{\partial G(\varkappa\lambda)}{\partial\varkappa}\,\frac{\partial H(\varkappa\lambda)}{\partial\lambda} - \frac{\partial G(\varkappa\lambda)}{\partial\lambda}\,\frac{\partial H(\varkappa\lambda)}{\partial\varkappa}\right) = Q(\varkappa,\lambda)$$

in der übersichtlichen Gestalt geschrieben werden:

$$\Omega^2 = \psi^3 + 3\psi H(\varphi, -f) + Q(\varphi, -f).$$

Nach einer Methode, die in analoger Weise bereits Herr Brioschi bei Curven dritten Grades angewandt (Comptes Rendus, 1863 erste Hälfte, p. 305), folgt daraus sofort:

$$dJ = \frac{ds}{\sqrt{4s^3 + 12\,H(1,0)s + 4\,Q(1,0)}},\quad s = \frac{\psi}{\varphi}.$$

Die zweite Substitution ist einer bekannten Aronhold'schen Transformation (Monatsberichte der Berliner Akademie 1861) nachgebildet und durch die Gleichung definirt:

$$\mu = -\frac{\varphi'(a_1)x_1 + \varphi'(a_2)x_2 + \varphi'(a_3)x_3}{f'(a_1)x_1 + f'(a_2)x_2 + f'(a_3)x_3},$$

wobei unter a_1, a_2, a_3 die Coordinaten irgend eines der Schnittpunkte von $f = 0$ mit $\varphi = 0$ verstanden sind. Vermöge derselben wird:

$$dJ = \frac{d\mu}{\sqrt{G(\mu, 1)}}.$$

Tübingen. S. Gundelfinger.

A. Mayer: Geschichte des Princips der kleinsten Action. (Antrittsvorlesung. Leipzig, Veit u. Co. 1877.)

Der vorliegende, zuerst nur zum Vortrag bestimmte Aufsatz versucht es, eine quellengemässe Darstellung der Entstehung und Entwickelung des Princips der kleinsten Action zu geben und namentlich die äusseren und inneren Momente aufzudecken, welche die Veranlassung waren, dass dieser, ursprünglich vollkommen strenge Satz schon bald nach seiner Entdeckung zu dem unbestimmtesten und am meisten missverstandenen Principe der Mechanik wurde, und der Vortrag ist dann ohne wesentliche Zusätze veröffentlicht worden — obgleich der Verfasser recht wohl fühlte,

dass es eigentlich nöthig wäre, mehrere Punkte noch weiter auszuführen und im Besonderen auf die Streitschriften von **Euler** und **König** näher einzugehen —, weil durch solche Erweiterungen der Aufsatz seinen ursprünglichen Charakter ganz verloren haben würde.

A. Mayer: Ueber den Multiplicator eines Jacobi'schen Systems.

Mathem. Annal. XII. p. 132—142.

Jacobi hat zwei verschiedene Definitionen für den Multiplicator einer einzelnen linearen partiellen Differentialgleichung:

$$A(f) = \sum_{i=1}^{i=n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

gegeben. Die erste Definition, die er seiner Theoria novi multiplicatoris zu Grunde legte, setzt die Kenntniss aller Lösungen der gegebenen Gleichung voraus; die zweite definirt den Multiplicator M direkt durch die Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=n} X_i \frac{\partial \log M}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0.$$

Die Untersuchungen von Lie (Math. Ann. XI. p. 501 u. flg.) haben nun gelehrt, dass man die erste Definition des Jacobi'schen Multiplicators ausdehnen kann auf jedes vollständige System:

$$1) \qquad A_\iota(f) = \sum_{i=1}^{i=n} X_i^\iota \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad \iota = 1, 2, \ldots r.$$

Dagegen besitzen, auch wenn 1) ein vollständiges System ist, doch im Allgemeinen die r Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} X_i^\iota \frac{\partial \log M}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial X_i^\iota}{\partial x_i} = 0$$

keine gemeinsame Lösung, oder es giebt im Allgemeinen keinen Jacobi'schen Multiplicator, der allen Gleichungen eines vollständigen Systems gemeinsam wäre. Bilden aber die Gleichungen 1) ein Jacobi'sches System, d. h. ist jedes:

$$A_\iota(A_\kappa(f)) - A_\kappa(A_\iota(f))$$

identisch Null, so existirt ein solcher gemeinsamer Multiplicator. Es fragte sich nun, ob dieser gemeinsame Multiplicator identisch ist mit dem Lie'schen Multiplicator des ganzen Systems. Diese Identität nachzuweisen, war der Hauptzweck der obigen Note, die ausserdem noch angiebt, wie sich das Princip des letzten Multiplicators für ein Jacobi'sches Systems gestaltet.

A. Mayer: Ueber den allgemeinsten Ausdruck der inneren Potentialkräfte eines Systems bewegter materieller Punkte. (Berichte der K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 1877, p. 86—100.)

Diese Note beschäftigt sich mit der Aufgabe, den allgemeinsten analytischen Ausdruck der inneren Kräfte eines in Bewegung befindlichen Systems materieller Punkte zu finden, welcher die beiden Forderungen erfüllt, dass diese Kräfte dem Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung genügen und zugleich ein Potential besitzen sollen, und sie gelangt zu dem Resultate, dass man diesen allgemeinsten Ausdruck erhält, wenn man das Potential einer willkürlichen Function der Zeit, der gegenseitigen Entfernungen der Punkte des Systems und der ersten Differentialquotienten dieser Entfernungen nach der Zeit gleich setzt.

Leipzig. A. Mayer.

Ax. Harnack: Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven. (Math. Annal. Bd. X. p. 189—198.)

Die Frage, wie viele weder im Endlichen noch im Unendlichen zusammenhängende reelle Züge eine ebene Curve $n$ter Ordnung höchstens besitzen kann, lässt sich vermöge des Bezout'schen Theoremes auf ganz elementarem Wege beantworten; man braucht für die Untersuchung nur noch die Eigenschaften zu benutzen, durch welche paare und unpaare algebraische Curvenzüge von einander unterschieden sind. Zählt man dann die reellen Schnittpunkte der gegebenen Curve mit einer zweckentsprechend gelegten „adjungirten“ Curve n—2ter Ordnung ab, so ergiebt sich, da jedenfalls

nicht mehr als $n(n-2)$ Schnittpunkte vorhanden sein können, der allgemein giltige Satz: *Eine ebene Curve vom Geschlecht p enthält nie mehr als p + 1 getrennt verlaufende Züge.*

Aber auch die Existenz von Curven mit dieser Maximalanzahl ist leicht nachzuweisen, wenn man von dem Princip der continuirlichen Deformation, angewandt auf die Auflösung singulärer Punkte, Gebrauch macht, und nun von einer Curve $n$ter Ordnung mit Zuhilfenahme einer Geraden zu einer Curve $n + 1$ter Ordnung aufsteigt. *Auf diese Weise lassen sich zu jeder Geschlechtszahl p Curven mit p + 1 getrennten Zügen construiren.*

Den Existenzbeweis solcher Curven hat auch Herr Schottky in seiner Abhandlung: „Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen" (Dissert. Berlin 1875) erbracht, indem er zeigt, dass die charakteristischen Gleichungen einer $p + 1$-fach zusammenhängenden Fläche algebraische Curven vom Geschlecht p mit $p + 1$ getrennten Zügen sind.

Ax. Harnack: Ueber die Darstellung der Raumcurve vierter Ordnung erster Species und ihres Secantensystemes durch doppelt periodische Functionen. Mathem. Annalen Bd. XII. p. 47—86.

Der vorliegende Aufsatz steht zu meinen früheren Untersuchungen über die Verwerthbarkeit der Theorie doppelt periodischer Functionen für die Geometrie der Curven vom Geschlechte $p = 1$ in naher Beziehung. Wie in der Ebene die allgemeine Curve dritter Ordnung, so bildet im Raume der Durchschnitt eines Flächenbüschels zweiter Ordnung das einfachste algebraische Gebilde, auf welchem sich die Werthe eines elliptischen Integrales eindeutig abbilden lassen. Man kann fast sagen, dass diese Abbildung hier noch übersichtlicher wird, weil das Secantensystem im Raume eine bessere Gliederung gestattet, als die Gesammtheit der Geraden in der Ebene, oder anders ausgedrückt, dass selbst solche Relationen zwischen den Integralwerthen, welche in der Ebene auf selbstverständliche Sätze führen, im Raume bereits nicht unwichtige geometrische Eigenschaften erkennen lassen. Demgemäss stellte ich mir in dieser Arbeit auch die Aufgabe, die Geometrie der Raumcurve und

ihres Secantensystemes möglichst vollständig aus der Parameterdarstellung zu entwickeln, wobei neben den allbekannten auch einige neue Sätze zu Tage traten.

Nach Aronhold und Clebsch wird das auf das Flächenbüschel: $\varkappa a_x^2 + \lambda \alpha_x^2 = 0$ bezügliche Differential in homogener Form durch die Gleichung definirt:

$$D = \frac{u_x v_{dx} - v_x u_{dx}}{a_x \alpha_x (a \alpha u v)} \left(a_x^2 = 0 \quad \alpha_x^2 = 0 \quad a_x a_{dx} = 0 \quad \alpha_x \alpha_{dx} = 0\right)$$

wenn $u_x = 0$ und $v_x = 0$ zwei beliebige Formen bedeuten; der Werth von D ist aber von den Coordinaten u_i und v_i gänzlich unabhängig. Wird der Parameter des Ebenenbüschels, dessen Träger eine Secante oder specieller eine Tangente der Raumcurve ist, eingeführt, so lässt sich das Differential ohne weiteres als Function einer einzigen unabhängigen Veränderlichen darstellen. Daraus folgt dann, dass die absolute Invariante des Flächenbüschels auch die des Differentiales ist. Allgemeiner aber als diese Darstellung, welcher ein Ebenenbüschel von besonderer Lage zu Grunde liegt, ist die Forderung, aus der obigen Gleichung die Werthe von D zu ermitteln, die sich bei unendlich kleiner Drehung einer Ebene um irgend eine in ihr gelegene Gerade ergeben. Die Durchführung dieser Aufgabe gelingt im vorliegenden Falle, weil das vollständige Formensystem eines Kegelschnittbüschels bekannt ist, am einfachsten mit Hilfe einer Symbolik, in welcher irreducible Formen als Producte *verschiedener* linearer Factoren aufgefasst werden. Diese Symbolik ist überhaupt jedesmal von Vortheil, sobald vermöge einer vorausgehenden Kenntniss der in Betracht kommenden Formen nur der Weg aus der gewöhnlichen symbolischen Darstellung in diese andere, nicht aber der umgekehrte zu machen ist.

Das Resultat dieser Rechnung ist eine biquadratische Gleichung, deren zweiter Term gemäss des Abel'schen Theoremes fehlt. Die übrigen Coefficienten sind einfache Covarianten des Flächenbüschels; sie enthalten die Coordinaten u_i der schneidenden, und ausserdem, mit Ausnahme des ersten, zu Unterdeterminanten mit u verbunden die Coordinaten du_i der benachbarten Ebene. Die geometrische Interpretation des Verschwindens ist für jeden einzelnen Coefficienten leicht anzugeben. Mit dieser Gleichung ist die analytische Grundlage der nun folgenden Betrachtungen gewonnen.

Für diese weiteren Untersuchungen über die längs der Curve vertheilten Integralwerthe sind *vier* Arten zu unterscheiden. Der

Anfangswerth des Integrales wird jedesmal in einen der 16 Punkte verlegt, in welchem eine Ebene 4punktig einschneidet, ist demnach nicht vollständig bestimmt. Mit Berücksichtigung dieser noch vorhandenen Willkürlichkeit gelangt man zu folgenden Ergebnissen:

α) *Die zweitheilige Curve mit zwei paaren Zügen* lässt eine reelle ($p = \omega$) und eine rein imaginäre Periode ($p' = \omega'$) zu. Längs des einen Zuges sind alle Werthe von 0 bis p, längs des anderen die nämlichen Werthe vermehrt um $\frac{p'}{2}$ vertheilt. Conjugirt imaginäre Punkte erhalten auch conjugirt imaginäre Argumente.

β) *Die zweitheilige Curve mit zwei unpaaren Zügen* hat gleichfalls eine reelle ($p = \omega$) und eine rein imaginäre Periode ($p' = \omega'$). Beide Curvenzüge besitzen indessen complexe Parameterwerthe mit constanten imaginären Bestandtheilen. Diese letzteren können so normirt werden, dass auf dem einen Zuge $\frac{1}{4}p'$, auf dem anderen $\frac{3}{4}p'$ zu allen möglichen reellen Werthen hinzutritt. Conjugirt imaginäre Punkte sind von der Form $\alpha + \frac{1}{4}p' + \beta i$ und $\alpha + \frac{1}{4}p' - \beta i$.

γ) *Die eintheilige Curve mit einem paaren Zuge* lässt eine reelle Periode ($p = \omega$) und eine complexe von der Form $\left(p' = \frac{\omega + \omega'}{2}\right)$ zu. Die Punkte des reellen Zuges erhalten reelle, conjugirt imaginäre Punkte auch conjugirt imaginäre Argumente.

δ) *Die völlig imaginäre Curve, welche den Schnitt eines reellen Flächenbüschels bildet*, hat wiederum eine reelle und eine rein imaginäre Periode. Conjugirt imaginäre Punkte sind hierbei von der Form $\alpha - \beta i$ und $\alpha + \frac{p}{2} - \beta i$.*

Nach diesen Festsetzungen ist es ein für allemal möglich, reelle und imaginäre Eigenschaften zu unterscheiden. Insbesondere ergeben sich alle Sätze über die Realität des Polartetraeders hinsichtlich seiner Flächen und Ecken, sowie über die Lage der 116 Ebenen, welche durch je vier der 16 Fundamentalpunkte gelegt werden können.

Eine bemerkenswerthe Construction der Raumcurve kann aus dieser Parameterdarstellung entnommen werden. Wählt man nämlich

* Auf die Curven, bei welchen auch das gesammte Flächenbüschel imaginär ist, bin ich bei den geometrischen Untersuchungen nicht besonders eingegangen.

zwei Punktetripel von der Form: u, $u+\frac{p}{3}$, $u+\frac{2p}{3}$ und v, $v+\frac{p}{3}$, $v+\frac{2p}{3}$ aus, und legt durch je drei passend gewählte Punkte eine Ebene, so wird deren Durchschnitt einen neuen Punkt der Raumcurve bestimmen; z. B. die Ebene durch:

$$u \quad v \quad v+\frac{p}{3}; \quad u+\frac{p}{3} \quad v+\frac{p}{3} \quad v+\frac{2p}{3}; \quad u+\frac{2p}{3} \quad v+\frac{2p}{3} \quad v$$

schneiden sich im Punkte $-u-2v+\frac{2p}{3}$. Ebenso können die beiden anderen Punkte gefunden werden, welche mit diesem ein Tripel bilden; sonach lässt sich diese Construction im Allgemeinen unbegrenzt fortsetzen und liefert jedesmal als Schnitt dreier Ebenen, welche durch je drei Punkte gelegt sind, einen neuen Curvenpunkt. Aus der Gesammtheit aller Secanten der Curve werden Linienflächen construirt, sobald man je zwei Argumente nach irgend welchem Gesetze einander zuordnet und die entsprechenden Punkte durch eine Gerade verbindet. Die einfachste Zuordnung ist durch die Relation u und $\pm u + C$ gegeben, wobei C eine beliebige Constante innerhalb des Periodenparallelogrammes bedeutet.

Das Gesetz u und $-u+C$ liefert die eine Schaar von Erzeugenden einer der Flächen zweiter Ordnung, während der negative Werth der Constante, also die Beziehung u und $-u-C$, die andere Schaar der nämlichen Fläche charakterisirt. Den speciellen Werthen $C=0$, $\frac{p}{2}$, $\frac{p'}{2}$, $\frac{p+p'}{2}$ entsprechen die vier Kegel des Büschels. Werden die zugeordneten Punkte identisch, so ist die Erzeugende zugleich eine Tangente der Raumcurve. Wie die Gleichungen lehren, giebt es in jeder Schaar vier Tangenten $(2u \equiv \pm C)$. *Die beiden, von den Berührungspunkten gebildeten Tetraeder liegen zu einander und zu dem Polartetraeder des Flächenbüschels auf vier Arten perspectiv.* Ferner lassen sich zu jeder Fläche $(\pm C)$ drei andere $\left(\pm C+\frac{p}{2}, \pm C+\frac{p'}{2}, \pm C+\frac{p+p'}{2}\right)$ nachweisen, welche die Eigenschaft haben, dass sich je zwei Erzeugende aus einer Schaar der einen Fläche mit je zwei Erzeugenden aus einer Schaar der anderen Fläche schneiden, und insbesondere sind drei Flächenpaare vorhanden, bei welchen beide Arten von Erzeugenden sich gegenseitig treffen.

Von Wichtigkeit aber ist der unschwer zu beweisende Satz: *Alle Secanten, für welche die Differenz zwischen den Parametern der beiden Curvenpunkte denselben Werth hat, schneiden das Polartetraeder*

nach gleichem Doppelverhältniss. Derselbe zeigt, dass in jeder Schaar von Erzeugenden im Flächenbüschel zweiter Ordnung je vier Linien vorhanden sind, welche das Polartetraeder nach gleichem Doppelverhältniss treffen und giebt ferner völligen Aufschluss über die Linienflächen, welche durch die Zuordnung u und $+u \pm C$ entstehen. Dieselben bilden jedesmal den Durchschnitt eines tetraedralen Liniencomplexes mit dem Secantensysteme der Raumcurve und sind also die von de la Gournerie ausführlich behandelten „Quadricuspidalflächen" achter Ordnung und Classe. Alle projectiven Eigenschaften, die Lage der vier ebenen Doppelcurven in den Tetraederflächen u. s. w. sind aus dieser Parameterdarstellung ohne Schwierigkeit abzuleiten. Ich führe hier nur noch den Satz an, dass sämmtliche Secanten der Raumcurve von einer solchen Fläche ausser in den Curvenpunkten in je vier Punkten mit gleichem Doppelverhältniss geschnitten werden. Die speciellen Werthe $C = 0, \frac{p}{2}, \frac{p'}{2}, \frac{p+p'}{2}$ ergeben hier die Developpabele und ausserdem drei Linienflächen vierter Ordnung, welche als Durchschnitte des Secantensystemes mit der durch je zwei Gegenkanten des Polartetraeders bestimmten Liniencongruenz aufgefasst werden können.

Mit diesen beiden Arten von Zuordnungen sind zugleich alle eindeutigen Transformationen der Raumcurve in sich selbst erschöpft; unter ihnen befinden sich 32 *lineare*. Bei jeder dieser eindeutigen Transformationen bleibt jede Quadricuspidalfläche erhalten, während in dem Büschel der Flächen zweiter Ordnung jedesmal nur *vier* Flächen in sich selbst übergeführt werden.

Die oben besprochene Fundamentalgleichung vierten Grades liefert uns (in ihrer Discriminante) die Differentialgleichung des Flächensystemes achter Ordnung, sowie die Differentialgleichungen für alle Linienflächen, welche durch eine mehrdeutige lineare Beziehung zwischen den Argumenten erhalten werden. Auf eine nähere Untersuchung derselben bin ich indessen bisher nicht eingegangen.

Darmstadt. Ax. Harnack.

W. Mantel: Traité de trigonométrie analytique. (Chez P. Brander, à Arnhem.)

Sous ce titre j'ai publié un ouvrage, dont je vais brièvement exposer le contenu.

Dans Chap. I j'ai réuni quelques remarques sur le passage à la limite qu'on emploie pour déduire des séries infinies. Bien des auteurs commettent des erreurs dans cette matière. J'ai montré que même Duhamel se contentait d'avoir regard à la convergence des séries, et je démontre l'insuffisance de cette méthode.

Dans Chap. II, en partant des formuls

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

je déduis d'une manière complètement naturelle, les formules pour les multiples d'un arc.

Les formules trouvées se présentant sous la forme de polynomes ou de fractions rationnelles on est naturellement conduit à les décomposer en facteurs ou en fractions simples. Ceci occupe les Chap. III et IV.

Les trois chapitres suivants sont voués à la déduction des séries infinies et des produits infinis pour $\sin x$ etc. Les démonstrations que j'ai données des séries pour $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{cotg}\, x$, $\mathrm{séc}\, x$ et $\mathrm{cosée}\, n$ sont uniformes à la démonstrations des produits infinis, et très naturelles; tandis que M. Schlömilch p. e. déduit ces séries des produits mentionnés par une différentiation déguisée.

Enfin, dans Chap. VIII et IX je montre l'emploi des imaginaires, et je fais la déduction des séries pour les fonctions circulaires inverses. Comme $(\mathrm{arc}\sin x)^n$ et $(\mathrm{arc}\,\mathrm{tg}\, x)^n$, n entier positif, se développent de la même manière que $\mathrm{arc}\sin x$ et $\mathrm{arc}\,\mathrm{tg}\, x$, j'ai jugé bon d'ajouter ces séries. Quoiqu'elles manquent d'importance, leur déduction est instructive.

Cherchant toujours à faire de la théorie exposée un ensemble achevé, j'espère que mon ouvrage soit reconnu utile à ceux qui veulent s'initier à l'étude de l'analyse supérieure.

Delft, Mai 1877. W. Mantel.

C. M. Guldberg et H. Mohn. Études sur les mouvements de l'atmosphère. I. Partie. (Programme der Universität. Christiania 1876.)

Die Verfasser haben in dieser Abhandlung die Anfangsgründe der Mechanik der Atmosphäre entwickelt. Die Abhandlung ist in drei Capitel getheilt. In dem ersten Capitel wird das Gleichgewicht der Atmosphäre behandelt, und namentlich werden die Aenderungen untersucht, die eine Luftmasse erleidet, mit Rücksicht auf Druck, Temperatur und Dampfgehalt, wenn sie ausgedehnt oder zusammengedrückt wird, ohne dass Wärme mitgetheilt noch entzogen wird. Die Gesetze, die hieraus hergeleitet werden, dienen dazu, um zu bestimmen, ob das Gleichgewicht der Atmosphäre stetig oder unstetig ist, und hierdurch wird die Bildung von vertikalen auf- oder herabsteigenden Strömen bedungen.

Die Verfasser zeigen, dass es nothwendig ist, den Zustand der Atmosphäre zu kennen, nicht allein auf der Erdoberfläche sondern auch in der Höhe, und daher muss die Errichtung von meteorologischen Stationen in der Höhe, entweder auf Berggipfeln oder durch Ballons, als einer der wichtigsten Schritte angesehen werden, um der Meteorologie einen sichern Fortschritt zu geben.

Die vertikalen Ströme rufen die Winde hervor, die in dem zweiten Capitel studirt werden. Die Verfasser behandeln horizontale Luftströme mit geradlinigen Isobaren und mit kreisförmigen Isobaren: zu den letzten gehören die Cyclonen und Anticyclonen. Nachdem der Gradient definirt worden ist als die Druckänderung senkrecht auf der Isobare in Millimetern pr. Meridiangrad gemessen, wird die Gradientkraft eingeführt, die die bewegende Kraft des Windes ist. Ausser dieser Kraft wird die Reibung längs der Erdoberfläche und die ablenkende Kraft der Erdrotation eingeführt.

Bei Winden mit geraden Isobaren auf höheren Breiten wird das Gesetz gefunden, dass die Bahn des Windes eine gerade Linie ist, und dass die Tangente des Ablenkungswinkels des Windes vom Gradient, für denselben Breitengrad, dem Reibungscoefficient umgekehrt proportional ist. Bei Winden in der Nähe des Aequators werden die Bahnen krummlinig und die von den Verfassern gegebenen Formeln zeigen eine merkliche Uebereinstimmung mit den Beobachtungen aus den atlantischen Passatwinden und den Monsumen im indischen Ocean.

In den Cyclonen und Anticyclonen bewegt sich der Wind in

logarithmischen Spiralen. Die Geschwindigkeit des Windes ist Null im Centrum und wächst nach aussen bis sie ein Maximum erreicht, wonach sie abnimmt im umgekehrten Verhältnisse zum Abstand vom Centrum. Die Verfasser zeigen, dass man den Druck, die Geschwindigkeit des Windes, die Isobaren und Gradienten in einer Cyclone oder Anticyclone berechnen kann, wenn man nur die Maximalgeschwindigkeit des Windes und deren Abstand vom Centrum kennt.

In dem dritten Capitel werden die vertikalen Luftströme behandelt. Ein verticaler Strom kann nimmer mehr als eine bestimmte Höhe erreichen. Daher besteht ein Windsystem aus einem horizontalen Strome längs der Erdoberfläche, einem horizontalen Strome in der Höhe und einem verticalen, aufsteigenden oder herabsteigenden Strome, der die beiden ersten verbindet. Die Eigenschaften der Atmosphäre bestimmt die Höhe des vertikalen Stromes und hierdurch wird die Horizontaldepression gefunden, die erzeugt werden kann und die wieder die Stärke und die Beugung des Windes erzeugt.

Die Verfasser haben in diesem ersten Theil ihrer Studien die einzelnen Fälle behandelt, indem alle Bewegungen als permanent vorausgesetzt worden sind. Es ist ihre Absicht in dem folgenden Theile die Windsysteme in ihrer Allgemeinheit zu behandeln.

In der Zeitschrift der Oesterreichischen Gesellschaft für Meteorologie haben die Verfasser, im Jahrgange 1877, eine Reihe Abhandlungen zu publiciren angefangen, die ein Auszug ihrer oben citirten Abhandlung sind, und in welchen es versucht worden ist die Probleme durch eine mehr elementare Methode zu behandeln und durch Beispiele zu erläutern, welche wo möglich aus der Natur direct genommen werden.

Christiania. Guldberg und Mohn.

R. Wolf: Taschenbuch für Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. 5. Auflage. Zürich 1877 (XVIII und 434 S.) in 8 min.

— — **Astronomische Mittheilungen.** Nr. 41—43. (Vierteljahrsschrift der Naturf. Gesellschaft in Zürich 1876—1877.)

Ueber das *Taschenbuch* ist nicht viel zu sagen nothwendig, da es seit Jahren allgemein bekannt ist, und sich die jetzige neue

Auflage abgesehen von der vierten im grossen Ganzen weder nach Anlage noch nach Inhalt wesentlich unterscheidet, um den so bequemen Parallelismus mit dem *Handbuche* nicht zu stören. Es mag die Bemerkung genügen, dass der Verfasser keine Mühe gescheut hat, innerhalb des gegebenen Rahmens und des für ein Taschenbuch bereits auf das erlaubte Maass gestiegenen Volumens, Text und Tafeln zu revidiren, das Alte da und dort noch conciser zu fassen, und das Neue wenigstens einigermassen nachzutragen, — überhaupt der sich gestellten Aufgabe, jeweilen ein dem Stande der Wissenschaft entsprechendes, und doch möglichst Vielen mundgerechtes und bequemes, also im guten Sinne gemeines und schlechtes Hülfsbuch zu liefern, immer mehr gerecht zu werden.

Was die seit dem letzten Referate erschienenen drei neuen Nummern der *Astronomischen Mittheilungen* anbelangt, so gibt die *erste* eine einlässliche Studie über den Einfluss der Ocular- und Spiegel-Stellung auf Beobachtung der Durchgangszeiten und Bestimmung der Personalgleichung, deren Hauptergebniss in dem Satze enthalten ist, dass das Auge jeweilen den Fadendurchgang gegen denjenigen Punkt hin zu versetzen scheint, welcher einerseits in der von dem Faden nach dem jeweiligen Spiegelbilde der Flamme führenden Geraden liegt, und andererseits dem durch die Loupe in deutlicher Sehweite erscheint. — *Die zweite Nummer* berichtet im Eingange über den Fleckenstand der Sonne im Jahre 1876, und die daraus folgende Grösse der magnetischen Declinationsvariation, — gibt sodann für die 128 Jahre 1749 bis 1876 die monatlichen Relativzahlen, d. h. eine fundamentale Zahlenreihe für alle Untersuchungen über den Gang des Sonnenfleckenphänomenes und seine Beziehungen zu andern Naturerscheinungen, deren äusserst mühevolle Erstellung, ohne unbescheiden zu sein, als eine wissenschaftliche That von grosser Tragweite bezeichnet werden darf, — theilt die zum Theil auf diese Reihe gestützte, schon im vorhergehenden Referate erwähnte neue Epochentafel, und die ebenfalls aus ihr folgende mittlere Curve mit, — vergleicht die mittlern und wahren Epochen, — und weist schliesslich auf die Wahrscheinlichkeit einer grossen, aber erst in ferner Zeit mit voller Sicherheit zu ermittelnden grossen Sonnenfleckenperiode von etwa 178 Jahren hin. — *Die dritte Nummer* endlich ist speciell den magnetischen Declinationsvariationen und ihrer Beziehung zu der Häufigkeit der Sonnenflecken gewidmet: Sie gibt vorerst für die dreissig Jahre 1842 bis 1871 die aus den Beobachtungen in Mailand, München, Prag, Berlin und

Christiania abgeleiteten Monat- und Jahresmittel, — leitet aus letztern für jede Station und jede zehn Jahre die Formel $v = a + b . r$ ab, um aus den Sonnenfleckenrelativzahlen r die Variationen v berechnen zu können, — zeigt durch Vergleichung der für a und b erhaltenen Werthe, dass auch die besten und längsten der bisherigen Variationsreihen noch nicht hinreichen, um definitiv zu entscheiden, ob die a und b einer seculären Veränderung unterliegen oder nicht, — und stellt die bis jetzt aus neuern Beobachtungen für 26 Stationen erhaltenen Variationsformeln in einer Tafel zusammen, aus welcher hervorgeht, dass die a nach Osten sehr entschieden und auch nach Süden wenigstens im grossen Ganzen *abnehmen*, die b ein ähnliches aber weniger decidirtes Verhalten zeigen. Unter Zuzug der bis jetzt in den südlichen Stationen Trevandrum, Batavia und Hobarton erhaltenen monatlichen Variationsmitteln werden sodann Studien über die Jahresoscillationen und den jährlichen Gang angestellt, wobei sich überraschende neue Beziehungen zu den Sonnenflecken zeigen und auch das interessante Resultat erhalten wird, dass die schon oft besprochenen Anomalien, welche sich an nördlichen Stationen zur Zeit der Equinoctien zeigen, an den südlichen Stationen nicht vorkommen, und somit mehr localer als cosmischer Natur zu sein scheinen. Zum Schlusse wird noch nachgewiesen, dass die für die mittlern Jahresvariationen aufgestellten Formeln $v = a + b . r$ auch zur annähernden Berechnung der mittlern monatlichen Variationen gebraucht werden können, wenn man a um etwa 8,754 . sin D (wo D die der Monatmitte entsprechende Sonnendeclination bezeichnet) vermehrt, und statt der mittlern jährlichen Relativzahl r die dem betreffenden Monate zukommende mittlere Relativzahl einsetzt. — Von einigen andern kleinern Mittheilungen, welche diesen drei Nummern beigegeben sind, für gegenwärtige Berichterstattung Umgang nehmend, mag anhangsweise noch angegeben werden, dass das Verzeichniss der Sammlungen der Zürcher Sternwarte in denselben von Nr. 185—189, und dasjenige der Belegestücke für die Sonnenflecken-Statistik oder der Literatur von Nr. 344—362 fortgesetzt wird.

Zürich. Rudolf Wolf.

Oscar Röthig: Eine Einleitung in die mechanische Wärmetheorie.
——— **Durchgang der Strahlen durch eine Linse.** (Publicirt als Abhandlungen zu dem Programme der Friedrichs-Werderschen Gewerbeschule zu Berlin, Ostern 1877.)

Die erste Arbeit zeigt, dass alle, gewöhnlich mit Hülfe der mechanischen Wärmetheorie hergeleitete, auf Gase bezügliche, Resultate ohne jede Hypothese über die Wärme aus der Thatsache folgen, dass die beiden specifischen Wärmen ungleich sind. So folgt zunächst der Satz, dass die zur Ueberführung eines Gases aus einem Zustande in einen anderen nöthige Wärmemenge von der Art dieser Ueberführung abhängig ist. Dann werden mit ganz elementaren Hülfsmitteln der Mathematik aber durch Gleichsetzung an sich verschiedener Wärmemengen die beiden Formeln für das Verhältniss der specifischen Wärmen hergeleitet, welche Poisson und Laplace gegeben haben. Der Rest der Abhandlung beschäftigt sich mit der Begründung der im Eingange aufgestellten Behauptung und muss in Bezug darauf auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

Die zweite Arbeit ist ein Vorschlag, an Stelle der gewöhnlichen näherungsweisen Behandlungen des Problems eine andere zu setzen, welche zunächst die zu machenden Vernachlässigungen so weit als möglich begründet, dann aber mit denselben eine vollständige Behandlung der Aufgabe folgen lässt.

Auf Verlangen bin ich gern bereit, Abzüge der vorstehenden Arbeiten, so weit die vorhandenen Exemplare reichen, zuzusenden.

Berlin. Oscar Röthig.

J. Illeck: Hypothese über die Condensation und Wiederverdampfung im Cylinder der Dampfmaschine. (Civil-Ingenieur, Band XXII, 5. und 6. Heft.)

Die moderne Theorie der Dampfmaschine beschäftigt sich bekanntlich mit dem Probleme, die Zustandsänderungen des die Wärme vermittelnden Körpers festzustellen, welche derselbe erfährt, indem er als Dampf- und Wassergemenge von bekanntem Mischungsverhältnisse, vom Dampfkessel ausgehend, successive den ganzen Complex der Maschine passirt, um schliesslich als Speisewasser wieder in den Kessel zurück zu gelangen.

Mit Recht wurde nun von Hirn schon vor Jahren darauf hingewiesen, dass es nicht statthaft sei, hierbei den Dampfcylinder als rein geometrischen Körper zu betrachten und haben namentlich die von Hallauer und Leloutre durchgeführten Analysen (siehe Civil-Ingenieur, Band XX, S. 255) überzeugend dargethan, dass die eigenthümlichen Erscheinungen der Admissions- und Expansionsperiode ganz besondern und tiefer liegenden Ursachen zugeschrieben werden müssen, als dies bisher geschehen war.

Der Verfasser erläutert nun zunächst die Ansichten der Herren Hallauer und Leloutre, welche die Abweichungen der theoretischen Ergebnisse von der Wirklichkeit den Temperatur-Differenzen zuschreiben, welche zwischen dem wirksamen Dampfe und den Cylinderwandungen während des Verlaufes eines Kolbenhin- und Herganges bestehen und demzufolge durch den Einfluss der genannten Wandungen während der Admissionsperiode eine theilweise Condensation, hingegen während der Expansionsperiode eine theilweise Wiederverdampfung veranlasst wird. Gleichzeitig werden die Gegensätze aufgezählt, welche zwischen dieser Hypothese und der von Clausius und Zeuner begründeten physikalischen Theorie der Dampfmaschine stattfinden.

In weiterer Folge wird der Nachweis versucht, dass auch die neuartigen Anschauungen der Herren Hallauer und Leloutre auf mehrfache und sehr wesentliche Widersprüche führen, daher in ihrer gegenwärtigen Fassung noch keineswegs als unbedingt richtig angenommen werden können.

Die eigentliche Quelle der Dampfverluste, welche bisher theilweise auf das übergerissene Kesselwasser, theilweise auf die Dampflässigkeit des Kolbens zurückgeführt wurden, sowie die Ursachen der Condensation und Wiederverdampfung in den bezüglichen Perioden, findet der Verfasser, im Einklange mit der Hirn'schen Hypothese, zwar ebenfalls in den Cylinderwandungen, jedoch mit einer wesentlich verschiedenen Auffassung, welche die obigen Erscheinungen nicht nur ganz ungezwungen und in Uebereinstimmung mit den physikalischen Grundgesetzen des Dampfes erklärt, sondern auch den sehr schätzenswerthen Vortheil bietet, die innern Vorgänge im Cylinder der Dampfmaschine auf dem Rechnungswege verfolgen zu können.

Der Grundgedanke der Hypothese des Verfassers besteht in der schon a priori nicht unwahrscheinlichen Annahme, dass die Innenwandungen des Dampfcylinders und schädlichen Raumes mit einem

constanten Wasserbeschlage bedeckt seien, der in Folge der Adhäsion an den Wänden mehr oder weniger festhaftet. Dieser Wasserbeschlag besitzt in jeder Phase der Bewegung die Temperatur des Dampfes, mit welchem er in Verbindung steht. Befindet sich also der Dampfkolben auf dem Rückwege begriffen, so hat der gesammte Wasserbeschlag auf der einen Seite desselben die Temperatur des Condensatordampfes angenommen; ein Theil des soweit abgekühlten Wasserbeschlages wird nun von dem rücklaufenden Kolben vor sich hergeschoben und schliesslich in den schädlichen Raum versetzt, so dass sich zu Beginn der neuen Dampfeinströmung in diesem eine verhältnissmässig beträchtliche Wassermenge zusammengedrängt befindet und zwar ein Theil der letztern in Form eines feinen Thaubeschlages auf der Deckelfläche, der gegenüberliegenden Kolbenfläche und den noch übrigen Wandungen des schädlichen Raumes. Erfolgt jetzt die Dampfeinströmung, so muss der gesammte Wasserinhalt des schädlichen Raumes auf die Temperatur des Kesseldampfes erhöht werden und diesem Umstande ist ohne Zweifel die Condensation während der Volldruckperiode zuzuschreiben.

Ein numerisches Beispiel liefert das Verhältniss des Wasserbeschlages $\mathfrak{S}$ zur Speisewassermenge S pro Kolbenschub: $\frac{\mathfrak{S}}{S} = 3$.

Denkt man sich diesen Wasserbeschlag auf die Oberfläche der Wandungen gleichmässig vertheilt, so berechnet sich dessen Stärke mit Rücksicht auf die angenommenen Cylinder-Dimensionen auf

$$\Delta = 0{,}00017^{m}$$

also auf kaum $0{,}2^{mm}$, welcher Betrag ausreichend ist, die Condensation von mehr als 60 Procent des Speisedampfes pro Kolbenschub zu begründen.

Ebenso ungezwungen erklärt sich die Wiederverdampfung während der Expansionsperiode. Wir haben es da mit der Expansion eines sehr nassen Dampfes zu thun, insofern der Wassergehalt desselben die Dampfmenge bedeutend übertrifft, daher nach den Grundlehren der mechanischen Wärmetheorie die Expansion unter theilweiser Verdampfung des Wassergehaltes erfolgt. Die von dem Verfasser entwickelte Formel zeigt bei einem numerischen Beispiele eine Zunahme der spec. Dampfmenge von 0,40 auf 0,77, beziehungsweise vom Beginn bis zum Schluss der Expansion. Da für denselben Fall Hallauer's Analysen blos eine Verdampfung von 20 Procent (statt 37) des Wassergehaltes liefern, so besitzt die angeführte Formel zwar noch nicht den wünschenswerthen Genauig-

keitsgrad; allein im Grossen und Ganzen genommen, ist eine principielle Uebereinstimmung unverkennbar.

Der Verfasser unterzieht noch den Effectverlust, welcher durch den Wasserbeschlag verursacht wird, einer Untersuchung, wobei er zu dem nicht uninteressanten Resultate gelangt, dass sich der fragliche Effectverlust genau durch denselben Ausdruck darstellen lässt, welchen Dr. Zeuner für den Effectverlust durch den unvollkommenen Kreisprocess entwickelt hat, nur erscheint im ersteren der Wasserbeschlag $\mathfrak{S}$ statt der Speisewassermenge S pro Kolbenschub als Factor.

Ein numerisches Beispiel liefert den Gesammtverlust des Wirkungsgrades, bezogen auf den disponiblen Effect des vollkommenen Kreisprocesses:

$$\xi = 0{,}29$$

woran die Speisewassermenge mit 7 Procent, der Wasserbeschlag hingegen mit 22 Procent betheiligt ist.

Auf analoge Art wird auch der Effectverlust durch die unvollständige Expansion behandelt, wobei ein numerisches Beispiel zeigt, dass dieser Effectverlust durch den Wasserbeschlag blos um 1 Procent erhöht wird.

Hierbei ist aber zu beachten, dass der Verfasser sich den Abschluss der Expansionsperiode in beiden Fällen, mit und ohne Wasserbeschlag, unter gleicher Endspannung erfolgend dachte und damit zu einem Vergleiche kommt, der keinen sonderlichen Werth besitzt; hätte er die Expansion in beiden Fällen auf gleiche Endvolumina herab geführt, so würde sich der obige Effectverlust wesentlich höher gezeigt haben.

Ein nicht unbedenklicher Mangel der obigen Hypothese wäre der, dass sich mit derselben der Einfluss des Dampfmantels und dessen Wirkungsfähigkeit nicht mit der gleichen Ungezwungenheit, wie die übrigen Erscheinungen, erklären lassen.

J. Illeck: Ueber die reale Expansionslinie im Cylinder der Dampfmaschine und deren Beeinflussung durch den Dampfmantel (Civil-Ingenieur, Band XXIII, 2. Heft.)

Diese Arbeit bezweckt die weitere Ausbildung und Vervollkommnung der Hypothese des [illegible] über die Condensation und

Wiederverdampfung im Cylinder der Dampfmaschine (Civil-Ingenieur, Band XXII).

Eine genauere Analyse mit Rücksicht auf die gesammten Nebeneinflüsse erweist sich hierbei nicht als genügend, die vorhandenen Widersprüche aufzuklären, welche hauptsächlich darin bestehen, dass sich die Menge des Wasserbeschlages nicht verlässlich fixiren lässt, insofern sich dieselbe nach den aufgestellten Formeln bei der Maschine ohne Dampfmantel aus der Expansionsperiode erheblich kleiner als aus der Admissionsperiode berechnet, während bei der Maschine mit Dampfmantel unter gleichen Umständen gerade das Umgekehrte stattfindet.

Die Ursache dieser Erscheinung findet der Verfasser in dem Umstande, dass bei der Bewegung des Kolbens nur der kleinere Theil des Wasserbeschlages des Cylindermantels hin und her geschoben wird, während der grössere Theil durch diese Bewegung gar nicht alterirt wird, da die Kolbenringe über denselben hinweggleiten. Dieser fixe Wasserbeschlag R wird nun wähernd der Expansion von dem fortschreitenden Kolben successive aufgedeckt und von der Temperatur des Condensators auf jene des Dampfes gebracht; von diesem Momente bildet er einen Bestandtheil des expandirenden Gemisches, giebt also die aufgenommene Wärme theilweise wieder ab; durch diesen Vorgang wird die mit dem Wasserbeschlage $\mathfrak{S}$ der Admissionsperiode berechnete Expansionscurve zum Abfall gebracht. — Auf diese Annahme gestützt, entwickelt der Verfasser das Expansionsgesetz unter Einflussnahme der beiden Wasserbeschläge $\mathfrak{S}$ und R und stellt die Differential-Gleichung der wirklichen Expansionscurve für die Maschine ohne Dampfmantel auf, welche sich auf dem Wege der Annäherung integriren lässt.

Die Menge des Wasserbeschlages R lässt sich auch unabhängig von dieser Integral-Gleichung unmittelbar aus dem Indicator-Diagramm herleiten und wird das Verhältniss derselben zur Speisewassermenge S pro Kolbenschub durch ein numerisches Beispiel $\frac{R}{S} = 6{,}7$ gefunden. Die Rechnung zeigt ferner, dass bei der Maschine mit Dampfmantel die mit dem Wasserbeschlage $\mathfrak{S}$ der Admissionsperiode und unter genauer Berücksichtigung der Nebeneinflüsse berechnete Expansionscurve ziemlich nahe mit der wirklichen übereinstimmt, woraus sich folgern lässt, dass für die Maschine mit Dampfmantel der obige Wasserbeschlag R gleich Null sein müsse. Beachtet man, dass bei der Maschine mit Dampfmantel

die Temperatur des Wasserbeschlages in allen Bewegungsphasen geringer ist, als die Temperatur der geheizten Wandungen, welche gleich ist jener des Kesseldampfes, so erscheint es auch sehr natürlich, dass hier die Bedingungen vorhanden sind, unter welchen der sich bildende Wasserbeschlag im Momente des Entstehens verdampft oder der bereits vorhandene successive differentirt und zum Verschwinden gebracht werden kann.

Schliesslich glaubt der Verfasser aus dem Ganzen folgern zu können, dass die Zustandsänderungen des Dampfes im Cylinder der Dampfmaschine unabhängig von der Kolbengeschwindigkeit und deren periodischer Variabilität erfolgen.

Wien. J. Illeck.

R. Hoppe: Principien der Flächentheorie. (Grunert's Arch. LIX. 225—322.)

Die Theorie geht von der Darstellung der Flächen durch Ausdruck der cartesischen Coordinaten xyz als Functionen zweier Parameter u, v aus, und führt als Fundamentalgrössen die folgenden ein:

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$f = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$E = p\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + q\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + r\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$$

$$F = p\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + q\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} + r\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}$$

$$G = p\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + q\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + r\frac{\partial^2 z}{d v^2}$$

wo p, q, r die Richtungscosinus der Normale. Von diesen hängen in einfachster Weise die Eigenschaften der Liniensysteme und Specialitäten der Punkte ab. Für $f = 0$ schneiden sich die Parameterlinien rechtwinklig, für $F = 0$ sind sie conjugirt, beides vereinigt macht sie zu Krümmungslinien, für $E = G = 0$ sind sie asymptotisch, für $e = 1$, $f = 0$ orthogonal geodätisch, für $e = g$, $f = 0$ werden sie auf der Ebene abgebildet als ein orthogonales System Gerader; $\frac{E}{e} = \frac{F}{f} = \frac{G}{g}$ drückt die sphärische Krümmung

aus; durch Determinanten zweiter Ordnung werden aus ihnen die Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen bestimmt; die Summe und das Product der Hauptkrümmungen stellen sich dar als

$$\frac{Eg - 2Ff + Ge}{eg - f^2}, \quad \frac{EG - F^2}{eg - f^2};$$

letztere Grösse lässt sich durch partielle Differentialquotienten von e, f, g ausdrücken; die Grössen e, f, g, $EG - F^2$ sind diejenigen, welche bei Biegung der Fläche unverändert bleiben; bei Uebergang zu neuen Parametern sind die Relationen der E, F, G genau dieselben wie die der e, f, g u. a. m., wodurch sich die Einführung wohl zur Genüge empfohlen hat.

Die Schrift theilt sich in drei Abschnitte. Der erste behandelt in allgemeinen Parametern die bekannten Sätze von den Krümmungen, Tangenten und Normalen, der Complanation und Kubatur, der Biegung und Abwickelung, der Parallelität der Flächen und den Mittelpunktsflächen. Der zweite Abschnitt specialisirt die Parameter, behandelt die Theorie der Krümmungslinien, asymptotischen Linien und Kürzesten, und führt deren Systeme, zu denen noch die der geodätischen und Abbildungslinien hinzukommen, als Parameterlinien ein. Der dritte Abschnitt specialisirt die Flächen und handelt von denjenigen, für welche Probleme, die nicht allgemein lösbar sind, gelöst werden können: dies sind die abwickelbaren, die Flächen constanter Krümmung, die kleinsten Flächen, die Flächen constanter Summe der Hauptkrümmungsradien, die Rotationsflächen, die Flächen zweiten Grades und die Fläche $xyz = c$. Schliesslich wird eine Uebersicht der allgemeinen Probleme der Flächentheorie und der lösbaren Specialfälle gegeben.

Kein Resultat ist neu; auch die vom Verfasser herrührenden sind früher publicirt; dagegen ist die Methode, durchweg analytisch, zum grossen Theil dem Verfasser eigen. Die Fundamentalgrössen stimmen soweit mit den Gauss'schen überein, als nur E, F, G von den entsprechenden Grössen durch den gemeinsamen Divisor $\sqrt{eg - f^2}$ unterschieden sind, was in beträchtlichem Umfange Vereinfachung zur Folge gehabt hat; die abweichende Bezeichnung rechtfertigt sich durch die leichtere Handhabung und das deutlichere Hervortreten der Analogien.

R. Hoppe: Geometrische Deutung der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung der Flächentheorie. (Grunert's Arch. LX. 65—70.)

Zur Construction der Grössen E, F, G (s. d. vorige Referat) werden auf der Fläche folgende Punkte betrachtet: der Punkt P mit den Parameterwerthen (u, v), um ihn herum die vier Punkte $P_u(u+\partial u, v)$, $P_v(u, v+\partial v)$, $P'_u(u-\partial u, v)$, $P'_v(u, v-\partial v)$ und der Punkt $P_s(u+\partial u, v+\partial v)$. Diese werden zu folgenden ebenen Dreiecken verbunden:

$$\varDelta = PP_uP_v,\quad \varDelta_1 = PP'_uP_v,\quad \varDelta_2 = PP_uP'_v,$$
$$\varDelta_u = PP_uP_s,\quad \varDelta_v = PP_vP_s.$$

Deren Ebenen bilden folgende unendlich kleine Winkel:

δ_v zwischen $\varDelta$ und $\varDelta_1$, δ_u zwischen $\varDelta$ und $\varDelta_2$, δ zwischen $\varDelta_u$ und $\varDelta_v$.

Durch sie werden dann die Fundamentalgrössen folgendermassen dargestellt:

$$E = \lim \frac{\delta_v}{\sqrt{g}\,\partial v}\,\frac{t\,\partial u\,\partial v}{\partial u^2};\quad G = \lim \frac{\delta_u}{\sqrt{e}\,\partial u}\,\frac{t\,\partial u\,\partial v}{\partial v^2};$$
$$F = \lim. \frac{\delta}{\partial s}\,\frac{t\,\partial u\,\partial v}{\partial u\,\partial v},$$

wo $t\partial u\partial v$ das Flächenelement bezeichnet.

R. Hoppe: Minimum-Oberflächen der drei ersten Classen von Polyedern. (Grunert's Arch. LVIII. 328—336.)

Es giebt 11 verschiedene Zusammensetzungen von Dreiecken zu einer Polyederfläche, wenn nie mehr als 5 um eine Ecke liegen. Von diesen 11 Polyedern werden die Dimensionen erst algebraisch, dann numerisch derart bestimmt, dass bei Volum $= 1$ die Oberfläche ein Minimum wird.

R. Hoppe: Bemerkung über die Berechnung vielstelliger Logarithmen. (Grunert's Arch. LVIII. 437—439.)

Bezüglich mehrerer in letzter Zeit erschienenen Tafeln zur Berechnung vielstelliger Logarithmen macht der Artikel auf die Zwecklosigkeit der Umrechnung der natürlichen Logarithmen in

Brigg'sche für den Fall, wo jeder Logarithmus einzeln zu berechnen ist, aufmerksam, eine Umrechnung die, weil jene Tafeln auf Brigg'sche Logarithmen eingerichtet sind, beim Gebrauch für jede Zahl stets zweimal vollzogen werden muss, sei es, dass man potenciren oder einen blossen Logarithmus finden will. Die für natürliche Logarithmen eingerichteten Tafeln, welche dem Rechner diese überflüssige Mühe ersparen, sind inzwischen vom Verfasser besorgt worden (s. unten).

R. Hoppe: Ein Theorem über die conforme Abbildung der Flächen auf Ebenen. (Grunert's Arch. LIX. 59–64.)

Das Theorem lautet: Kann man auf einer reellen Fläche eine stetige Schaar imaginärer Linien analytisch darstellen, deren Bogenelement constant null ist, so ist die Aufgabe der conformen Abbildung eben dieser Fläche auf der Ebene gelöst. Die Gleichungen der Linie, nach Elimination einer Coordinate z, aufgelöst nach dem Parameter, machen diesen zu einer Function der beiden andern $f(x, y)$ und die Doppelgleichung

$$u + iv = F\{f(x,y)\}$$

enthält die zwei Abbildungsrelationen zwischen den ebenen Coordinaten u, v und den x, y.

Die Aufgabe, eine Curve oder eine Gerade im Raume zu finden, deren Element constant null ist, wird allgemein gelöst beziehungsweise durch

$$x + iy = \frac{\partial^2 v}{\partial u^2}$$

$$x - iy = a - 2v + 2u\frac{\partial v}{\partial u} - u^2\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}$$

$$z = b - \frac{\partial v}{\partial u} + u\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}$$

oder durch

$$x + iy = v$$

$$x - iy = a - u^2 v$$

$$z = b + uv.$$

Es bleibt übrig, u, v, a, b als Complexe so zu bestimmen, dass nach Elimination von u, v die Gleichung in x, y, z reell wird.

R. Hoppe: Beispiel der Bestimmung einer Fläche aus der Indicatrix der Normale. (Grunert's Arch. LIX. 407—414.)

Kennt man auf der Kugelfläche $p^2 + q^2 + r^2 = 1$ ein orthogonales Liniensystem, so ergiebt sich durch Integration einer linearen Gleichung zweiter Ordnung eine Fläche, auf welcher p, q, r die Richtungscosinus der Normale sind, und dem sphärischen Liniensystem das System der Krümmungslinien entspricht (s. Grun. Arch. LV. 368. LIX. 257. dies Repertorium I. 56). Das orthogonale sphärische System ist nun hier:

$$p \pm q = \sqrt{(1 \mp u)(1 \pm v)}; \quad r = \sqrt{uv};$$

die Integration wird ausgeführt, und das Resultat ist diejenige Fläche, für welche, wenn man x, y zu Parametern nimmt, das Mittelglied der Differentialgleichung der Krümmungslinien null wird, ein Resultat, zu dem Fuchs auf anderem Wege gelangt war.

R. Hoppe: Kugel von excentrischer Masse und centrischer Trägheit. (Grunert's Arch. LX. 100—105.)

Es wird in allgemeinster Weise die Masse in einer Kugel so vertheilt, dass die Trägheitsmomente für alle durch den Mittelpunkt gehenden Axen einander gleich werden.

R. Hoppe: Ueber den Raumbegriff. (Hoffmann's Zeitschr. für naturwiss. Unterricht VII. 250—251.)

Es wird zuerst die psychisch gegebene Räumlichkeit der Empfindung unterschieden von dem ideellen, umfassenden Raumsystem. Von ersterer abstrahirt die Geometrie; auf sie muss aber die Untersuchung zurückgehen, wenn der empirische Ursprung der Raumvorstellung in Frage steht. Dies ist bis jetzt in den zahlreichen principiell geometrischen Untersuchungen nur sehr mangelhaft und mit Widerstreben geschehen. Namentlich bedarf die Frage, wie die Erfahrung aus individueller und mit Fehlern behafteter Beobachtung zum allgemeinen und exacten Begriff gelangt, einer Beantwortung, die sich vollständig geben lässt.

R. Hoppe: Grund der mathematischen Evidenz. (Tageblatt der Naturforscherversammlung IL. Beilage 60—62.)

Der Grund der mathematischen Evidenz liegt nicht in der Schlussform, sondern in der Homogenität der Gegenstände der Mathematik, welche es gestattet das ganze Gebiet möglicher Variation in Gedanken zu durchlaufen und infolge dessen ausschliessende Gegensätze zu machen.

R. Hoppe: Tafel zur dreissigstelligen logarithmischen Rechnung. (Leipzig, C. A. Koch.)

Das Verfahren, nach dem man zur einzelnen Zahl den Logarithmus und zum Logarithmus die Zahl durch leichte Rechnung findet, also auch ohne Tafeln potenziren kann, ist bekannt, und es existirten bereits zwölfstellige Tafeln zur weiteren Abkürzung. Die vorliegende Tafel unterscheidet sich dadurch, dass sie erstlich für natürliche Logarithmen eingerichtet ist, ferner dass sie statt $\log(1+x)$ die Werthe von $x - \log(1+x)$ angiebt, wodurch die Rechnung bedeutend gekürzt wird, endlich dass sie die gewöhnlichen Divisionen durch $1{,}000\ldots n$ in Multiplicationen, d. h. also in einziffrige Multiplicationen verwandelt. Durch diese Vortheile wird die Rechnung dermassen erleichtert, dass jetzt die Potenzirung einer 30ziffrigen Zahl mit einem 30ziffrigen Exponenten etwa drei ebensovielziffrigen Multiplicationen an Ausdehnung gleich kommt. Die Tafel, welcher eine Beschreibung des Verfahrens vorausgeht, umfasst sieben Seiten und giebt zuerst die Vielfachen von log 10, dann die Logarithmen der Zahlen 2 bis 99, dann die Werthe von $n\,.\,10^{-k} - \log(1+n\,.\,10^{-k})$ bis zur 33sten Stelle, endlich die Factoren zur anfänglichen Reduction.

Berlin. R. Hoppe.

Oskar Emil Meyer: Die kinetische Theorie der Gase. In elementarer Darstellung, mit mathematischen Zusätzen. (Breslau. Verlag von Maruschke und Berendt. 1877.)

Das genannte Werk ist freilich nicht ausschliesslich für Mathematiker, sondern auch für den weiteren Kreis der naturwissenschaftlich Gebildeten bestimmt; doch scheint es besonders wegen

der angehängten mathematischen Zusätze eine Besprechung in diesem Repertorium zu verdienen.

Im Texte des Buches ist die neuere, von Clausius u. A. begründete und entwickelte Gastheorie in elementarer Weise dargestellt; die Hilfsmittel der höheren Mathematik sind vermieden worden, um das Verständniss der Theorie einem grösseren Publikum zugänglich zu machen. Die Darstellung sucht daher stets ihre Stütze in der Erfahrung. Die Beobachtungen über Druck und Dichtigkeit der Gase, Effusion, Ausdehnung durch die Wärme, specifische Wärme, innere und äussere Reibung, Diffusion und Wärmeleitungsfähigkeit sind in möglichster Vollständigkeit zusammengestellt und zur Prüfung der Theorie, sowie der von ihr geforderten Gesetze verwerthet worden. Hierbei hat sich eine vortreffliche Uebereinstimmung in allen Punkten ergeben. Alle jene verschiedenartigen Beobachtungen führen zu denselben Zahlenwerthen theils für die Energie und die mittlere Geschwindigkeit der molecularen Bewegungen, theils für die mittlere Länge der von den Theilchen zurückgelegten Wege. Auch die Bewegungen, welche die einzelnen Atome in den Molecularaggregaten für sich ausführen, folgen einem Gesetze, welches sich aus der Theorie und aus den Beobachtungen über das Verhältniss der beiderlei specifischen Wärmen übereinstimmend ergiebt. Nach diesen Erfahrungen durfte ich mich für berechtigt halten, auf Grund der Theorie die unmittelbaren Eigenschaften der Molekeln und Atome in das Bereich der Forschung zu ziehen, namentlich ihre Grösse und ihr Gewicht zu bestimmen; selbst die Form chemisch zusammengesetzter Gasmolekeln lässt sich in vielen Fällen angeben, dieselbe scheint für die Stellung entscheidend zu sein, welche die Verbindung im chemischen System der Typen einnimmt.

Die mathematischen Zusätze enthalten Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Probleme unserer Theorie. Während im Texte überall die mit grosser Annäherung zulässige einfache Voraussetzung, dass alle Molekeln sich mit einer gleichen Geschwindigkeit bewegen, zum Beweise der aus der Theorie folgenden Gesetze benutzt wurde, wird in den Zusätzen nach Maxwells Vorgange eingeführt, dass die Geschwindigkeiten der einzelnen Molekeln ihrer Grösse und Richtung nach sehr verschieden sein können und müssen, obwohl freilich die mittleren Werthe weit häufiger vorkommen, als die sehr grossen und als die sehr kleinen. Ihren mathematischen Ausdruck findet diese Annahme in der Einführung

einer Function, welche die Wahrscheinlichkeit dafür ausdrückt, dass ein Theilchen eine Bewegung von bestimmter Grösse und Richtung besitzt; mit Hilfe derselben kann in jedem Falle aus der unbegrenzten Zahl der Elementarvorgänge das gesetzmässige Ereigniss als wahrscheinlicher Mittelwerth berechnet werden.

Die Berechnung des Druckes, welche in der ersten der mathematischen Beilagen behandelt wird, lässt sich durchführen, ohne dass es nöthig wäre, die erwähnte Wahrscheinlichkeitsfunction zu bestimmen. Die zuerst von Joule gefundene Beziehung, dass der auf die Flächeneinheit wirkende Druck $= \frac{2}{3}$ der in der Raumeinheit enthaltenen kinetischen Energie der Molecularbewegung ist, gilt unabhängig von dem Gesetze, nach welchem die verschiedenen Werthe der Geschwindigkeit auf die einzelnen Molekeln vertheilt sind.

In der zweiten Beilage wird für das Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten, welches Maxwell zuerst aufgestellt hat, ein neuer Beweis geliefert, in welchem die Bestimmung dieses Gesetzes als eine Aufgabe der Variationsrechnung aufgefasst wird. Die Möglichkeit dieser mathematischen Vereinfachung beruht auf dem Gedanken, dass der von Maxwell vorausgesetzte Gleichgewichtszustand, welcher in einem Systeme von Gasmolekeln nach jeder Störung immer wieder von selbst eintritt, unter allen möglichen Zuständen des Systems der wahrscheinlichste ist. Die Betrachtung lässt sich von einfachen Massenpunkten auf Molekeln ausdehnen, welche aus Atomen zusammengesetzt sind; in diesem allgemeineren Falle handelt es sich nicht bloss um die moleculare Energie, welche in der lebendigen Kraft der Schwerpunktsbewegung besteht, sondern auch um die aus kinetischer und potentieller bestehenden Energie der einzelnen Atome. Die Untersuchung der letzteren ergiebt, dass die mittlere Energie eines Atomes immer kleiner ist, als die Energie der Schwerpunktsbewegung der Molekel. Die Richtigkeit dieses mechanischen Theorems wird durch die im Texte mitgetheilten Beobachtungen bestätigt.

Der dritte Zusatz betrifft den mittleren Werth der molecularen Weglänge. Es werden die von Clausius erdachten Methoden unter Benutzung des Maxwell'schen Gesetzes zur Anwendung gebracht.

Dann folgt eine theoretische Bemerkung über die Adhäsion der Gase an festen Körpern, durch welche ich eine Erklärung der Beobachtungen von F. Weber zu geben suche.

In den übrigen Zusätzen finden sich Berechnungen der Werthe, welche die Constanten der Reibung, der Diffusion und der Wärmeleitung annehmen, wenn das Maxwell'sche Gesetz der Geschwindigkeitsvertheilung angenommen wird.

Breslau. O. E. Meyer.

J. Karl Becker: Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage streng deduktiv dargestellt. (Erster Theil. Mit 145 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Berlin, Weidmann'sche Buchhandlung. 1877.)

Es ist mir nicht möglich, Zweck und Inhalt dieses Werkes besser und kürzer anzugeben, als es in der Vorrede geschehen ist. Man gestatte mir darum, einiges aus derselben wörtlich wiederzugeben. „Das vorliegende Buch ist der erste Theil eines grösseren Werkes, in welchem ich eine möglichst vollständige Darstellung der elementaren Geometrie zu geben beabsichtige, die alle diejenigen Lehren umfassen soll, welche ausschliesslich von Gebilden erster und zweiter Ordnung handeln." — „Der zunächst vorliegende Theil des Gesammtwerkes bildet ein für sich abgeschlossenes Ganze und hat zum Gegenstande die Darlegung der Grundgesetze des Raumes und der Ebene, welche in den Eigenschaften der einfachsten Figuren zu Tage treten. Er umfasst alle diejenigen Sätze über Gestalt und Lage der einfachsten Figuren, zu deren Begründung keine anderen metrischen Relationen erforderlich sind, als die der Gleichheit (incl. der Gleichheit zweier Verhältnisse)."

„Veranlasst wurde diese Bearbeitung der Elemente zunächst durch die Resultate der Untersuchung von Helmholtz „über die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.""

Ich stellte mir zunächst die Aufgabe, die von Helmholtz aufgestellten Postulate aus ihrer abstract analytischen Form wieder in die Sprache der Geometrie zurück zu übersetzen und aus ihnen die übrigen Euklid'schen Axiome abzuleiten. Das Ergebniss dieser Untersuchung ist in Schlömilch's Zeitschrift (XX, 6 S. 445) veröffentlicht worden in einer auch hier angezeigten Abhandlung (Heft 3, S. 240).

„Gegen meine Deduction der Axiome von der Geraden und der



Ebene*) ist bis jetzt kein Einspruch erhoben worden, und wird sich dieselbe wohl schwerlich anfechten lassen. Nicht ebenso bin ich überzeugt von der Unanfechtbarkeit meiner Deduction des Parallelenaxiomes, obgleich die Erwiderung, welche meiner darauf bezüglichen Frage kürzlich durch Herrn Lüroth zu Theil wurde (Schlömilch's Zeitschrift, Bd. XXI, S. 294) mich auch nicht vom Gegentheil überzeugt, da diese Erwiderung meine Darstellung unberührt lässt.**)

„Es war mir in erster Linie darum zu thun, diejenigen Eigenschaften ausfindig zu machen, die wir dem Raume selbst zuschreiben müssen, wenn die Eigenschaften der räumlichen Gebilde als deren Consequenzen erscheinen sollen, und die Frage nach einem Beweisgrunde für das elfte Axiom des Euklides interessirte mich nur insoferne, als derselbe doch in einer Eigenschaft des Raumes gesucht werden müsste. Ob sich nun das Helmholtz'sche Postulat von der Unendlichkeit des Raumes als ausreichend erweise, um die Parallelentheorie zu begründen oder nicht, scheint mir nicht von sehr grosser Wichtigkeit zu sein. Ich habe darum keinen Anstand genommen, den einzigen in meiner Deduction des Parallelenaxioms vorkommenden Satz, dessen rein logische Berechtigung vielleicht negirt werden kann, eventuell als siebentes Axiom vorzuschlagen (s. S. 68). Es ist indessen misslich, eine Aussage über Unendliches, das doch nicht Gegenstand einer Anschauung sein kann, als Axiom aufzustellen. Ist also noch ein Axiom erforderlich, so würde jedenfalls ein solches den Vorzug verdienen, das sich wirklich auf die Anschauung stützen lässt. Vielleicht dürfte das folgende den hier zu stellenden Anforderungen entsprechen:

Durch jeden Punkt im Raume geht eine Gerade, deren sämmtliche Punkte von einer beliebig gegebenen Geraden denselben Abstand haben". ***)

---

*) Worin ich jedoch zum Theil Herrn Worpitzky („über die Grundbegriffe der Geometrie" in Grunert's Archiv LV, S. 405) die Priorität zugestehen muss.

**) Ich verweise hier auf meine Replik „noch einige Bemerkungen über Bertrand's Parallelentheorie".

***) Auf die von Herrn Langer in der Jenaer Literaturzeitung Nr. 17 dieses Jahrganges S. 260 erhobenen Einwände, welche sich fast durchgängig auf Dinge beziehen, welche mit dem Inhalte und Zwecke meines Buches gar nichts zu thun haben, kann ich an dieser Stelle um so weniger eingehen, als ich dadurch der Tendenz dieses Repertoriums zuwiderhandeln würde.

Der vorliegende erste Theil zerfällt in drei Kapitel. Das erste (33 Seiten) enthält die Grundbegriffe und die Axiome. Diese sind:

I. Der Raum ist stetig, endlos und von jedem Punkte aus nach allen Seiten auf gleiche Art ausgedehnt. Er hat drei Dimensionen.

II. Die Gestalt einer stetigen oder discreten Mannigfaltigkeit von Punkten im Raume ist unabhängig vom Orte, und kann stetig ihren Ort so verändern, dass zwei beliebige Punkte derselben mit zwei beliebigen gleich weit abstehenden Punkten im Raume zur Coincidenz gebracht werden können, und dabei dem einen noch eine beliebige Bahn vorgeschrieben werden darf.

III. Wird eine Figur in einem Punkte oder in zweien Punkten festgehalten, so setzt der Raum ihrer Beweglichkeit nur in so weit eine Schranke, als die Lage der übrigen Punkte durch ihren Abstand von einem oder zweien festen Punkten bestimmt ist.

IV. Alle Punkte, deren Lage durch ihren Abstand von zwei beliebigen festen Punkten bestimmt ist, erfüllen stetig eine durch die festen Punkte gehende, ohne Ende ausgedehnte Linie.

V. Ist die Lage eines Punktes durch seine Entfernungen von zwei festen Punkten nicht bestimmt, so erfüllt er mit allen übrigen Punkten, welche von den festen Punkten dieselben Entfernungen haben, stetig eine in sich selbst zurücklaufende Linie.

In der Einleitung ist ausdrücklich gesagt: „Die vorausgesetzten Eigenschaften des Raumes werden ohne weitere Begründung in Form von Sätzen ausgesprochen, die den Namen Axiome oder Postulate (nach Helmholtz) führen, und es ist dabei gleichgültig, ob der Leser dieselben als Postulate der Vernunft oder des Anschauungsvermögens, also als transscendentale Wahrheiten, oder als Ergebnisse der Erfahrung und tief eingeprägter Angewöhnung, wofür man sie jetzt vielfach ausgibt, auffassen will. Hier handelt es sich nur darum, ob sie hinreichen, die mit der Erfahrung übereinstimmenden Lehren der Geometrie deductiv zu begründen."

Auf Grund des I. Axiomes werden zunächst der Begriff und die Haupteigenschaften der Kugelfläche entwickelt und dann die in IV. vorausgesetzte Linie, die Gerade, als eine solche Linie nachgewiesen, die alle in ihr liegenden Punkte auf kürzestem Wege verbindet. Der Ort aller Punkte, die von zweien gegebenen Punkten gegebene Distanzen haben, ohne ihrer Lage nach dadurch völlig bestimmt zu sein, wird als Kreislinie und die durch die festen Punkte gehende Gerade als deren Axe definirt. Es folgt dann unmittelbar, dass alle Punkte der Kreislinie von jedem Punkte ihrer

Axe gleich weit abstehen. Die Sätze über die Kugelfläche erhalten durch die Herbeiziehung der Kreislinie einige Erweiterungen. Dann folgt die Definition des Winkels als das Gebilde aus zwei in einem gemeinsamen Punkte zusammentreffenden Halbgeraden (Strahlen) und der Kegelfläche als die durch Rotation eines Winkels um einen Schenkel beschriebene Fläche. Die Schwierigkeit der Winkelvergleichung ohne Voraussetzung der Ebene wird dadurch gehoben, dass nur von der Gleichheit (Congruenz), nicht von der Grösse derselben die Rede ist. Es folgt dann die gewöhnliche Definition von Neben- und Scheitelwinkel und ein neuer Beweis für die Gleichheit der letzteren. Auch der Rechte und das Senkrechtstehen konnten auf die übliche Weise definirt werden, und die Ebene ergibt sich dann als Kegelfläche, deren erzeugender Winkel ein Rechter ist. Bei dieser Gelegenheit wird der Begriff der symmetrischen Lage zweier Punkte gegen eine Gerade und gegen eine Ebene entwickelt. Diese zeigt sich dann als der Ort aller Punkte, welche von zweien Punkten gleichen Abstand haben, was zur Demonstration ihrer übrigen Eigenschaften führt. Mit der Betrachtung der Kreislinie als Durchschnitt der Ebene mit der Kugelfläche findet das erste Kapitel seinen Abschluss.

Das zweite Kapitel (von Seite 34 bis 165) behandelt die einfachen ebenen Figuren und die in ihren Eigenschaften zu Tag tretenden Gesetze der Ebene. Es beginnt mit der Vergleichung der Winkel nach ihrer Grösse. Hervorheben will ich die Abschnitte über Drehung einer ebenen Figur in der Ebene und um eine in derselben liegende Axe, an die sich die Sätze über centrische und symmetrische Figuren anschliessen (§. 15 u. 16); die Feststellung der Begriffe „concav" und „convex" (§. 17), Stellung, Richtung, Neigung (§. 27) im Zusammenhange mit den Sätzen über Parallelbewegung in der Ebene; die Einführung des Begriffes Durchmesser und die wohl zum Theil neue Behandlung der harmonischen Eigenschaften der Vierecke und Vierseite mit Einschluss der Sätze von Gauss und Bodenmiller (§. 35 bis 38).

Das dritte Kapitel (von Seite 166 bis 295) verlässt wieder die Ebene, um in derselben Weise eingehend die einfachsten Figuren des Raumes von drei Dimensionen und die in ihnen hervortretenden Grundgesetze des Raumes zu betrachten. Den Schluss dieses Kapitels bildet eine eingehende Betrachtung der Polyederoberflächen, eines Gegenstandes, der mir mehrfach Anlass gegeben hat zu kleinen Arbeiten, deren Gesammtergebniss ich hiermit einer wohlwollenden

Kritik empfehlen möchte. Solche, welche sich beim blossen Durchblättern nicht schnell genug zurecht finden, mache ich hiermit noch auf das ausführliche Inhaltsverzeichniss aufmerksam.

Mannheim, Anfang Mai 1877. Johann Karl Becker.

Benno Erdmann: Die Axiome der Geometrie. (Eine philosophische Untersuchung der Riemann-Helmholtz'schen Raumtheorie. X u. 174 S. Leipzig, Voss. 1877. M. 4. 80.)

Die Erweiterung, welche der analytischen Geometrie durch die Untersuchungen von Riemann und Helmholtz zu Theil geworden ist, hat durch die psychologische und erkenntniss-theoretische Wendung, die schon Riemann seinen Resultaten gab, auch die Vertreter der philosophischen Wissenschaften lebhaft angeregt. Dass von den letzteren sofort der Versuch gemacht wurde, jene neuen Ergebnisse in dem alten Kampf der Ueberzeugungen für die entgegengesetztesten Standpunkte zu verwerthen, ist begreiflich. Aber auch bei den Mathematikern ist das Interesse an denselben von vornherein ein getheiltes gewesen. Der unmittelbare Zusammenhang der Riemann'schen Erörterungen mit den geometrischen Untersuchungen von Bolyai und Lobatschewsky, die in Folge ihres scheinbaren Widerspruchs gegen die Thatsachen der äusseren Anschauung nur die Anerkennung ihres negativen Resultats, dass nämlich das Parallelenaxiom unbeweisbar sei, hätten erzwingen können, überdies wohl auch die knappe, zum Theil selbst dunkele, gelegentlich sogar kaum verständliche Darstellungsweise Riemann's haben manche Schwierigkeiten des Verständnisses und der Begründung im einzelnen offen gelassen, die noch jetzt nicht vollständig gehoben sind. Es giebt noch gegenwärtig, wie bekannt, Mathematiker, die nicht bloss die geometrische Bedeutung, sondern selbst die analytische Widerspruchslosigkeit jener Erweiterung in Frage stellen. Weiter noch gingen und gehen die Ansichten über die philosophische Tragweite derselben auseinander. In dieser Hinsicht sind zur Zeit wohl alle denkbaren Mittelstufen zwischen einer unbedingten Verurtheilung einerseits und einer übertriebenen Werthschätzung andrerseits vertreten.

Der Verfasser stellt sich in Folge dessen nach einer kurzen Darstellung der Entwickelung der Probleme von Legendre bis

auf Riemann und Helmholtz zuerst die Aufgabe, die logische Berechtigung der geometrischen Raumtheorie der genannten beiden Forscher zu untersuchen. Da der allgemeine Gedanke jener Theorie sich in Form der Behauptung darstellen lässt, dass der Grössenbegriff unseres Raumes ein spezieller Fall aus einem Systeme logisch gleich möglicher Grössenbegriffe sei, so muss die Fragestellung hier lauten: Welche Definition des Grössenbegriffs unseres Raumes (resp. unseres Raumbegriffs) genügt, das nothwendige und hinreichende Axiomensystem der euklidischen Geometrie ableiten zu lassen? Es ergiebt sich, dass weder die allgemeinsten Grössenbegriffe dieser Gruppe, die Allgemeinbegriffe der n-fach bestimmten und der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, noch die Artbegriffe der beliebig ausgedehnten sphärischen, pseudosphärischen und ebenen Räume in ihrer rein analytischen Fassung in sich widersprechend sind. Es zeigt sich ferner, dass auch die Subsumtion unseres Raumbegriffs unter jene Begriffe, die zu der Definition desselben als einer stetigen, dreifach ausgedehnten, in sich congruenten und ebenen Mannigfaltigkeit führt, den Gegensatz zwischen Anschauung und Begriff weder verwischt noch aufhebt. Auch darin endlich hat die geometrische Theorie Recht, dass sie behauptet, die Frage nach der Congruenz wie nach der Ebenheit unseres Raumes sei aus den Mitteln unserer Massmethoden heraus nicht vollständig zu lösen, ja, werde überhaupt nie streng beantwortet werden können. Es bleibt immer möglich, dass das Krümmungsmass in jedem Punkte nach drei Richtungen hin verschiedene, für unsere Massmethoden unbestimmbar kleine Werthe habe; es lässt sich ebenso nie widerlegen, dass dasselbe, falls es als constant angesehen werden kann, einen für unsere Methoden unbestimmbar kleinen positiven oder negativen Werth habe. Denn das einzige sachlich zulässige Gegenargument, die thatsächliche Fähigkeit der Erweiterung unserer Raumvorstellung ins unendliche, wird hinfällig, da sich zeigen lässt, dass Flächenwesen, die gezwungen sind auf einem sehr kleinen Theil einer sehr grossen Kugelfläche zu leben, trotz des sphärischen Charakters ihres Flächenraums doch zur Ausbildung einer Geometrie der Ebene geführt werden würden. Genau in derselben Weise kann die Ebenheit unseres Raumes nur ein der Unzulänglichkeit unserer Massmethoden entsprungenes Vorurtheil sein, das Axiom von der geraden Linie für streng giltig zu halten.

Da das Raumproblem der Geometrie, die Frage nach dem Inhalt der Raumvorstellung, zu den Raumproblemen der Psychologie

und der Erkenntnisstheorie, den Fragen nach dem Ursprung und nach der Bedeutung derselben, in keiner nothwendigen sachlichen Beziehung steht, so folgt, dass philosophische Consequenzen aus der geometrischen Theorie nur gezogen werden können, sofern die letztere im Stande ist, in den Grundlagen der Geometrie Begriffe aufzuweisen, deren philosophische Discussion zu eindeutigen Resultaten führt. Solche Hinweisungen nun sind, wie der Verfasser im dritten Capitel zu zeigen sucht, in der neuen Raumtheorie thatsächlich vorhanden. Helmholtz' Analyse der Congruenzbedingungen beweist, dass die Begriffe der Festigkeit und der Bewegung (resp. der Rotation) nothwendige Postulate der Geometrie sind; keiner dieser Begriffe aber lässt sich als absolut apriorisch auffassen, wie selbst die rationalistischen Erkenntnisstheorien bisher immer zugestanden haben. Ferner zeigt Beltrami's von Helmholtz erweiterter Nachweis der partiellen Anschaubarkeit sphärischer und pseudosphärischer Massbeziehungen an, dass die Raumvorstellung selbst empirischer Natur ist. Denn Vorstellungen, die wir durch nachweisbar empirische Vorstellungsreihen in uns überwinden können, müssen selbst empirisch sein.

Jedoch nur das eine folgt aus diesen Hinweisungen der geometrischen Theorie nothwendig, dass ein positiv bestimmender Einfluss der Erfahrung bei der Entwicklung der Raumvorstellung angenommen werden muss, ob daneben ein relativ apriorischer Factor vorhanden ist, und wie dieser näher bestimmt werden soll, bleibt unberührt. Theils in directer Ausführung, theils in polemischer Abweisung der Auffassungen der Kantischen Schule u. a. sucht der Verfasser diese Ueberzeugungen genauer zu begründen, und sich so den Weg zu bahnen zu einer allgemeinen Theorie der Geometrie, deren Grundzüge das letzte Capitel enthält. Der Verfasser will darlegen, dass die empiristische Auffassungsweise (welche die Mitwirkung eines relativ apriorischen Factors nicht ausschliesst, sondern fordert) sowohl das Wesen der geometrischen Grundbegriffe, der Axiome der Raumvorstellung und der Definitionen der Constructionsbegriffe, als auch die Eigenart der geometrischen Methode, ihre relative Unabhängigkeit von der Erfahrung, sowie ihren deductiven Charakter, durch einfachere Voraussetzungen hinreichender zu erklären vermag als der Rationalismus.

Berlin. B. Erdmann.

P. Gordan: Ueber endliche Gruppen linearer Transformationen.
(Math. Ann. XII, 23—46.)

Das Problem der vorliegenden Arbeit:

„Alle endlichen Gruppen zu bestimmen, die sich aus linearen Transformationen einer Veränderlichen zusammensetzen lassen“

hat Herr Klein 9. Bd. Ann. (Rep. I 10) mittelst geometrischer Betrachtungen gelöst; er stellte die durch die Gruppen entstehenden algebraischen Formen durch die Ecken regelmässiger Körper dar. Im Gegensatz zu dieser Darstellung construirt hier der Verfasser die Gruppen direct und auf algebraische Art. Der Ausdruck für die lineare Substitution entspricht derjenigen, welche Clebsch und der Verfasser zusammen für die linearen Substitutionen im ternären Gebiet gegeben haben (Math. Annalen I). So wie dort ist auch hier die Substitution durch das Verschwinden einer bilinearen Form dargestellt

$$r_x s_y = 0.$$

Von dieser wird die Normalform gegeben, indem die Determinante der Substitution also $\frac{1}{2}(rr_1)(ss_1) = 1$ gesetzt wird. Zu der Substitution gehört eine quadratische Form $r_x s_x$, man setze

$$r_x s_x = \varkappa a_x^2$$

und wähle $\varkappa$ so dass:

$$(ab)^2 = -2,$$

man kann dann einen Winkel φ so bestimmen, dass:

$$\varkappa = i \sin\varphi; \qquad (rs) = -2\cos\varphi$$

also:

$$r_x s_y = i \sin\varphi\, a_x a_y + (yx)\cos\varphi$$

die Normalform der Substitution wird. φ heisst ihr Argument, a_x^2 ihre quadratische Form; φ ist bis auf π, a_x^2 bis aufs Vorzeichen bestimmt.

Für die Zusammensetzung zweier Substitutionen

$$S = r_x s_y = i \sin\varphi\, a_x a_y + (yx)\cos\varphi$$
$$S_1 = \varrho_x \sigma_y = i \sin\psi\, \alpha_x \alpha_y + (yx)\cos\psi$$

zu einer 3ten:

$$SS_1 = i \sin\Theta\, p_x p_y + (yx)\cos\Theta$$

gelten die Formeln

$$1. \begin{cases} \sin\Theta \,.\, p_x^2 = \sin\varphi \cos\psi\, a_x^2 + \cos\varphi \sin\psi\, \alpha_x^2 + i \sin\varphi \sin\psi\, (a\alpha)\, a_x \alpha_x \\ \cos\Theta \quad = \cos\varphi \cos\psi + \frac{1}{2}(a\alpha)^2 \sin\varphi \sin\psi \end{cases}$$

so dass S^{ν} die quadratische Form a_x^2 und das Argument $\nu\varphi$ hat. Es sei H das Argument von $S^{-1}S_1$, so dass

2. $\cos\Theta + \cos H = \cos(\varphi + \psi) + \cos(\varphi - \psi).$

Gehört S einer endlichen Gruppe an, so muss es zunächst iterirend sein, so dass:

$$S^n = \pm (yx)$$

und daher $n\varphi$ ein ganzes Multiplum von π ist. Die kleinste Zahl n, für welches diess stattfindet, heisst die Periode von S. In kanonischer Form wird die Substitution dann:

$$\eta' = \varepsilon\eta,$$

wo ε eine Wurzel der Einheit ist.

Es handelt sich nun darum, alle endlichen Gruppen zu bestimmen, welche aus verschiedenen Substitutionen bestehen.

Haben zunächst die Substitutionen einer Gruppe dieselbe quadratische Form, so sind sie die Potenzen einer einzigen. Die Gruppen hingegen, in denen mehrere quadratische Formen vorkommen, lassen sich in 2 Classen eintheilen:

1. Es giebt nur eine quadratische Form, zu welcher die grösste unter die vorhandenen Perioden gehört.

2. Es giebt mehrere quadratische Formen mit der grössten Periode.

Für die 1. Classe von Gruppen ist die grösste Periode > 2; es möge die Substitution S dieselbe haben und S_1 eine andere quadratische Form wie S besitzen. Die Substitution $S_1^{-1}SS_1$ hat dieselbe Periode wie S also auch dieselbe quadratische Form; S_1 hat mithin die Periode 2 und es verschwindet $(a\alpha)^2$.

Die Gruppen 1. Classe bestehen aus $2n$ Substitutionen.

$$S,\ S^2, \ldots S^n,\ S_1S,\ S_1S^2, \ldots S_1S^n$$

schreibt man sie in kanonischer Form, so führen sie η in:

$$\varepsilon\eta,\ \varepsilon^2\eta \ldots \varepsilon^n\eta,\ -\frac{1}{\eta},\ -\frac{\varepsilon}{\eta} \ldots -\frac{\varepsilon^{n-1}}{\eta}$$

über, wo $\varepsilon^n = 1$ ist.

Für die Gruppe der 2. Classe wird zunächst der Werth der höchsten Periode mit Hülfe der Formel 2 ermittelt; für $\varphi = \psi$ wird dieselbe

$$1 + \cos 2\varphi = \cos\Theta + \cos H,$$

sie soll durch Winkel φ, Θ, H gelöst werden, welche zu π in rationalem Verhältniss stehen. Diess geschieht mittelst Unter-

suchungen über Wurzeln der Einheit; sie zeigen, dass nur folgende Lösungssysteme existiren:

$$1 + \cos\pi = \cos\Theta + \cos(\Theta + \pi)$$
$$1 + \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3}$$
$$1 + \cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}$$
$$1 + \cos\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{6}$$

Von der 1. Formel ist nur $\Theta = \frac{\pi}{2}$ zu gebrauchen; die höchste Periode, welche möglich ist, ist 5.

Zu jedem Lösungssysteme gehört nur eine Gruppe von Substitutionen.

Die Form $f = a_x^2$ wähle man willkürlich; sodann berechne man aus der 2. der Formeln 1 die simultane Invariante $(a\alpha)^2 = (f\varphi)^2$, man erhält ihren Werth bis aufs Vorzeichen $\pm\varkappa$, und ebenso für weitere quadratische Formen $\psi, \chi \ldots$ mit der höchsten Periode:

$$(f\psi)^2 = \pm\varkappa, \quad (f\chi)^2 = \pm\varkappa \ldots$$
$$(\varphi\psi)^2 = \pm\varkappa, \quad (\varphi\chi)^2 = \pm\varkappa \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ausserdem ist n. V.

$$(ff)^2 = -2, \quad (\varphi\varphi)^2 = -2 \ldots$$

In der Form φ ist noch ein Coefficient willkürlich und in den folgenden Formen $\psi, \chi \ldots$ die Vorzeichen; man darf sie so wählen, dass

$$(f\varphi)^2 = (f\psi)^2 = (f\chi)^2 \ldots = \varkappa$$

wird. Die Werthe der übrigen Invarianten

$$(\varphi\psi)^2, (\varphi\chi)^2 \ldots.$$

findet man aus den Identitäten, welche zwischen den Invarianten eines Systems von quadratischen Formen bestehen. Aus diesen Werthen lassen sich dann die Formen $\psi, \chi \ldots$ sowohl ihrer Anzahl als ihrem Werthe nach berechnen. — Zu jedem System:

$$\varphi_\infty, \varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_{\mu-1}$$

von Formen mit höchster Periode gehört eine Gruppe von Substitutionen, dieselbe entsteht durch Zusammensetzung der Substitutionen die zu den φ_i gehören. Die Substitutionen der Gruppe führen die $\pm\varphi$ in einander über; jeder Substitution S entspricht eine Substitution U der Indices:

$$\infty \; 0 \; 1 \; 2 \ldots \mu - 1$$

Die Coefficienten von U müssen nach dem Modul μ genommen werden; U ist linear und hat die Determinante 1. Umgekehrt gehören alle linearen Substitutionen, deren Coefficienten $< \mu$ sind und deren Determinante nach dem Modul μ genommen 1 ist, zur Gruppe der U.

Die Periode der U ist dieselbe wie bei den entsprechenden S; um die quadratische Form von S aus U zu erhalten, addirt man die φ, welche durch U in einander übergehen.

Als Resultat erhält man folgende Gruppen in der kanonischen Form:

1. $n = 2$; $\eta, \; -\eta, \; \frac{1}{\eta}, \; -\frac{1}{\eta}$

2. $n = 3$; die Tetraedergruppe

$$\pm\eta, \; \pm\frac{1}{\eta}; \; \pm i\frac{1+\eta}{1-\eta}, \; \pm i\frac{1-\eta}{1+\eta}, \; \pm\frac{i+\eta}{i-\eta}; \; \pm\frac{i-\eta}{i+\eta}$$

3. $n = 4$; die Octaedergruppe:

$$\eta; \; \frac{1}{\eta}; \; \frac{1+\eta}{1-\eta}, \; \frac{1-\eta}{1+\eta}, \; \frac{i+\eta}{i-\eta}, \; \frac{i-\eta}{i+\eta}$$

und ihre Producte mit Potenzen von i.

4. $n = 5$; die Icosaedergruppe:

$$\varepsilon^\mu\eta, \; \frac{-\varepsilon^\mu}{\eta}; \; \varepsilon^\mu\frac{(\varepsilon^2+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon^\varrho}{\varepsilon^{-\varrho}\eta-(\varepsilon+\varepsilon^3)}; \; \varepsilon^\mu\frac{-\varepsilon^{-\varrho}\eta+(\varepsilon+\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon^\varrho}$$

wo $\varepsilon^5 = 1$ und für μ, ϱ alle Zahlen von 0 bis 4 zu setzen sind.

P. Gordan: Ueber bilineare Formen mit verschwindenden Covarianten. (Math. Ann. 12. Bd.)

Herr Fuchs ist bei seiner Untersuchung über die linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit algebraischen Lösungen auf das Problem der Invariantentheorie geführt worden:

„Diejenigen binären Formen aufzustellen, für welche alle Covarianten, die von niedrigerem Grade als die Form selbst sind, identisch verschwinden.“ (Crelles J. Bd. 81).

Hier sind unter Covarianten auch etwaige irrationale inbegriffen. Nimmt man die Terminologie in dem Sinne, in welchem sie z. B. im Clebsch'schen Buche oder in meinen bisherigen Arbeiten gegeben ist, so genügt es, um auf die Lösung des Problems zu kommen, die Aufgabe so zu stellen:

„Diejenigen binären Formen vom Grade n aufzusuchen, für welche:

1. alle Covarianten identisch verschwinden, deren Grad $< n$ ist,
2. keine Covarianten existiren, welche Potenzen von nicht verschwindenden Ausdrücken sind, deren Grad $< n$ ist;

wo übrigens die 2. Bedingung als die erste umfassend betrachtet werden kann.

Da die Formen bis zum 4. Grade incl. bekannt sind, beschränke ich die Untersuchung auf Formen vom Grade $n > 4$. Als Resultat ergeben sich dann nur zwei Formen mit ihren linearen Umformungen, die eine vom 6. und die andere vom 12. Grade, welche allein im Sinne des Herrn Fuchs als Primformen zu bezeichnen sind, nämlich:

$$G_1 = 12 x_1^{11} x_2 + 132 x_1^6 x_2^6 - 12 x_1 x_2^{11}$$
$$G_2 = 6 x_1^5 x_2 + 6 x_1 x_2^5.$$

An diesen beiden Formen sieht man, dass sie lineare Transformationen in sich zulassen. In der That sind sie identisch mit der Icosaeder- und der Octaederform, welche Herr Klein im 9. Bd. Math. Ann. auf geometrischem Wege und ich im 12. Bd. algebraisch vom Standpunkte der Transformationen aus erhalten habe, worüber ich auf mein vorhergehendes Referat verweise.

Der Gang der Untersuchung ist der folgende: zunächst werden diejenigen Formen U gesucht, deren Covarianten 2. Ordnung in den Coefficienten und von niedrigerem Grade als n verschwinden und für welche ausserdem, wenn $n = 4m$ ist, auch noch die 3. Ordnung und von niedrigerem Grade als n verschwinden.

Uebrigens folgt das Verschwinden der letzteren schon aus dem Verschwinden der Covarianten 2. Ordnung (vgl. mein Programm Erlangen 1875). Das Verschwinden der Covarianten 2. Ordnung von $U = a_x^n = b_x^n = c_x^n \dots$ drücke ich durch eine einzige Gleichung aus, welche z. B., wenn n ungerade ist, so lautet:

$$(ab)^{\frac{n+1}{2}} a_x^{\frac{n-1}{2}} b_y^{\frac{n-1}{2}} = 0.$$

Sodann beschäftige ich mich mit Formen p, deren letzte Ueberschiebung über U identisch verschwindet. Es giebt stets solche Formen p von einem Grade $\leqq \frac{n}{2} + 1$. Ich wähle dieselben von möglichst niedrigem Grade; ist dieser $\frac{n}{2} + 1$, so giebt es ∞ viele solcher p,

ich suche mir dann ein solches aus, welches mit U einen Factor gemein hat.*)

Neben der Zahl und dem Verhalten der Invarianten 2. Ordnung von U dient vor Allem der Grad von p, der den Gang des Beweises wesentlich beeinflusst, zur Eintheilung.

Es sei α, wenn der Grad von $p < \frac{n}{2} + 1$ ist, ein beliebiger linearer Factor von p und wenn p vom Grade $\frac{n}{2} + 1$ ist, ein U und p gemeinsamer Factor. Es zeigt sich, dass im Allgemeinen U diesen Factor in einer hohen Potenz $\left(\text{über } \frac{n}{2} \text{ ten}\right)$ enthält, und dass eine Potenz von α Covariante von U wird. Solche Formen U gehören daher nicht zu den gesuchten Formen f. Diese allgemeinen Fälle sind folgende:

1. $n = 2m + 1$
2. $n = 2m$ und Invariante $(f, f)^n = 0$
3. $n = 2m$ und der Grad von $p < \frac{n}{2} + 1$
4. $n = 4m$ und Covariante $(f, f)^{\frac{n}{2}} = 0.$

Daher bleiben für die Untersuchung nur die beiden Fälle übrig:

A. $n = 4m + 2$; $(f, f)^n$ nicht $= 0$; p vom Grade $\frac{n}{2} + 1$

B. $n = 4m$, $(f, f)^{\frac{n}{2}}$ nicht $= 0$; $(f, f)^n$ nicht $= 0$; p vom Grade $\frac{n}{2} + 1$,

die aber verschiedene Behandlung verlangen.

A. Ich zeige zunächst, dass p den Factor α nur quadratisch enthält. Ferner hat dann p einen zweiten Factor s quadratisch, der ebenfalls Factor von U ist und es wird:

$$p = \alpha^2 s^2$$

also $\frac{n}{2} + 1 = 4$ und U vom 6. Grade. Stellt man U als Function von α und s dar, so giebt die Relation:

$$(U, p)^4 = 0$$

die oben angegebene Form G_1.

B. Hier zeige ich zunächst, dass $U = f$ mit der Covariante

*) Die Formen p sind im Allgemeinen dieselben, welche bei der Zerlegung von f in Potenzsummen auftreten.

$(f,f)^{\frac{n}{2}}$ proportional wird und dass die beiden Invarianten von U 2. und 3. Ordnung i und j Potenzen des Proportionalitätsfactors sind; p enthält wieder 2 lineare Factoren α und s von U ebenfalls nur quadratisch und U wird in α und s:

$$f = \binom{n}{1} c_1 \alpha^{n-1} s + \binom{n}{\frac{n}{2}} c_2 \alpha^{\frac{n}{2}} s^{\frac{n}{2}} + \binom{n}{1} c_3 \alpha s^{n-1}.$$

Die Coefficienten c_i und n bestimmen sich aus den früheren Bedingungen, nämlich das Verschwinden der Covarianten 2. Ordnung und vom Grade $< n$. Es wird $n \leq 12$.

Da $n = 4$ ausgeschlossen, so bleiben nur die Fälle zu untersuchen $n = 8$ und $n = 12$. Für $n = 8$ erhält man eine Form, deren Hessische Form das volle Quadrat einer Form 6. Grades ist, die linear aus der Form 6. Grades des Falles A. hervorgeht.

Daher bleibt schliesslich nur die Form 12. Grades G_2.

Erlangen. P. Gordan.

G. Kirchhoff: Zur Theorie des Condensators. (Monatsberichte der Berl. Akademie vom 15. März 1877.)

Ein Condensator, der zu Messungen dienen soll, besteht in seiner gewöhnlichsten und einfachsten Gestalt aus zwei gleichen, kreisförmigen Metallplatten, die nahe bei einander und so aufgestellt sind, dass sie eine gemeinschaftliche Achse haben. Die Aufgabe der Theorie des Condensators ist es, die Elektricitätsmengen anzugeben, die die beiden Platten enthalten, wenn das Potential in ihnen zwei gegebene, verschiedene Werthe besitzt. Nimmt man den Abstand der Platten als unendlich klein an, so werden die Elektricitätsmengen unendlich gross; es ist sehr leicht ihre Werthe zu finden, wenn man sich dabei auf die Glieder höchster Ordnung beschränken will; die Aufgabe wird aber viel schwieriger, wenn die Elektricitätsmengen bis auf unendlich kleine Grössen ermittelt werden sollen. Es ist dieses zuerst durch Hrn. Clausius (Pogg. Ann. Bd. 86) geschehen, jedoch nur unter der Voraussetzung, dass die Dicke der Platten verschwindend klein auch gegen ihren Abstand ist. Hr. Helmholtz hat (Monatsber. der Berl. Akad. vom

23. April 1868) eine Methode kennen gelehrt, die zu dem Resultate des Herrn Clausius führt ohne die beschwerlichen Rechnungen, die dieser durchzumachen hatte; eine Methode, die auf der Theorie der conformen Abbildung eines ebenen Flächenstücks auf einem andern beruht, und die in Verbindung mit der Methode, die Herr Schwartz (Borchardt's Journal Bd. 70) angegeben hat, um irgend ein durch gerade Linien begrenztes, ebenes Flächenstück auf einem andern, durch gerade Linien begrenzten, ebenen Flächenstücke conform abzubilden, erlaubt, auch die Dicke der Condensatorplatten zu berücksichtigen. Es ist dieses in der vorliegenden Notiz durchgeführt. Es sei R der Radius der beiden Platten, $2a$ ihr Abstand, b ihre Dicke, die als von der Ordnung von a angenommen wird; für den Fall, dass die Potentialwerthe in den beiden Platten $+1$ und -1 sind, ergiebt sich dann die Menge positiver Elektricität in der einen und die Menge negativer Elektricität in der andern

$$=\frac{R^2}{4a}+\frac{R}{2\pi}\left(\lg\frac{4\pi(2a+b)R}{ea^2}+\frac{b}{2a}\lg\frac{2a+b}{b}\right),$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Ist das Potential in beiden Platten $+1$, so ist die Menge positiver Elektricität einer jeden

$$=\frac{R}{\pi}.$$

Hiernach findet man auf bekannte Weise leicht die Elektricitätsmengen der beiden Platten für den Fall, dass die Potentialwerthe in ihnen zwei beliebige sind.

Dieselben Methoden, die zu diesen Resultaten geführt haben, gestatten in ähnlicher Weise auch die Theorie eines von Sir W. Thomson angegebenen Condensators zu entwickeln, der dadurch vor dem einfacheren sich auszeichnet, dass bei ihm ein Einfluss äusserer elektrischer Kräfte nicht zu fürchten ist. Es lässt dieser Condensator sich in der folgenden Weise beschreiben: der untere, horizontale Boden einer metallnen, cylindrischen Büchse besteht aus zwei Theilen, einem äusseren, dem sogenannten Schutzringe, und einem inneren, der die Collectorplatte genannt werden möge; unter diesem Boden, in kleinem Abstande von demselben befindet sich eine Metallplatte von gleicher Grösse. Das Potential in dieser sei $=0$, während es in der Büchse und der Collectorplatte $=1$ sei; es handelt sich darum die Elektricitätsmenge der Collectorplatte zu finden. Es sei a der Abstand der Collectorplatte von der unteren Platte, b die Dicke derselben, $2c$ die Breite des ringförmigen

Zwischenraumes zwischen ihr und dem Schutzringe, $R-c$ **endlich** ihr Radius; a, b und c werden als unendlich klein von **derselben** Ordnung angenommen. Es ergiebt sich die Elektricitätsmenge **der** Collectorplatte durch elliptische ϑ-Functionen ausgedrückt. Ihre Berechnung ist im Allgemeinen beschwerlich, da sie die Auflösung verwickelter, transcendenter Gleichungen erfordert; sie wird aber sehr einfach, wenn man b als sehr gross gegen c annimmt und bei einer gewissen Näherung stehen bleibt; man findet dann die Elektricitätsmenge der Collectorplatte

$$= \frac{R^2}{4a} - \frac{R}{\pi}(\beta \operatorname{tg}\beta + \lg\cos\beta + 4q\sin^2\beta),$$

wo

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{c}{a}$$

und

$$-\lg q = 2\left(1 + \frac{\beta}{\operatorname{tg}\beta} + \frac{b}{c}\,\frac{\pi}{2}\right)$$

ist.

Berlin. G. Kirchhoff.

R. Ferrini: Sulla composizione più economica dell' elettromotore capace di un dato effetto.

In questa breve nota, mi sono proposto di mostrare che la condizione che la resistenza di un elettromotore sia eguale a quella del circuito esterno, non basta a fissarne la composizione più utile in vista di un effetto da raccogliersi. Bisogna perciò costituirlo inoltre cosi che l'intensità della corrente che si facesse circolare inoperosa nel medesimo circuito, rappresenti una somma di energía quadrupla del lavoro da produssi, sotto una forma qualsiasi.

Do in seguito le formole relative alla composizione in discorso.

Milano. R. Ferrini.

F. Klein: Ueber lineare Differentialgleichungen. (Math. Annal. XII. p. 167—179.)

In der ersten unter diesem Titel erschienenen Note (Erlanger Berichte 1876, Juni, Math. Annalen XI. p. 115) hatte ich, ausgehend von der Theorie der endlichen Gruppen linearer Transformationen

einer Veränderlichen, gezeigt, dass es nur fünf Typen algebraisch integrirbarer linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten giebt: den Kreistheilungstypus, den Doppelpyramiden-, Tetraeder-, Oktaeder-, Ikosaeder-Typus und hatte diese Differentialgleichungen wirklich aufgestellt. Mit der gegenwärtigen Mittheilung bezwecke ich auch noch keine abschliessende Darstellung, sondern ich füge nur einige Bemerkungen hinzu, die mir wesentlich scheinen. So bespreche ich die Beziehungen der fünf Typen unter einander; ich stelle die betreffenden Differentialgleichungen ohne alle Rechnung auf, indem ich von der Kenntniss des Formensystems der binären Formen mit linearen Transformationen in sich ausgehe; ich bestimme die in der vorigen Mittheilung eingeführte Function $R(x)$ in einigen complicirteren Fällen und dergl. Zum Schlusse gebe ich in expliciter Form eine Liste der für die betreffenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung im Sinne des Herrn Fuchs geltenden Primformen, damit über die Art und die Existenz dieser Primformen kein Zweifel mehr möglich sei.

F. Klein: Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder. (Erlanger Berichte vom November 1876, Januar u. Juli 1877. Mathematische Annalen XII.)

In der Arbeit: *Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich* (Annalen IX), die im ersten Hefte dieses Repertoriums besprochen ist, bin ich zu einem merkwürdigen Zusammenhange geführt worden, der zwischen dem *Ikosaeder* und der *Theorie der Gleichungen fünften Grades* besteht. Angeregt durch Gordan, mit dem ich diese Fragen ausführlich besprach, und im steten Verkehre mit ihm, habe ich es unternommen, diesen Zusammenhang weiter zu verfolgen. Dieser Versuch ist, soviel ich beurtheilen kann, sehr glücklich gewesen. Nicht nur gelang es mir, die mannigfachen algebraischen Resultate, welche Kronecker und Brioschi in dieser wichtigen Theorie zum Theil ohne Beweis publicirt haben, aus einer Quelle naturgemäss abzuleiten, sondern es ergaben sich auch neue, sehr einfache Sätze und Methoden. *Es ist jetzt z. B. möglich die Gleichungen fünften Grades explicite durch fertige Formeln zu lösen, während die bisherigen Methoden wegen ihrer*

*Weitläufigkeit undurchführbare Rechnungen verlangten.**) Ich stehe nicht an, zu erklären, *dass ich das Ikosaeder für den eigentlichen Kern der ganzen Theorie halte;* man hat sich thatsächlich immer mit demselben beschäftigt, ohne es deutlich zu erkennen.

Nachdem ich vorläufig die von mir erhaltenen Resultate in drei in den Erlanger Berichten erschienenen Noten bekannt gemacht hatte, habe ich sie nunmehr in einer grösseren Arbeit zusammengefasst, welche demnächst in den Mathematischen Annalen erscheinen wird. Ohne auf die mannigfachen Gesichtspunkte eingehen zu wollen, welche der Gegenstand mit sich bringt und die ich zum Theil in dieser Arbeit erläutert habe, beschränke ich mich hier auf eine Angabe der hauptsächlichen in ihr abgeleiteten neuen Resultate. Die Arbeit zerfällt in drei Abschnitte.

Der erste Abschnitt behandelt die *Ikosaedergleichung* als solche. Ich bezeichne als solche die Gleichung 60ten Grades:

$$\frac{(-(\eta^{20}+1)+228(\eta^{15}-\eta^5)-494\,\eta^{10})^3}{1728\,\eta^5(\eta^{10}+11\eta^5-1)^5}=X,$$

wo der Nenner der linken Seite gleich Null gesetzt bei geeigneter Interpretation des η auf einer Riemann'schen Kugelfläche ein reguläres Ikosaeder vorstellt, der Zähler das zugehörige Pentagondodekaeder (vgl. Schwarz in Borchardt's Journal Bd. 75 p. 330). Ich charakterisire diese Gleichung durch die 60 linearen Substitutionen $\left(\eta'=\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}\right)$, durch welche sie in sich übergeführt wird; ich entwickele eine Art, sie durch hypergeometrische Reihen zu lösen (vergl. Brioschi in den Annali, 2, t. VIII). Sodann studire ich ihre Resolventen sechsten und fünften Grades, und ohne hier bei Bekanntem zu verweilen (siehe Annalen IX p. 206), bemerke ich, dass es mir gelingt, die allgemeinste Gleichung fünften Grades, bei der die Summe der Wurzeln und die Summe der Wurzelquadrate verschwindet, als Resolvente der Ikosaedergleichung anzuschreiben. Zuletzt betrachte ich noch die Frage nach der rationalen Transformation einer Ikosaedergleichung in eine zweite.

Der zweite Abschnitt bringt eine Theorie derjenigen Gleichungen sechsten Grades, welche ich, einem Vorschlage Brioschi's folgend, als Jacobi'sche Gleichungen bezeichne; es sind diejenigen, deren

---

*) Vergl. namentlich auch die Note: *Ueber die Auflösung der Gleichungen fünften Grades*, welche Gordan im Juli 1877 der Erlanger Societät vorlegte.

sechs Wurzeln z_∞, z_0, $z_1 \ldots z_n$ sich folgendermaassen durch drei Grössen ausdrücken lassen:

$$\sqrt{z_\infty} = A_0\sqrt{5}$$

$$\sqrt{z_\nu} = A_0 + \varepsilon^\nu A_1 + \varepsilon^{-\nu} A_2$$

$$\left(\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}},\ \nu = 0,\ 1 \ldots n\right).$$

Ich zeige, dass diese Gleichungen naturgemäss entstehen, wenn man das simultane System eines Ikosaeders $f = x_1^{11}x_2 + 11x_1^6x_2 - x_1x_2^{11}$ und einer quadratischen Form $q = A_1x_1^2 + 2A_0x_1x_2 - A_2x_2^2$ im Sinne der Invariantentheorie untersucht. In Folge dessen lässt sich, mit Hilfe von $\sqrt{A_0^2 + A_1A_2}$, die Lösung der Jacobi'schen Gleichung in einfachster Weise auf die Lösung einer Ikosaedergleichung explicite zurückführen.

Im dritten Abschnitte beschäftige ich mich mit den Gleichungen fünften Grades, bei denen die Summe der Wurzeln und die Summe der Wurzelquadrate verschwindet. Es seien $y_0 \ldots y_4$ die Wurzeln. Dann hängt, wie ich zeige,

$$\eta = \frac{y_0 + \varepsilon^4 y_1 + \varepsilon^3 y_2 + \varepsilon^2 y_3 + \varepsilon y_4}{y_0 + \varepsilon^3 y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^4 y_3 + \varepsilon^2 y_4}$$

von einer Ikosaedergleichung ab. Ich stelle diese Gleichung wirklich auf und drücke die y rational durch das η aus. — Um nach dieser Methode eine allgemeine Gleichung fünften Grades zu lösen, hat man letztere vorab durch rationale Tansformation auf die Gestalt mit $\Sigma y = 0$, $\Sigma y^2 = 0$ zu bringen. Dabei tritt eine Quadratwurzel auf, von der ich zeige, dass man sie im Allgemeinen nicht entbehren kann (so wenig als die im zweiten Abschnitte gebrauchte $\sqrt{A_0^2 + A_1A_2}$). Eine Folge dieses Nachweises ist der Satz, den Kronecker 1861 in den Berliner Monatsberichten (Borchardt's Jour. Bd. 59) ohne Beweis mittheilte: dass bei den Gleichungen fünften Grades keine allgemeine Resolvente existirt, welche nur einen Parameter enthält.

München. F. Klein.

A. Fliegner: Versuche über das Ausströmen der atmosphärischen Luft durch gut abgerundete Mündungen. (Civilingenieur 1877. 6. Heft.)

Die Arbeit enthält zunächst eine genauere Beschreibung der benutzten, theilweise neuen Apparate und der Beobachtungsmethoden.

Bei den Versuchen kam es darauf an, den Verlauf des Druckes in der Mündungsebene gegenüber dem äusseren und inneren Drucke festzustellen und dann auch die ausgeströmten Luftmengen zu messen. Dabei wurden verschiedene äussere Pressungen hergestellt, auch solche, kleiner wie der Atmosphärendruck. Die Beschaffenheit der Apparate erlaubte es aber nicht, beide Fragen gleichzeitig zu untersuchen, es wurden also je zwei sich in diesen beiden Richtungen ergänzende Versuchsreihen angestellt.

Die Versuche zur Bestimmung der Pressungen haben ergeben, dass zwischen den beiden Quotienten: Druck in der Mündungsebene (p) durch inneren Druck (p_m) und äusserer Druck (p_o) durch inneren Druck (p_m) eine ganz bestimmte, von den absoluten Werthen der Pressungen vollständig unabhängige Beziehung besteht. Das genaue Gesetz dieses Zusammenhanges aufzustellen ist mir noch nicht gelungen, doch kann man dafür mit sehr guter Uebereinstimmung die Hyperbel

$$\frac{p}{p_m} = 0{,}2820 + 0{,}4891\frac{p_o}{p_m} + \sqrt{0{,}0632 - 0{,}2374\frac{p_o}{p_m} + 0{,}2266\left(\frac{p_o}{p_m}\right)^2}$$

substituiren, wobei die angegebenen Coefficienten allerdings nur für Messingmündungen gelten. Es hat sich ferner als vollständig gleichgiltig gezeigt, ob der äussere Raum gross oder klein ist und ob die Luft überhaupt unter dem äusseren Drucke p_o zur Ruhe kommt oder nicht, es ist nur der Druck unmittelbar um den austretenden Strahl von Einfluss. Einen Einfluss der Temperatur war ich nicht im Stande zu erkennen. Für $\frac{p_o}{p_m} = 0$ wird $\frac{p}{p_m} = 0{,}5334$, weiterhin ist stets $\frac{p}{p_m} > \frac{p_o}{p_m}$, bis schliesslich mit $p = p_o = p_m$ die empirische Formel gegenstandslos wird. Für Luft und eine gut abgerundete Mündung ist also das Gesetz bewiesen: dass *beim Ausströmen einer Flüssigkeit in einen mit gleichartiger Flüssigkeit gefüllten Raum der Druck in der Mündungsebene stets grösser ist, als der in der ruhenden Flüssigkeit vor der Mündung.* Versuche über den Ausfluss von Wasser unter Wasser durch eine gut abgerundete

Mündung haben dieses Gesetz auch bestätigt. Ich halte es für ganz allgemein geltend.

Bezeichnet für die Nachrechnung der Versuche über *Ausflussmengen*

p_m, T_m den mittleren constanten Zustand innen,

p den mittleren constanten Druck in der Mündungsebene,

F den Mündungsquerschnitt,

$\varkappa$ den Exponenten der adiabatischen Curve (1,41),

pv^n = Const. das Gesetz, nach welchem die Luft beim Hinströmen nach der Mündung ihren Zustand ändert, und zwar unter Berücksichtigung von Widerständen nach Zeuner,

so wird das pro Secunde im Mittel ausgeströmte Luftgewicht bekanntlich

$$G = Fp_m \sqrt{\frac{2g}{RT_m} \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \left[\left(\frac{p}{p_m}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p}{p_m}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right]}.$$

Hierin ist G leicht aus den Versuchen berechenbar; p_m ist auf graphischem Wege bestimmt worden und zwar durch Notirung einiger Werthe der abnehmenden inneren Pressung mit den zugehörigen Zeiten; für T_m wurde das arithmetische Mittel aus der Anfangs- und Endtemperatur genommen; $\frac{p}{p_m}$ konnte auf graphischem Wege aus den zugehörigen Druckversuchen interpolirt worden. Die einzige in diesem Ausdrucke noch unbekannte Grösse n lässt sich dann auch ermitteln, natürlich nur auf dem Wege des Probirens. Sie hat sich mit genügender Genauigkeit ergeben zu

$$n = 1{,}37 = \text{Const.},$$

allerdings auch nur für eine *Messingmündung* geltend. Ferner zeigen die Versuche, dass, constanten inneren Zustand vorausgesetzt, mit abnehmendem äusserem Drucke G stetig wächst und mit $p_0 = 0$ sein Maximum erreicht; der sich dann einstellende Werth von $\frac{p}{p_m} = 0{,}5334$ macht gleichzeitig die eckige Klammer unter der Wurzel in dem Ausdrucke für G zu einem Maximum.

Da die Berechnung von G nach den angegebenen Formeln eine sehr umständliche ist, so habe ich Näherungsformeln dafür aufzustellen gesucht. Danach kann man mit bei allen praktischen Rechnungen vollkommen genügender Genauigkeit setzen für:

$$\frac{p_o}{p_m} < 0{,}5 \qquad \frac{G}{F} = 3800 \frac{p_m}{\sqrt{T_m}},$$

$$\frac{p_o}{p_m} > 0{,}5 \qquad \frac{G}{F} = 7600 \sqrt{\frac{p_o\,(p_m - p_o)}{T_m}},$$

wobei die Pressungen in *Atmosphären* einzuführen sind.

Aus dem bekannten Exponenten n findet sich der von **Zeuner** auch für Luft eingeführte *Widerstandscoefficient* ζ für den vorliegenden Fall zu:

$$\zeta = 0{,}0767.$$

Da er bei *Wasser* nur 0,063 ist, so führte mich das auf die Vermuthung, dass die Erniedrigung des Exponenten der Expansionscurve von x auf n nicht allein von den eigentlichen Widerständen herrühre, sondern, und vielleicht sogar zum grössten Theile, von einer *Wärmemittheilung seitens der Mündungswandungen an die vorbeiströmende Luft*. Dadurch würde, wie durch Rechnung gezeigt ist, der Widerstandscoefficient ζ reducirt werden.

Eine solche Wärmemittheilung ist jedenfalls wesentlich mit abhängig von dem inneren Wärmeleitungsvermögen des Materials, aus welchem die Mündung hergestellt ist. Ein schlechterer Wärmeleiter müsste, wie nachgewiesen wird, n vergrössern. Zur Entscheidung dieser Frage sind noch einige Mündungen, von *Buchsbaumholz* untersucht. Dieselben haben wirklich n grösser ergeben, nämlich

$$n = 1{,}395.$$

Ohne Annahme von Wärmemittheilung würde damit

$$\zeta = 0{,}0269$$

werden. Nimmt man dagegen umgekehrt an, es seien die eigentlichen Widerstände verschwindend klein, also $\zeta = 0$, so kommt man doch bei Messing und Holz auf eine Abkühlung der Mündungen, die durchaus nicht ausserhalb der Grenzen der Möglichkeit oder Wahrscheinlichkeit liegt. Jedenfalls ist damit ein bedeutender Einfluss der Wärmemittheilung wenigstens für Messing constatirt, wenn auch der numerische Betrag derselben nicht zu ermitteln geht.

Am Schlusse ist noch gezeigt, dass die Correctur der Formel für G mittelst des sogenannten *Ausflussquerschnittes* sachlich nicht haltbar ist, da man damit auf innere Widersprüche stösst. Endlich, dass es nicht angeht, die Versuche unter Annahme einer adiabatischen

Zustandsänderung im Innern nachzurechnen; die Wärmemittheilung von den Gefässwandungen an die sich mit abnehmendem Drucke auch abkühlende Luft ist zu gross, um ganz vernachlässigt werden zu dürfen.

Zürich. A. Fliegner.

A. Favaro: Intorno ad uno strumento ordinato a calcolare i risultati d'osservazione ottenuti mediante apparecchi autografici. (Venezia, tip. Grimaldo e C., 1876.)

Si venne ripetutamente osservando che il planimetro potrebbe essere assai utilmente adoperato nella determinazione dei valori medii da dedursi da quelle rappresentazioni grafiche che così in gran numero vengono somministrate dagli strumenti autoregistratori, usati specialmente negli osservatorî meteorologici. E per verità la determinazione di medie in tali casi potrebbe ottenersi con tutta facilità, ricorrendo anche a strumenti più semplici degli stessi planimetri.

Senonchè questi valori medii non costituirebbero per loro medesimi, che un risultato assai meschino delle osservazioni meteorologiche, le quali per lo contrario possono e devono nel loro insieme essere utilizzate con intendimenti affatto diversi. Un passo notevole in questo senso consiste nella rappresentazione delle variazioni meteorologiche mediante serie periodiche della forma:

$$f(t) = A_0 + A_1 \cos \mu t + A_2 \cos 2\mu t + \ldots + B_1 \operatorname{sen} \mu t + B_2 \operatorname{sen} 2\mu t + \ldots$$

denotando con μ, A, B delle costanti, con t il tempo.

Quanto ai coefficienti A, $B \ldots$ questi si trovano mediante calcoli la cui complicazione va rapidamente aumentando col numero dei termini che si pigliano a considerare. Ad ogni modo i singoli divarii esercitano una influenza assai notevole sul valore dei primi termini, mentre, procedendo nel calcolo, i termini successivi possono soltanto risentirsene. A ciò potrebbe tuttavia ovviarsi colla applicazione d'uno strumento mediante il quale i detti coefficienti potessero dedursi meccanicamente dalle rappresentazioni grafiche dei fenomeni periodici: con questo sarebbe nel tempo istesso offerta l'opportunità di approfittare in proporzioni molto maggiori della trattazione analitica.

Nel seguito della nota è data la descrizione e trovasi esposta la teoria di uno strumento a tale uopo proposto dal prof. **Amsler** inventore del planimetro polare e di quello dei momenti.

A. Favaro: Intorno alla soluzione grafica di alcuni problemi pratici dipendenti dalla teoria delle probabilità. (Venezia, tip. Antonelli, 1877.)

In questa circostanza l'Autore si occupa di una nota dell' ingegnere Fouret, già favorevolmente conosciuto nelle sfere scientifiche per altri suoi studi intorno a cosiffatti argomenti, nella quale egli si propone di determinare e rappresentare graficamente le tariffe di assicurazione sulla vita e le condizioni di ammortizzazione dei prestiti.

Basando la applicazione sul sistema costituito dal poligono delle forze e dal poligono funicolare per un certo numero di forze parallele date in un piano, abbiasi un sistema di quattro forze $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{p}_4$ ed essendosene determinata, mediante il poligono delle forze, la risultante $\mathbf{p}$ in intensità, direzione e senso, e mediante il poligono funicolare in posizione, chiamati inoltre p_1, p_2, p_3, p_4, p i bracci di leva rispettivi delle forze e della risultante, rapporto ad un punto qualunque, si ottiene:

$$\frac{\mathbf{p}_1 p_1 + \mathbf{p}_2 p_2 + \mathbf{p}_3 p_3 + \mathbf{p}_4 p_4}{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4} = \frac{\Sigma \mathbf{p} p}{\Sigma \mathbf{p}}.$$

Per la qual cosa ogniqualvolta in una determinata indagine venisse a presentarsi una grandezza definita mediante una relazione di questa forma, la si potrà immediatamente costruire, ricorrendo all' accennato sistema del poligono delle forze e del poligono funicolare.

L'autore osserva poi, che per la costruzione della accennata formula non vi è menomamente bisogno di costruire un poligono funicolare propriamente detto e quale viene ordinariamente esposto nei manuali di statica grafica, non solo, ma non vi è neppur bisogno di introdurre il concetto di forza e di momento, potendosi raggiungere lo scopo colle semplici nozioni del calcolo grafico, approfittando del cosidetto *poligono di moltiplicazione.* Segue la deduzione della formula ricavata da una tavola di mortalità e la sua costruzione grafica.

A. Favaro: Sulla teoria dei poligoni funicolari secondo Lamé e Clapeyron nei suoi rapporti coi metodi della Statica grafica. (Venezia, tip. Antonelli, 1877.)

Questa nota costituisce sotto un certo punto di vista un complemento d'un altro lavoro pubblicato dal medesimo Autore quattro anni prima, sotto il titolo: *La Statica grafica nell' insegnamento tecnico superiore* (Venezia, tip. Grimaldo e C. 1873) e nel quale egli espose le sue vedute intorno alle origini, ai metodi ed allo scopo del nuovo corpo di dottrine creato dal celebre professore di Zurigo.

Sulle traccie della teoria dei poligoni funicolari data da Lamé e Clapeyron l'autore fa posto da un cenno di poche linee del *Bulletin* di Férussac del 1829.

Nella succinta introduzione prende le mosse dal triangolo delle forze (scoperta indubbia dello Stevino), triangolo delle forze che mentre costituisce da un lato il postulato della Statica grafica, forma dall' altro il punto di partenza delle costruzioni grafiche interessantissime, alle quali pervennero contemporaneamente gli ingegneri inglesi ed americani, approfittando delle proprietà inerenti alla reciprocità delle figure. Per verità non mancano gli storici i quali vogliono riconoscere il triangolo delle forze per la prima volta nelle opere del Varignon, ma ciò non è esatto, bensì deve riconoscersi a quest' ultimo matematico la priorità nell' uso del poligono delle forze, il quale anche oggidì è chiamato in Francia col nome di *poligono ausiliario di Varignon.*

I rapporti fra il poligono delle forze ed il poligono funicolare semplicemente sbozzati nella *Nouvelle Mécanique* di Varignon, trovarono uno sviluppo quasi completo nella memoria di Lamé e Clapeyron: ed è questa appunto la circostanza che la rende di altissimo interesse. Perciocchè, se nella anzidetta memoria non si contiene effettivamente alcuna di quelle applicazioni, le quali più tardi appalesarono in tutta la loro pienezza la potenza dei nuovi metodi, pure e l'argomento pratico che diede occasione a tale studio, e il modo di trattazione e finalmente le conseguenze che se ne fanno immediatamente derivare mostrano che Lamé e Clapeyron avevano perfettamente compreso il partito che poteva trarsene nella scienza dell' ingegnere.

Infine l'autore ha voluto approfittare di questa medesima occasione per mettere in evidenza come molto tempo prima che le

proprietà del poligono funicolare venissero utilizzate per la composizione grafica delle forze, il Michon ne aveva esplicitamente approfittato con applicazione immediata alla determinazione della curva delle pressioni nelle vôlte.

A. Favaro: Intorno ad un recente lavoro del Dr. Cantor sugli agrimensori romani. (Bullettino di Bibl. e Storia delle Scienze Mat. e Fis. Roma, 1876.)

È una recensione dell' opera ben nota: *Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst* (Leipzig, Teubner 1875), nella quale occasione pertanto l'autore ottenne dal Principe D. B. Boncompagni la pubblicazione della vita di „Herone Mecanico" contenuta nel mss. autografo di Bernardino Baldi dal medesimo Principe posseduto.

A. Favaro: Niccolò Copernico e l'Archivio Universitario di Padova. (Bullettino di Bibl. e Storia delle Scienze Mat. e Fis. Roma, 1877.)

Questa nota, sotto la forma di lettera diretta al Principe D. Baldassarre Boncompagni, contiene la relazione di indagini istituite nell' Archivio dell' Università di Padova, allo scopo di accertare se vi si conservi qualche traccia del passaggio di Niccolò Copernico.

È noto che dei molti storiografi dello Studio di Padova, il solo Papadopoli asserisce che Copernico ne sia stato alunno e che vi abbia conseguita la laurea in filosofia e medicina.

L'Autore espone con ogni particolare le ricerche fatte e conchiude:

I°. *Dall' Archivio Universitario di Padova non risulta in alcun modo che Niccolò Copernico sia stato inscritto fra gli studenti dell' Archiginnasio padovano.*

II°. *Quand' anche il Copernico fosse stato fra gli studenti della Università di Padova nei tre o quattro anni che precedono o susseguono il 1500, le condizioni attuali dell' Archivio non permetterebbero di constatarlo.*

III°. *Assai probabilmente è da ritenersi erronea l'asserzione ch'egli abbia nella Università di Padova ottenuto il grado di dottore in medicina e filosofia.*

L'autore poi in base alle notizie contenute in un manoscritto attualmente posseduto dalla Biblioteca della Università di Padova, crede di poter asserire che i documenti sui quali si appoggia il Papadopoli, seppure hanno esistito, non si trovavano nell' Archivio nemmeno nel 1760.

Nel corso della nota poi l'autore si è di deliberata intenzione mantenuto estraneo alle molte questioni che tuttora si agitano intorno alla biografia di Copernico, limitandosi esclusivamente all' argomento specificato nel titolo della nota.

A. Favaro: Intorno ad alcuni lavori sulla storia delle scienze matematiche e fisiche recentemente pubblicati dal prof. Sigismondo Günther. (Venezia, tip. Antonelli, 1877.)

Nella presente occasione l'autore non ha avuto semplicemente in vista di occuparsi dei lavori del prof. Günther, già tanto benemerito della storia delle scienze matematiche e fisiche, ma si è altresì prefisso di mostrare con quanto ardore la storia delle scienze venga coltivata in Germania, non tacendo come essa annoveri anche in Italia buon numero di cultori, alla cui testa si trova l'infaticabile D. Baldassarre Boncompagni.

D'accordo completamente col Günther nelle varie questioni da esso trattate, non accetta tuttavia l'autore le conclusioni alle quali il matematico tedesco perviene relativamente allo svolgimento storico del pendolo come strumento misuratore del tempo. Anzi per ciò che si riferisce alla parte che in tale questione deve essere fatta a Galileo ed alla sua scuola, l'autore ha raccolto nuovi documenti, che produrrà in luce in una memoria, alla quale sta già attendendo.

A. Favaro: Intorno ad uno scritto su Andalò di Negro pubblicato da D. B. Boncompagni. (Padova, tip. G. B. Randi, 1876.)

È questa una comunicazione fatta dall' autore alla R. Accademia di Scienze, lettere ed arti di Padova intorno ad un lavoro di Cornelio de Simoni sopra Andalò di Negro matematico ed

astronomo genovese del secolo decimoquarto e ad un elenco dei suoi lavori compilato per cura di D. B. Boncompagni. Da questo elenco redatto colla cura consueta, risulta che il Mecenate romano portò a conoscenza molti lavori di Andalò di Negro che erano rimasti sconosciuti ai biografi di lui. L'autore mette in evidenza come un tale risultato rivesta un carattere di singolare importanza, ove si rifletta che si riferisce ad un' epoca, nella quale i matematici italiani furono in grandissimo numero, nè mai venne giustamente apprezzato il merito ch' essi seppero acquistarsi, contribuendo al perfezionamento dell' algebra e dell' astronomia e preparando le meravigliose scoperte che due secoli più tardi furono fatte in Italia in ogni ramo delle matematiche pure ed applicate.

Padova. A. Favaro.

H. Grassmann: Die Mechanik nach den Prinzipien der Ausdehnungslehre. (Mathematische Annalen XII. S. 222.)

Die Begriffe der Ausdehnungslehre (von 1862), welche in dieser Abhandlung benutzt sind, sind der Begriff der Strecken (n. 216, b) und ihrer Addition (n. 220), ferner des äusseren oder combinatorischen Produktes zweier (n. 254) oder dreier Strecken (n. 262), ferner des inneren Produktes zweier Strecken (n. 188) und endlich der Begriff des partiellen Differenzialquotienten einer algebraischen Function f von Punkten $x_1, x_2 \ldots$ in Bezug auf einen derselben z. B. $\frac{\partial}{\partial x_1} f$ (n. 436 ff.). Aus diesen Begriffen werden nun theils die allgemeinen Gesetze der Mechanik, theils besondere Gesetze, namentlich die der Ebbe und Fluth abgeleitet. Ist nämlich x die Strecke, die von einem willkürlichen, aber festen Punkte nach dem sich bewegenden gezogen ist, und die also diesen Punkt selbst zur Darstellung bringt und wird der vollständige Differenzialquotient nach der Zeit mit δ bezeichnet, so stellt δx die Geschwindigkeit, $\delta^2 x$ die Beschleunigung des Punktes x ihrer Grösse und Richtung nach dar. Ist nun p die Kraft oder die geometrische Summe der Kräfte, die auf den Punkt x, dessen Masse als 1 gesetzt wird, wirken, so erhält man

(1) $\delta^2 x = p$ (Bewegung des einzelnen Punktes).

Hat man einen Verein von Punkten, deren Massen, ohne der Allgemeinheit zu schaden, 1 gesetzt werden können, so hat man in

Bezug auf den Verein äussere und innere (zwischen den Punkten des Vereins wirkende) Kräfte zu unterscheiden. Die geometrische Summe der inneren Kräfte (d. h. die Summe der als Strecken gedachten Kräfte dieser Art) ist null. Besteht nun der Verein aus m solchen Punkten, so dass also m die Masse des Vereins ist, so hat man nach dem Obigen die m Gleichungen $\delta^2 x_1 = p_1, \ldots \delta^2 x_m = p_m$. Stellt nun s den Schwerpunkt des Vereins dar, d. h. ist $x_1 + \ldots x_m = ms$, so erhält man durch Addition jener m Gleichungen unmittelbar

(2) $m\delta^2 s = p$ (Bewegung des Schwerpunktes),

wo p die geometrische Summe der äusseren Kräfte ist. Setzen wir nun in obigen m Gleichungen $x_1 = s + y_1$ u. s. w., $x_m = s + y_m$ und statt $\delta^2 s$ den gefundenen Werth $\frac{1}{m}p$, so erhalten wir

(3) $$\delta^2 y_1 = p_1 - \frac{1}{m}p \ldots, \delta^2 y_m = p_m - \frac{1}{m}p$$

(Bewegung in Bezug auf den Schwerpunkt).

Multiplicirt man die Gleichung (1) äusserlich mit x, also $[x\delta^2 x] = [xp]$, so kann man statt $[x\delta^2 x]$ auch $\delta[x\delta x]$ schreiben, weil $[\delta x \,.\, \delta x]$ nach den Gesetzen der äusseren Multiplication null ist, und wendet man dies auf die m Gleichungen des Vereins an und addirt, so erhält man

(4) $$\delta\Sigma[x\delta x] = \Sigma[xp]$$

(Flächenbewegung in Bezug auf einen festen Punkt).

Auch hierbei heben sich die inneren Kräfte weg. Multiplicirt man ebenso die Gleichungen (3) äusserlich mit $y_1 \ldots . y_m$ und addirt, so heben sich, da $y_1 + \ldots y_m$ nach dem Begriff des Schwerpunkts null ist, die negativen Glieder fort und es wird

(5) $$\delta\Sigma[y\delta y] = \Sigma[yp]$$

(Flächenbewegung in Bezug auf den Schwerpunkt).

Die Gleichung (1) innerlich mit δx multiplicirt, giebt zunächst $[\delta^2 x \mid \delta x] = [p \mid \delta x]$; aber es ist $[\delta^2 x \mid \delta x] = \frac{1}{2}\delta[\delta x \mid \delta x]$ und wendet man dies auf die m Gleichungen des Vereins an und addirt, so erhält man

(6) $\delta\Sigma\frac{1}{2}[\delta x \mid \delta x] = \Sigma[p \mid \delta x]$ (Arbeitsgleichung).

Ich habe gezeigt, dass die einfache Kraft p_{21}, mit der ein Punkt x_2 auf einen andern x_1 wirkt, eine Function $f(r)$ der gegenseitigen Entfernung r der beiden Punkte sei und in der Richtung $x_1 - x_2$ liege, ferner dass, wenn U_{12} das Integral von $fr.dr$ ist, dann $p_{21} = \frac{\partial}{\partial x_1}U_{12}$, und $p_{12} = \frac{\partial}{\partial x_2}U_{12}$ sei. U_{12} heisst das Potenzial zwischen den Punkten x_1 und x_2. Ist nun V die Summe aller Potenziale zwischen je zwei

Punkten des Vereins, also das vollständige innere Potenzial, und ist U das gesammte äussere Potenzial, d. h. die Summe der Potenziale zwischen je einem äusseren und inneren Punkte, so verwandelt sich die Gleichung (6) in

$$(7)\quad \tfrac{1}{2}\Sigma[\delta x \mid \delta x] = V + \int \Sigma\left[\frac{\partial}{\partial x} U \mid \delta x\right] \text{ (Potenzialgleichung).}$$

Die Art, wie sodann die Beschränkungen in der Bewegung eines Vereins auf Potenziale zurückgeführt werden, ist von der gewöhnlichen Darstellung nicht wesentlich verschieden. Dagegen ist ganz neu der Begriff der mittleren Integration der Bewegungsgleichungen und seine Anwendung auf die Theorie der Ebbe und Fluth. Mittlere Integration der Bewegungsgleichungen nenne ich diejenige, bei welcher die Beweglichkeit des Vereins am geringsten ist, und die so hervorgehende Bewegung nenne ich mittlere Bewegung. Bei der Theorie der Ebbe und Fluth wird nur diese letztere gesucht. Um die Resultate einfach aussprechen zu können, habe ich den Begriff des elliptischen Gliedes aufgestellt. Ich nenne nämlich $a \cos xt + b \sin xt$, wo a und b beliebige Strecken, x eine beliebige Zahl und t die Zeit ist, ein elliptisches Glied mit dem Zeiger x. Es stellt nämlich dies Glied eine Strecke dar, die an einen festen Punkt gelegt, eine Ellipse in der Zeit $\frac{2\pi}{x}$ nach einem sehr einfachen Gesetz durchläuft.

Es ergeben sich dann folgende zwei Sätze:

„Wenn die Bewegung eines Vereins von Punkten durch lineare Differenzialgleichungen dargestellt wird, so entsprechen bei der mittleren Bewegung den elliptischen Gliedern, welche in dem Ausdruck der Kraft vorkommen, elliptische Glieder von denselben Zeigern in allen Strecken, welche von einem festen Punkte nach den beweglichen Punkten gezogen sind, und zwar sind die Coefficienten dieser Glieder durch die gegebenen Gleichungen vollkommen bestimmt."

Für die Theorie der Ebbe und Fluth lautet der Satz:

„Die Bewegung, welche jeder Punkt des Meeres bei der Ebbe und Fluth vollendet, ergiebt sich in erster Annäherung als Interferenz von vier elliptischen Bewegungen, von denen zwei dieselbe Umlaufszeit haben, wie die scheinbare Umlaufszeit der Sonne und des Mondes beträgt und die zwei anderen eine halb so grosse Umlaufszeit."

Stettin. H. Grassmann.

A. Mayer: Die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale in den isoperimetrischen Problemen.

(Ber. d. Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 1877. p. 114—132.)

Nach der Euler'schen Regel wird das isoperimetrische Problem, die den m Bedingungen:

$$V_\varkappa = \int_{x_0}^{x_1} f_\varkappa(x, y_1, \ldots y_n, y'_1, \ldots y'_n)\, dx = l_\varkappa, \ \varkappa = 1, 2, \ldots m$$

unterworfenen Functionen $y_1, \ldots y_n$ von x so zu bestimmen, dass das gegebene Integral

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, \ldots y_n, y'_1, \ldots y'_n)\, dx$$

einen relativ grössten oder kleinsten Werth erhalte, in der Weise gelöst, dass man zunächst ganz so verfährt, als ob es sich darum handelte, das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} (f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m)\, dx,$$

in welchem die λ unbestimmte Constanten sind, zu einem absoluten Maximum oder Minimum zu machen, und hinterher diesen Constanten diejenigen Werthe beilegt, welche sich aus den Bedingungen $V_\varkappa = l_\varkappa$ ergeben.

Die beiden genannten Probleme werden hiernach jedenfalls durch dieselben Functionen y gelöst. Man darf aber durchaus nicht, wie dies doch gewöhnlich geschieht, auch in Betreff der Frage, ob und innerhalb welcher Grenzen diese Functionen ein wirkliches Maximum oder Minimum erzeugen, das erste, relative Problem durch das zweite, absolute ersetzen. Man überzeugt sich vielmehr leicht an solchen Beispielen, in denen sich diese Frage unmittelbar durch geometrische oder mechanische Betrachtungen entscheiden lässt, dass im Allgemeinen die Kriterien des Maximums und Minimums in beiden Problemen unmöglich dieselben sein können. So würde sich z. B. aus der Annahme, dass beide Probleme völlig identisch wären, für die Aufgabe der Gleichgewichtsfigur eines homogenen, schweren Fadens das absurde Resultat ergeben, dass nicht bei jeder Lage der Aufhängungspunkte der Fadenschwerpunkt wirklich die tiefstmögliche Stelle einnimmt. Es fragt sich daher, welches sind die wahren Kriterien des Maximums und Minimums in den isoperimetrischen Problemen?

Nun hat der Verfasser in Borchardt's J. B. 69 die Kriterien des Maximums und Minimums allgemein für diejenige Aufgabenform entwickelt, auf welche sich jedes Problem der Variationsrechnung, in welchem nur einfache Integrale auftreten, zurückführen lässt. Aus diesen allgemeinen Kriterien des Maximums und Minimums müssen sich daher nothwendig auch die besonderen Kriterien der isoperimetrischen Probleme ableiten lassen.

Diesen Gedanken führt der vorliegende Aufsatz aus und gelangt hierdurch zu Resultaten, die mit denjenigen Regeln übereinstimmen, welche, auf völlig anderem und wohl entschieden nicht immer ganz strengem Wege, bereits 1869 von Lundström (Nova Acta Upsal. Ser. 3. Vol. VII) erhalten wurden.

Die auf diese Weise gewonnenen Kriterien werden dann noch an dem Reciprocitätsgesetze der isoperimetrischen Probleme geprüft und schliesslich an dem oben erwähnten Fadenprobleme erläutert, für welches sie das richtige Resultat ergeben.

Leipzig. A. Mayer.

Sophus Lie: Theorie der Transformationsgruppen. I, II. (Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Bd. I, 1876. p. 19—58 und p. 152—202.)

Eine Schaar Transformationen

$$x'_i = f_i(x_1 \dots x_n \; a_1 \dots a_r)$$

bilden eine Gruppe, wenn die Succession zweier Transformationen der Schaar mit einer einzigen Transformation derselben Schaar äquivalent ist. Der Verfasser hat sich die schwierige Aufgabe gestellt, alle Gruppen von Transformationen zu bestimmen.

Die erste Abhandlung löst diese Aufgabe für den Fall $n = 1$. Es wird gezeigt, dass die Gruppe höchstens drei Parameter $a_1 \; a_2 \; a_3$ enthält, ferner dass sie durch passende Wahl der Variabeln in eine lineare Gruppe übergeführt werden kann.

Die zweite Abhandlung behandelt den allgemeinen Fall und entwickelt eine Reihe allgemeiner Sätze. Unter denselben mögen hier nur die folgenden hervorgehoben werden. Jede Gruppe mit r Parametern enthält r unabhängige infinitesimale Transformationen; in Folge dessen enthält sie insbesondere auch eine identische

Transformation. Zu gegebenen Werthen von n und r gehören nur eine begrenzte Zahl Typen von Transformationsgruppen.

Weitere Abhandlungen werden einerseits den Fall $n = 2$ erledigen, andererseits diese Untersuchungen für die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen verwerthen.

Sophus Lie: Résumé einer neuen Integrationstheorie. (Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Bd. I, 1876. p. 335—365.)

—— **Verallgemeinerung und neue Verwerthung des Jacobi'schen Multiplicators.** (Christiania Videnskabs-Selskab 1874.)

—— **Discussion aller Integrationsmethoden der partiellen Differentialgleichungen 1. O.** (Christiania Videnskabs-Selskab 1875.)

—— **Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O., II.** (Math. Annalen. Bd. XI, p. 464—557.)

Die letzte Abhandlung, deren Resultate sich grösstentheils schon in den drei ersten Arbeiten finden, zerfällt in drei Abschnitte.

Sei $f_1 = a_1 \ldots\ldots f_q = a_q$ ein vorgelegtes Involutionssystem in den Variabeln $x_1 \ldots x_n\, p_1 \ldots p_n$ und seien $f_{q+1} \ldots f_r$ bekannte Lösungen von

$$(1) \qquad (f_1 f) = 0 \;\ldots\ldots (f_q f) = 0.$$

Es giebt einen sehr allgemeinen Fall, dessen Grenzfälle allein früher bekannt waren, in dem man die fehlenden Lösungen des Systems (1) durch ausführbare Operationen bestimmen kann.

Giebt es in der That Functionen $F_1 \ldots F_r \Omega$, welche die Gleichung

$$(2) \qquad \Sigma p dx = F_1 df_1 + \ldots + F_q df_q + \ldots + F_r df_r + d\Omega$$

befriedigen, so sind $F_{q+1} \ldots F_r$ die fehlenden Lösungen von (1), während Ω die Gleichungen

$$[f_1, z - \Omega] = 0 \;\ldots\ldots [f_q, z - \Omega] = 0$$

erfüllt. Besteht überhaupt eine Relation der Form (2), so verlangt die Bestimmung von Ω und den $F_\varkappa$ nur eine einzige Quadratur zusammen mit gewissen Differentiationen. Hiermit ist die Integration des vorgelegten Involutionssystems geleistet.

Setzt man $q = 1$, $r = 2n - 2$, so erhält man Jacobi's Bestimmung der letzten Lösung der Gleichung $(f_1 f) = 0$ vermöge des letzten Multiplicators, wobei doch zu bemerken ist, dass die neue Theorie in diesem Falle eine Quadratur erspart.

Setzt man andererseits $r = n$ und setzt ausserdem voraus, dass $f_1 \ldots f_n$ hinsichtlich $p_1 \ldots p_n$ unabhängig sind, so erhält man einen zweiten bekannten Jacobi'schen Satz.

Ist $f_1 \ldots f_s$ eine vorgelegte Gruppe mit m unbekannten ausgezeichneten Functionen $\Omega_1 \ldots \Omega_m$, so ist es immer möglich ein vollständiges System in den Variabeln $x\,p$ aufzustellen, dessen Lösungen zugleich die Lösungen des Systems

$$(\Omega_1 F) = 0 \;\ldots.\; (\Omega_m F) = 0$$

sind.

Durch Verbindung dieser beiden neuen Theorien erhält man das folgende fundamentale Theorem: Sei $f_1 = a_1 \ldots f_q = a_q$ ein vorgelegtes Involutionssystem und seien $f_{q+1} \ldots f_s$ bekannte Lösungen des Systems $(f_1 f) = 0 \ldots (f_q f) = 0$. Enthält nun die Gruppe $f_1 \ldots f_q \ldots f_s$ ausser $f_1 \ldots f_q$ noch m ausgezeichnete Functionen, so verlangt die Integration des vorgelegten Involutionssystems im ungünstigsten Falle nur noch die Operationen

$$2n - q - m - s,\; 2n - q - m - s - 2 \ldots 6,\; 4,\; 2.$$

Hieraus folgt insbesondere, dass die Bestimmung von $2m + 1$ fehlenden Lösungen des Systems $(f_1 f) = 0 \ldots (f_q f) = 0$ nicht schwieriger als diejenige von $2m$ fehlenden Lösungen ist. Setzt man in diesem Corollar $m = 0$, so erhält man wiederum den Jacobi'schen Satz, dass die Bestimmung der letzten Lösung eine ausführbare Operation ist.

Diese Integrations-Theorien dehnen sich mit gewissen Aenderungen auf solche Gleichungen aus, welche die unbekannte Function explicite enthalten.

Der zweite Abschnitt behandelt die Integration von vollständigen Systemen. Dabei wird vorausgesetzt, dass gewisse infinitesimale Transformationen, welche das betreffende vollständige System invariant lassen, von vorn bekannt sind. Es wird gezeigt, dass dieser Umstand immer eine wesentliche Vereinfachung in dem Integrationsgeschäft bewirkt. Unter den neuen Theorien, die zu diesem Zwecke entwickelt werden, möge hier nur die Ausdehnung des Jacobi'schen Multiplicatorsbegriffs auf vollständige Systeme erwähnt werden.

Der dritte Abschnitt stellt die Frage, ob es denkbar ist, dass

die jetzigen Integrationsmethoden der partiellen Differentialgleichungen 1. O. künftig einmal durch noch einfachere ersetzt werden. Um diese Frage zu präcisiren, wird zunächst festgestellt, dass man bei der Vergleichung zweier Integrationsoperationen nur auf die Integrationsoperationen, dagegen nicht auf die sogenannten ausführbaren Operationen (d. h. Differentiationen, Quadraturen und Eliminationsoperationen) Rücksicht nehmen soll. Darnach werden die beiden folgenden Axiome aufgestellt:

1) Die Integration der *allgemeinen* Gleichung $f\left(x\, y\, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ lässt sich nicht durch ausführbare Operationen leisten.

2) Die einfachste Integrationsmethode der Gleichung

$$f(x_1 \ldots x_n\, p_1 \ldots p_n) = a$$

beginnt wie alle bisherigen Methoden mit der Bestimmung einer Lösung eines vollständigen Systems, das in einer durch Berührungstransformationen invarianten Beziehung zu $f = a$ steht. Indem diese beiden Axiome als richtig vorausgesetzt werden, wird bewiesen, dass die vom Verfasser gegebenen Integrationstheorien, die bekanntlich theilweise mit gleichzeitigen Methoden Mayer's äquivalent sind, das Grösstmögliche leisten.

Christiania. Sophus Lie.

E. Hunyady: Ueber die verschiedenen Formen der Bedingungsgleichung, welche ausdrückt, dass sechs Punkte auf einem Kegelschnitte liegen. (Borchardt's Journal für Math. Bd. 83.)

Unter Benützung der folgenden Bezeichnungen

$$y_i z_k - y_k z_i = \xi_{ik}$$
$$z_i x_k - z_k x_i = \eta_{ik}$$
$$x_i y_k - x_k y_i = \zeta_{ik}$$
$$\Sigma \pm x_i y_k z_l = (ikl)$$

werden nach den Theoremen von Pappus, Desargues, Chasles, Pascal und Carnot die Bedingungsgleichungen ausgedrückt, dass

sechs Punkte auf einem Kegelschnitte liegen. Die ersten drei Theoreme führen auf die Bedingungsgleichung:

$$(136)(145)(235)(246) - (135)(146)(236)(245) = 0, \qquad (1)$$

während die beiden letzteren zu den folgenden führen:

$$\varDelta_{123456} = \begin{vmatrix} \eta_{12}\zeta_{45} - \eta_{45}\zeta_{12} & \zeta_{12}\xi_{45} - \zeta_{45}\xi_{12} & \xi_{12}\eta_{45} - \xi_{45}\eta_{12} \\ \eta_{34}\zeta_{61} - \eta_{61}\zeta_{34} & \zeta_{34}\xi_{61} - \zeta_{61}\xi_{34} & \xi_{34}\eta_{61} - \xi_{61}\eta_{34} \\ \eta_{56}\zeta_{23} - \eta_{23}\zeta_{56} & \zeta_{56}\xi_{23} - \zeta_{23}\xi_{56} & \xi_{56}\eta_{23} - \xi_{23}\eta_{56} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

$$\begin{aligned}&(125)(126)(134)(234)(356)(456)\\ &- (123)(124)(156)(256)(345)(346) = 0. \qquad (3)\end{aligned}$$

Die Gleichungen (1) und (3) sind die Repräsentanten von je fünfzehn Gleichungen, während durch (2) sechszig repräsentirt werden. Es ist hiermit durch neunzig der Form nach verschiedene Bedingungsgleichungen ausgedrückt, dass sechs Punkte auf einem Kegelschnitte liegen.

Es folgt dann die Ermittelung des Zusammenhanges der ersten Glieder dieser Gleichungen, der durch die folgenden Gleichungen ausgedrückt wird:

$$\varDelta_{123456} = (136)(145)(235)(246) - (135)(146)(236)(245) \qquad (4)$$

$$\begin{aligned}\varDelta_{123456}\, \Sigma \pm \xi_{12}\eta_{34}\zeta_{56} &= (125)(126)(134)(234)(356)(456)\\ &- (123)(124)(156)(256)(345)(346) \qquad (5)\end{aligned}$$

Es sei noch bemerkt, dass man noch zu einer andern Form der fraglichen Bedingungsgleichung gelangt, wenn man von der Gleichung des Kegelschnittes ausgeht, der durch drei der gegebenen Punkte hindurchgeht und dann ausdrückt, dass die noch übrigen drei Punkte auf diesem Kegelschnitt liegen. Die Bedingungsgleichung erhält dann die Form:

$$D_{123} = \begin{vmatrix} (124)(134) & (124)(234) & (134)(234) \\ (125)(135) & (125)(235) & (135)(235) \\ (126)(136) & (126)(236) & (136)(236) \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

und für ihren algebraischen Zusammenhang mit den früheren Formen ergiebt sich:

$$\varDelta_{123456} \cdot (123)^2 = D_{123}, \qquad (7)$$

wie ich in einer der Akademie in Budapest vorgelegten Abhandlung gezeigt habe.

Herr Th. Reye beehrte mich mir mitzutheilen, dass sich der Zusammenhang von

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1 z_1 & z_1 x_1 & x_1 y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & y_6 z_6 & z_6 x_6 & x_6 y_6 \end{vmatrix} = 0$$

und der Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 x_2 & y_1 y_2 & z_1 z_2 & y_1 z_2 + y_2 z_1 & z_2 x_1 + z_1 x_2 & x_1 y_2 + x_2 y_1 \\ x_2 x_3 & y_2 y_3 & z_2 z_3 & y_2 z_3 + y_3 z_2 & z_2 x_3 + z_2 x_3 & x_2 y_3 + x_3 y_2 \\ x_1 x_3 & y_1 y_3 & z_1 z_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_4 x_5 & y_4 y_5 & z_4 z_5 & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_5 x_6 & y_5 y_6 & z_5 z_6 & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_4 x_6 & y_4 y_6 & z_4 z_6 & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0,$$

zu welcher man gelangt, wenn man ausdrückt, dass die Dreiecke 123 und 456 Poldreiecke eines und desselben Polarsystemes sind, sowie der vorhergehenden Formen ebenfalls leicht ermitteln lässt.

Budapest. E. Hunyady.

G. Holzmüller: I. Ueber die Abbildung $x + yi = \sqrt[n]{X + Yi}$ und die lemniscatischen Coordinaten n^{ter} Ordnung. (Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 83, p. 38 etc.)

II. Lemniscatische Geometrie, Verwandtschaft und Kinematik, abgeleitet mit Hilfe der Function complexen Arguments $Z = \sqrt{z}$. (Zeitsch. f. Math. u. Phys. Bd. 21, p. 325 etc.)

Gelingt es, eine Curvengleichung so zu schreiben, dass die Variabeln nur in den Formen $x + yi$ und $x - yi$ vorkommen, so ergeben sich bemerkenswerthe Vereinfachungen für gewisse Abbildungsaufgaben.

Die Gleichungen eines Kreises um den Punkt e der reellen Axe und einer von diesem Punkte ausgehenden Geraden, die mit dieser Axe den Winkel $\gamma = \text{arc tan} \frac{Y}{X - c}$ bildet, sind z. B. in jener Form:

$$\sqrt{(X + Yi - c) \cdot (X - Yi - e)} = c, \tag{1}$$

$$\frac{1}{2i} \lg \frac{X + Yi - e}{X - Yi - e} = \gamma. \tag{2}$$

Durch die Abbildung $x + yi = \sqrt[n]{X + Yi}$, wo n ganz, positiv und reell ist, gehen beide Gleichungen in folgende über:

$$(3)\qquad \sqrt{[(x+yi)^n - e]\cdot[(x-yi)^n - e]}$$
$$= \prod_{k=0}^{k=n-1} \sqrt{\left(x - e^{\frac{1}{n}}\cos\frac{2\varkappa\pi}{n}\right)^2 + \left(y - e^{\frac{1}{n}}\sin\frac{2\varkappa\pi}{n}\right)^2} = p_1\cdot p_2 \cdots p_n = c,$$

$$(4)\qquad \frac{1}{2i}\lg\frac{(x+yi)^n - e}{(x-yi)^n - e}$$
$$= \sum_{k=0}^{k=n-1} \operatorname{arc\,tan}\frac{y - e^{\frac{1}{n}}\sin\frac{2\varkappa\pi}{n}}{x - e^{\frac{1}{n}}\cos\frac{2\varkappa\pi}{n}} = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n = \gamma.$$

Hier sind die p Radii vectores, die von den durch $\sqrt[n]{e}$ repräsentirten Punkten ausgehen, während die ϑ die Neigungswinkel dieser Radii vectores gegen die reelle Axe oder gegen die Richtungslinie irgend eines der Punkte $\sqrt[n]{e}$ bedeuten.

Daraus folgt allgemein:

Die Abbildung $x + yi = \sqrt[n]{X + Yi}$ (n ganz, positiv, reell) verwandelt den Kreis $r = c$ um den Punkt $a + bi$ in die Lemniscate n^{ter} Ordnung $p_1 . p_2 \ldots . p_n = c$ mit den Brennpunkten $\sqrt[n]{a + bi}$, während die Gerade, die mit dem „Radius" des Punktes $a + bi$ den Winkel γ bildet, in die Hyperbel n^{ter} Ordnung $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n = \gamma$ übergeht, wobei die ϑ die Winkel sind, welche die Radii vectores p mit dem „Radius" irgend eines der Punkte $\sqrt[n]{a + bi}$ bilden.

Durch Abbildung der concentrischen Kreise und ihrer Radien erhält man also *das Isothermensystem der confocalen Lemniscaten n^{ter} Ordnung und das orthogonale System der Hyperbeln n^{ter} Ordnung durch die Brennpunkte der Lemniscaten.*

Die isogonalen Trajectorien dieser Systeme haben die Gleichung:

$$(5)\qquad p_1 \cdot p_2 \ldots . p_n = c \,.\, k^{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n}.$$

Das Büschel von Lemniscaten n^{ter} Ordnung durch die Punktgruppen $\sqrt[n]{a + bi}$ und $\sqrt[n]{a_1 + b_1 i}$ (mit dem Nullpunkt als Centrum) hat die Gleichung:

$$(6)\qquad (\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) - (\chi_1 + \chi_2 + \ldots + \chi_n) = \gamma,$$

die orthogonale Lemniscatenschaar hingegen ist:

$$(7)\qquad \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n}{q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdots q_n} = c.$$

Die isogonalen Trajectorien beider Curvengruppen haben die Gleichung:

$$(8)\qquad \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n}{q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n} = c \,.\, k^{(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) - (\chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_n)}.$$

Die Eigenschaften dieser Systeme lassen sich entwickeln aus denen der elliptischen und hyperbolischen Kreisschaar und des Systems gleichwinkliger logarithmischer Spiralen und Doppelspiralen, wozu man die Abhandlung „*Ueber die logarithmische Abbildung etc.*" im 16. Bande der Zeitschr. für Math. und Phys. vergleichen mag.

Die Kreisverwandtschaft geht durch obige Abbildung in eine analoge „*lemniscatische Verwandtschaft n^{ter} Ordnung*" über, während die projectivischen Beziehungen sich dadurch einfach übertragen lassen, dass an Stelle der Doppelverhältnisse

$$\frac{r-p}{r-q} \cdot \frac{s-q}{s-p} \quad \text{resp.} \quad \frac{\sin(ac)\,.\,\sin(bd)}{\sin(bc)\,.\,\sin(ad)}$$

folgende treten:

$$\frac{r_1 \cdot r_2 \ldots r_n - p_1 \cdot p_2 \ldots p_n}{r_1 \cdot r_2 \ldots r_n - q_1 \cdot q_2 \ldots q_n} \cdot \frac{s_1 \cdot s_2 \ldots s_n - q_1 \cdot q_2 \ldots q_n}{s_1 \cdot s_2 \ldots s_n - p_1 \cdot p_2 \ldots p_n}$$

und:

$$\frac{\sin[(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n)-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)]\cdot\sin[(\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n)-(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)]}{\sin[(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n)-(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)]\cdot\sin[(\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n)-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)]}.$$

Rollt man einen der n Sectoren der Ebene zum Kegel zusammen, so hat man auf diesem lemniscatisch-hyperbolische Isothermenschaaren, die zu den Kreisschaaren der Kugel in einfacher Beziehung stehen.

Der Specialfall $n = 2$ ist in der an zweiter Stelle genannten Arbeit ausführlich behandelt. Dort wird gezeigt, wie sich die Geometrie des Kreises, der Geraden und der projectivischen Gebilde durch die Abbildung $Z = \sqrt{z}$ in die „*lemniscatische Geometrie*" übertragen lässt. Eine Anzahl von Sätzen wird beispielshalber ausgesprochen und das Analogon der Kreisverwandtschaft vollständiger durchgeführt. Die Aufgabe, *den von zwei Lemniscaten eines Büschels und zwei orthogonalen Lemniscaten begrenzten Raum auf den Einheitskreis abzubilden*, wird synthetisch gelöst und die diese Abbildung vermittelnde Function

$$Z = \frac{1 + i\sqrt{k} \cdot \operatorname{sinam} u}{i + \sqrt{k} \cdot \operatorname{sinam} u} \pmod k, \quad \text{wo } u = g + \lg \frac{az^2 + b}{cz^2 + d} \text{ ist,}$$

aufgefunden.

Endlich schliessen sich einige kinematische Betrachtungen über das lemniscatisch-veränderliche System an, die unter Anderem die Bewegungen der Lemniscaten und Hyperbeln behandeln, welche sichtbar werden, wenn eine zweckmässig präparirte Salpeterplatte im Polarisationsapparate gedreht wird. —

In der ersteren Abhandlung wird noch bemerkt, dass die Transformation $x + yi = (X + Yi)^{\frac{m}{n}}$ Lemniscaten m^{ter} Ordnung in solche der n^{ten} Ordnung verwandelt, so dass sich auch die Theorie dieser Abbildung vollständig durchführen lässt.

Hagen i/W. Dr. G. Holzmüller.

M. Krause: Ueber die Modulargleichungen der elliptischen Functionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie. (Math. Annalen. Bd. XII. p. 419—434.)

Die von Jacobi begründete Theorie der Modulargleichungen der elliptischen Functionen, welche zu einem unpaaren Transformationsgrade gehören, ist seither der Gegenstand einer Reihe bedeutender Arbeiten geworden und hat durch ein kürzlich erschienenes Werk von Joubert (Sur les équations qui se rencontrent... Paris 1876) in gewisser Weise ihren Abschluss gefunden, während die zu einem paaren Transformationsgrade gehörenden noch wenig behandelt worden sind. Die vorliegende Arbeit hat den Zweck diese Lücke auszufüllen. In derselben wird bei bekannter Bezeichnungsweise erstens die Existenz von algebraischen Gleichungen zwischen den Grössen $u^2 = \varphi^2(\tau)$ und $v_1^2 = \psi^2\left(\frac{\delta\tau - 8\xi}{2^\alpha\delta_1}\right)$ nachgewiesen, wenn $2^\alpha\delta\delta_1$ gleich m gleich dem Grade der Transformation ist, δ einen jeden ungeraden Theiler von m und ξ eine jede Zahl aus der Reihe $0, \pm 1, \pm 2, \cdots + \frac{m}{8}$ bedeutet, welche keinen gemeinsamen Theiler mit δ und δ_1 hat. Dabei beschränkt sich die Betrachtung auf den wichtigsten Fall, dass $\alpha \geq 3$ ist. Zweitens werden die Haupteigenschaften der eingeführten Gleichungen aufgestellt und gezeigt, dass und wie eine Reihe weiterer Modulargleichungen aus diesen ursprünglichen, fundamentalen abgeleitet werden kann. Hieran schliesst

sich drittens die Lösung des allgemeinen Problems der Wurzelentwickelung. In dem vierten Paragraphen werden die Gleichungen für die Transformationszahlen 8, 16, 24, 32, 40 wirklich aufgestellt und endlich in dem fünften eine Anwendung der abgeleiteten Sätze auf die Zahlentheorie gegeben. Dieselbe besteht in einem Beweis eines Theiles der Summenformeln, welche Kronecker im 57. Bande des Crelle'schen Journals für die Classenanzahl von Formen mit negativer Determinante gegeben hat.

Breslau. Martin Krause.

Hamburger: Ueber ein Princip zur Darstellung des Verhaltens mehrdeutiger Functionen einer complexen Variabeln, insbesondere der Integrale linearer Differentialgleichungen in der Umgebung singulärer Punkte. (Borchardt's J. Bd. 83. p. 185—209.)

Herr Fuchs hat bekanntlich für die Integrale linearer Differentialgleichungen mit eindeutigen Coefficienten die allgemeine Form festgestellt, welche sie in der Umgebung eines singulären Punktes a annehmen, und für den Fall, dass sämmtliche Integrale mit endlichen Potenzen von $x - a$ multiplicirt, verschwinden, die Coefficienten der betreffenden Potenzreihen auch wirklich dargestellt. Die Ermittelung derselben in dem allgemeinen Falle, wo die Reihen positive und negative Potenzen von $x - a$ in unendlicher Anzahl enthalten, ist bisher noch nicht bekannt. In der vorliegenden Arbeit wird nun ein Verfahren angegeben, wonach man das Verhalten einer beliebigen mehrdeutigen Function, welche mit Ausnahme einzelner singulären Punkte (Verzweigungs- oder Unstetigkeitspunkte) eindeutig und stetig ist, in der Nähe der singulären Punkte stets bestimmen kann, wenn 1) die Lage der singulären Punkte selbst bekannt ist, und 2) die Werthe der Function und aller ihrer Ableitungen in inf. in einem Punkte der Umgebung des betrachteten singulären Punktes gegeben sind. Beide Voraussetzungen finden sich bei den Functionen, die linearen homogenen Differentialgleichungen mit ein- oder mehrdeutigen Coefficienten als Integrale genügen, erfüllt und man ist somit in den Stand gesetzt,

das Verhalten derselben in der Umgebung eines singulären Punktes in allen Fällen zu ermitteln.

Die allgemeine Methode besteht in Folgendem:

Es sei $x = 0$ ein singulärer Punkt der betrachteten Function $f(x)$ und ϱ die Entfernung des nächst gelegenen singulären Punktes vom Nullpunkte. Wir setzen $x = e^z$, dann entspricht $x = 0$, $z = -\infty$ und dem nächstgelegenen singulären Punkte in der x-Ebene $x = \varrho e^{\varphi i}$ die Werthe $z = \sigma + \varphi i + 2k\pi i$, wo σ den reellen Werth von $\log \varrho$ und k eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. Die diese Werthe repräsentirenden Punkte in der z-Ebene liegen somit in einer auf der reellen z-Achse senkrechten durch den Punkt $z = \sigma$ gehenden Geraden A und die den übrigen singulären Punkten der x-Ebene entsprechenden Punkte der z-Ebene befinden sich sämmtlich nur auf einer und zwar der positiven Seite der Geraden A.

Die Function $y = f(x) = f(e^z)$ als Function von z betrachtet, ist daher in allen Punkten der Halbebene der z auf der negativen Seite von A eindeutig und stetig und kann demgemäss in der Umgebung jedes Punktes z_0 auf diesem Gebiete durch convergirende Potenzreihen von der Form

$$(1) \qquad y_0 + \left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=z_0}(z - z_0) + \left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)_{z=z_0}\frac{(z-z_0)^2}{2!}\cdots$$

dargestellt werden. Es ist nun zu bemerken, dass, wenn $x_0 = e^{z_0}$ gesetzt wird, für alle Werthe $z = z_0 + 2\lambda\pi i$, welche $x = x_0$ entsprechen, $\frac{d^ky}{dz^k}$ denselben Werth annimmt, da nämlich diese Grösse aus den Grössen

$$y,\ x\frac{dy}{dx},\ \ldots\ x^k\frac{d^ky}{dx^k}$$

rational und zwar durch Multiplication mit Zahlencoefficienten und Addition zusammengesetzt ist. Die Coefficienten in der obigen Entwickelungsreihe sind demnach eindeutig bekannt, wenn, wie wir voraussetzen, die Werthe von y und allen ihren Ableitungen für $x = x_0$ gegeben sind. Wählen wir nun für x_0 einen Werth, dessen absoluter Betrag $|x_0| < \varrho e^{-2\pi}$ ist, dann wird die Gerade in der z-Ebene, auf welcher die entsprechende Punktreihe $z = z_0 + 2\lambda\pi i$ sich befindet, auf der negativen Seite der Geraden A und von derselben um eine Strecke entfernt sein, deren Betrag grösser als 2π ist. Ein Kreis um den Punkt z_0 in der z-Ebene mit dem Radius 2π beschrieben, enthält weder auf seinem Umfange noch in seinem Innern einen der singulären Punkte der z-Ebene, und die Reihe (1)

convergirt daher noch für $z = z_0 + 2\pi i$ und stellt dann den Werth $\overline{y_0}$ dar, welchen y im Punkte x_0 nach einem einmaligen keinen der übrigen singulären Punkte einschliessenden Umlauf um den Nullpunkt der x-Ebene annimmt. Da die aus (1) durch Differentiation nach z entstehenden Reihen in demselben Bereiche wie die ursprüngliche Reihe giltig sind, so erhält man:

$$(2) \quad \overline{y_0} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \left(\frac{d^k y}{d z^k}\right)_0 \frac{(2\pi i)^k}{k!}, \ldots \overline{\left(\frac{d^\nu y}{d z^\nu}\right)_0} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \left(\frac{d^{k+\nu} y}{d z^{k+\nu}}\right)_0 \frac{(2\pi i)^k}{k!}, \ldots$$

wodurch das Verhalten der Function y bei einem Umgang um den Nullpunkt der x-Ebene charakterisirt ist.

Bei der Anwendung auf Functionen, die linearen homogenen Differentialgleichungen zunächst mit eindeutigen Coefficienten genügen und die $x = 0$ zum singulären Punkt haben, genügt es zur Kenntniss ihres Verhaltens in der Umgebung des Nullpunktes n von den Formeln (2) für jedes der n von einander unabhängigen, übrigens beliebig gewählten, partikulären Integrale zu berechnen, wenn n der Grad der betrachteten Differentialgleichung ist; es lässt sich alsdann namentlich die zum Nullpunkt gehörige Fundamentalgleichung, die Herr Fuchs in der Theorie der Differentialgleichung eingeführt hat, in allen Fällen aufstellen. Auch wird ein Weg angegeben, die Integrale eines Fundamentalsystems in der von Herrn Fuchs zuerst aufgestellten Form

$$y = x^r (\varphi_0 + \varphi_1 \log x + \cdots + \varphi_\mu (\log x)^\mu)$$

zu entwickeln, wo die φ nach ganzen, positiven und negativen Potenzen von x und zwar im Allgemeinen nach beiden Seiten hin ins Unendliche fortschreitende Reihen bezeichnen.

Zum Schluss werden noch lineare Differentialgleichungen mit mehrdeutigen Coefficienten betrachtet und das Verhalten ihrer Integrale in der Umgebung der singulären Punkte nach dem in Rede stehenden Verfahren durch analytische Formeln ausgedrückt.

Berlin. Hamburger.

O. Schloemilch: Ueber einige unendliche Reihen. (Sitzungsberichte d. K. Sächs. Gesellsch. der Wissensch. Juni 1877.)

Wenn im Folgenden die Summenzeichen auf die Werthe $n = 1, 2, 3, \ldots$ bezogen werden, so gilt unter den Voraussetzungen

$$\varrho > 0 \text{ und } 0 < x < \pi$$

die nachstehende Transformation

$$2\varrho \sum \frac{\sin nx}{e^{2n\pi\varrho} - 1} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{e^{\frac{x}{\varrho}} - 1} - \frac{\varrho}{2} \cot \frac{x}{2} - \sum \frac{1}{e^{\frac{2n\pi - x}{\varrho}} - 1} + \sum \frac{1}{e^{\frac{2n\pi + x}{\varrho}} - 1}.$$

Durch eine weitere Umwandlung und unter Anwendung der hyperbolischen Functionen

$$\frac{e^u + e^{-u}}{2} = \text{cshp}\, u, \quad \frac{e^u - e^{-u}}{2} = \text{snhp}\, u$$

ergiebt sich hieraus

$$\frac{x}{4\pi\sqrt{\varrho}} + \frac{\sqrt{\varrho}}{2} \cot \frac{x}{2} + 2\sqrt{\varrho} \sum \frac{\sin nx}{e^{2n\pi\varrho} - 1}$$

$$= -\frac{x}{4\pi\sqrt{\varrho}} + \frac{1}{2\sqrt{\varrho}} \text{cthp} \frac{x}{2\varrho} - \frac{2}{\sqrt{\varrho}} \sum \frac{\text{snhp} \frac{nx}{\varrho}}{e^{\frac{2n\pi}{\varrho}} - 1}.$$

Bezeichnet man die linke Seite mit $\Phi(x, \varrho)$, so hat man die Relation

$$\Phi(iz, \varrho) = -i\Phi\left(\frac{z}{\varrho}, \frac{1}{\varrho}\right).$$

Differenzirt man die vorige Gleichung nach x und multiplicirt mit $\pi\sqrt{\varrho}$, so erhält man weiter

$$\frac{1}{4} - \frac{\pi\varrho}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} + 2\pi\varrho \sum \frac{n \cos nx}{e^{2n\pi\varrho} - 1}$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{\pi}{4\varrho\, \text{snhp}^2 \frac{x}{2\varrho}} - \frac{2\pi}{\varrho} \sum \frac{n\, \text{cshp} \frac{nx}{\varrho}}{e^{\frac{2n\pi}{\varrho}} - 1}$$

oder, dem Früheren analog,

$$\Psi(iz, \varrho) = -\Psi\left(\frac{z}{\varrho}, \frac{1}{\varrho}\right).$$

Die letztere Gleichung gilt auch für $x = 0$ und liefert in diesem Falle

$$\frac{1}{4} - \frac{\pi}{12}\varrho + 2\pi\varrho \sum \frac{n}{e^{2n\pi\varrho} - 1}$$
$$= -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{12}\frac{1}{\varrho} - \frac{2\pi}{\varrho}\sum \frac{n}{e^{\frac{2n\pi}{\varrho}} - 1}$$

oder

$$\Psi(\varrho) + \Psi\left(\frac{1}{\varrho}\right) = 0.$$

Bezeichnet man ferner mit s_n die Summe der Theiler von n, so kann man die vorige Gleichung auch in folgender Form darstellen:

$$\frac{1}{4} - \frac{\pi}{12}\varrho + 2\pi\varrho \sum s_n e^{-2n\pi\varrho}$$
$$= -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{12}\frac{1}{\varrho} - \frac{2\pi}{\varrho}\sum s_n e^{\frac{-2n\pi}{\varrho}}.$$

Bei kleinen ϱ convergiren die auf den linken Seiten stehenden Reihen sehr langsam, die rechts verzeichneten Reihen dagegen so rapid, dass jene Gleichungen als Summenformeln benutzt werden können.

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich für $\varrho = 1$

$$\sum s_n e^{-2n\pi} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\pi}\right) = 0{,}00187793;$$

dieses Resultat lässt sich mittelst der Theorie der elliptischen Functionen verificiren.

O. Schloemilch: Ueber die Summen von Potenzen der reciproken natürlichen Zahlen. (Sitzungsberichte d. K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Juni 1877.)

Nachdem der Verf. bereits im J. 1849 den Zusammenhang zwischen der Function

$$\psi(\mu) = \frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{5^\mu} - \frac{1}{7^\mu} + \cdots$$

und der complementären Function $\psi(1 - \mu)$ gezeigt hatte, lag die Vermuthung nahe, dass zwischen den Functionen

$$\varphi(\mu) = \frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} - \frac{1}{4^\mu} + \cdots$$

eine ähnliche Relation bestehen werde. Auf dem früheren Wege liess sich die letztere nicht entdecken, man findet sie aber leicht, wenn man das Integral

$$\int_0^\infty \left\{\frac{1}{2x} - \frac{1}{e^x - e^{-x}}\right\} x^{\mu-1} dx$$

auf zwei verschiedene Weisen entwickelt. Das Resultat lautet:

$$\frac{\varphi(1-\mu)}{\varphi(\mu)} = \frac{2^\mu - 1}{2^{1-\mu}-1} \cdot \frac{2\Gamma(\mu)\cos\frac{1}{2}\mu\pi}{(2\pi)^\mu},$$

wobei μ zwischen 0 und 1 enthalten sein muss. Symmetrischer gestaltet sich diese Beziehung, wenn man die Function $F(\mu)$ durch folgende Gleichung definirt

$$F(\mu) = (2^\mu - 1)\left\{\frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} - \cdots\right\}\sqrt{\frac{\Gamma(\mu)}{(2\pi)^\mu \sin\frac{1}{2}\mu\pi}};$$

es ist dann

$$F(1-\mu) = F(\mu).$$

Mittelst eines analogen Verfahrens kann man aus der Entwickelung des Integrales

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x + e^{-x}} x^{\mu-1} dx$$

die anfangs erwähnte Relation herleiten, nämlich:

$$\frac{\psi(1-\mu)}{\psi(\mu)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^\mu \Gamma(\mu)\sin\tfrac{1}{2}\mu\pi.$$

Definirt man $f(\mu)$ durch die Gleichung

$$f(\mu) = \left\{\frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{5^\mu} - \cdots\right\}\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)^\mu \Gamma(\mu)\sin\tfrac{1}{2}\mu\pi},$$

so hat man ähnlich wie vorhin

$$f(1-\mu) = f(\mu).$$

Dresden. O. Schloemilch.

Ernst Schröder: Ueber v. Staudt's Rechnung mit Würfen und verwandte Processe. (Math. Ann. Bd. X, S. 289—317.)

Die durch v. Staudt, Lüroth, Rud. Sturm auf synthetisch geometrischer Grundlage auf- und ausgebaute Theorie der Rechnung mit Würfen wird in dem vorliegenden Aufsatze von der analytischen Seite betrachtet und unter einem umfassenderen Gesichtspunkte dargestellt, der mit anderweitigen Studien des Verfassers in engem Zusammenhange steht.

In meinem „Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studirende, I. Bd., Die sieben algebraischen Operationen, Leipzig 1873" hatte ich zum erstenmal die Idee einer Disciplin ausgesprochen, von der die bisherige Algebra und Analysis nur wie ein specieller Fall erscheint, in die sie gewissermassen wie ein (allerdings starker und am längsten ausgesponnener) Faden in ein ausgebreitetes Gewebe sich einfügt.

Ich habe diese Idee seither unablässig weiter verfolgt und in einer Gelegenheitschrift „Die formalen Elemente der absoluten Algebra, Stuttgart 1874" eine vorläufige Mittheilung über Ergebnisse meiner einschlägigen Untersuchungen gemacht.

Seitdem hat auch Herr Hoüel die Möglichkeit oder Existenz einer solchen Disciplin wahrgenommen, wie ich aus dessen Schrift „Ueber die Rolle der Erfahrung in den exacten Wissenschaften" in der mir vorliegenden Uebersetzung von Herrn Felix Müller, Grunert-Hoppe's Archiv, Bd. 59, S. 65—75 ersehe.

Den Grundgedanken bildet eine erweiterte Auffassung der Multiplication als einer Operation, die überhaupt zwei Elemente einer Mannigfaltigkeit zu einem dritten verknüpft, und dem entsprechend der beiden Divisionen (Messung und Theilung) als der umgekehrten Operationen zu der vorerwähnten.

Diese *„symbolischen"* Operationen sind nöthigenfalls durch fett oder hohl gedruckte, oder durch eingeklammerte Operationszeichen von den *„eigentlichen"* zu unterscheiden.

Eine wichtige Illustration ergiebt sich auf dem Gebiete der gewöhnlichen Analysis selbst, wenn man unter

$$c = a(\cdot)b$$

eine beliebige *Function* $c = f(a, b)$ der beiden Elemente a und b versteht, unter denen wir uns nun gewöhnliche Zahlen vorstellen, sodann unter

$$b = c(:)a \text{ und } a = (\tfrac{c}{b})$$

bezüglich die Auflösungen:

$$b = \varphi(c, a) \text{ und } a = \psi(b, c)$$

der Gleichung $f(a, b) = c$ nach a und nach b, mithin die beiden zu f inversen Functionen.

Nehmen wir die drei Grundoperationen oder die von ihnen vertretenen Functionen zunächst als eindeutig an, und lassen die Klammern um die Operationszeichen für den Augenblick weg, so gelten als allgemeine Formeln die Gleichungen:

$$(ab):a = \frac{ba}{a} = \frac{a}{a:b} = a(b:a) = \frac{b}{a}a = a:\frac{a}{b} = b,$$

und drücken offenbar den Gegensatz unserer drei Operationen zu einander, oder die Definition von zweien derselben als inverse zur dritten, in weit übersichtlicherer Weise aus, als dies mittelst der obigen Functionszeichen erreichbar wäre.

Bei dieser erweiterten Auffassung kann man nun aber auch fragen nach den logischen Consequenzen von solchen formalen Gesetzen, wie z. B. $a(:)\{b(\cdot)c\} = b(:)\{c(\cdot)a\}$, oder kürzer $a:(bc) = b:(ca)$, welche von der gemeinen Multiplication und Division nicht mehr gelten, sowie nach dem logischen Zusammenhange von verschiedenen derartigen Formeln. Die Frage nach den logischen Consequenzen erhält erst eine bestimmte Begrenzung, wenn man sich dabei auf ein gewisses Gebiet, eine bestimmte Klasse von Formeln beschränkt, z. B. auf das Gebiet der (990) Gleichungen, in welchen so, wie eben, links und rechts vom Gleichheitszeichen drei allgemeine Zahlen a, b, c durch zwei successive von den drei Grundoperationen verknüpft erscheinen.

Es lässt sich z. B. beweisen, dass auf dem genannten Gebiete die Formel

$$(cb):a = \frac{bc}{a}$$

gar *keine* andere, dagegen etwa die für von einander unabhängig beliebige a, b, c als gültig angenommene Gleichung $b\frac{c}{a} = (ba):c$ *alle* übrigen nach sich zieht.

Die ganze Gruppe von Formeln, welche die willkürlich als Prämissen angenommenen mit all ihren Consequenzen zusammen ausmachen, nenne ich einen (vollständigen) „*Algorithmus*“, indem ich den Namen „Kalkul“ für ein complicirteres Formelgefüge reservire.

Als in dem Aufsatze in Betrachtung gezogene Exempel muss ich hier anführen: den *Algorithmus* C_1 *des Commutationsgesetzes*, als dessen Prämisse die Gleichung $ab = ba$ gelten kann, den *Algorithmus* C_0 oder $ab = a:b\left[= \frac{b}{a}\right]$, sowie *den* C_{0123} [Prämisse etwa die Gleichung $a(b:c) = \frac{c}{b}a$], wo beide vorigen gleichzeitig Geltung haben; endlich den *Algorithmus* O_1 *„der ordinären Algebra“*, welcher die 150 auch von der gemeinen Multiplication und Division geltenden Gleichungen des erwähnten Gebietes umfasst. Letztere:

$$a(bc) = b(ca) = (ab)c = \text{etc.},$$

$$\frac{bc}{a} = \frac{b}{a}c = b:\frac{a}{c} = \text{etc.},$$

$$\frac{a}{bc} = \frac{a}{b}:c = \text{etc.}$$

werden höchst einfach erhalten, wenn man neben die drei Ausdrücke von linkerhand alle diejenigen von dem in Rede stehenden Baue setzt, welche ihnen nach den Regeln der Arithmetik allgemein gleich sind, und dann in jeder von diesen drei Gruppen die Ausdrücke unter sich vergleicht. Dieselben fliessen beispielsweise sämmtlich aus der einen Formel: $b(ca) = (ab)c$ als nothwendige Folgerungen.

Wie oben gezeigt, sind die betrachteten formalen Gesetze eigentlich *Functionalgleichungen*, und man kann fragen nach den „Lösungen“ derselben, d. h. nach solchen speciellen Functionen $a(\cdot)b = f(a, b)$, welche dieselben wirklich erfüllen. Dergleichen Functionen bezeichne ich auch kurz als die *Lösungen der* (zugehörigen) *Algorithmen*.

Diese Lösungen sind in der Regel „Berührungstransformationen“ im Sinne von Sophus Lie, jedoch nicht die allgemeinsten, sondern Berührungstransformationen von specielleren Charakter, bei denen nämlich die unbestimmmte von den beiden in die Lie'sche Functionalgleichung eingehenden Functionen vertreten ist durch die gesuchte Function selbst mit eventuell vertauschten Argumenten, oder durch eine von deren Umkehrungen.

Als eine sammt ihren Umkehrungen eindeutige Function empfiehlt sich zur Ermittelung von speciellen Lösungen von Algorithmen vor allem die (bi)linear gebrochene Function:

$$a(\cdot)b = \frac{\delta ab + \alpha a + \beta b + \gamma}{\delta_1 ab + \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1},$$

deren Coefficienten bezüglich a und b Constante sind. Und es hat die Auffindung solcher Lösungen besonderen Werth für die *Limitirung* eines jeden Algorithmus, d. h. für den *Beweis*, dass ausser den bereits in ihm versammelten Gleichungen keine anderen Gleichungen des betrachteten Formelgebietes mehr aus ihnen folgen oder zu dem Algorithmus gehören.

Die Frage nach der allgemeinsten Lösung des Algorithmus O_1 („der ordinären Algebra") in der eben angeführten linearen Form führt nun auf die v. Staudt'sche Multiplication und fernerhin auf die analytische Darstellung der Rechnung mit Würfen.

Die gedachte Lösung ist:

$$a(\cdot)b = \begin{vmatrix} t_1, & a, & b \\ t_0, & a, & t_0 \\ t_x, & t_\infty, & b \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, & t_1, & t_1 \\ 1, & t_0, & b \\ 1, & a, & t_\infty \end{vmatrix}$$

für irgend welche Werthe der Constanten t_0, t_1, t_∞, und einen Specialfall derselben bildet offenbar:

$$a(+)b = \begin{vmatrix} t_0, & a, & b \\ t_x, & a, & t_\infty \\ t_x, & t_\infty, & b \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, & t_0, & t_0 \\ 1, & t_\infty, & b \\ 1, & a, & t_\infty \end{vmatrix}$$

Diese beiden linear gebrochenen Functionen (und deren inverse) befolgen nun, wie in der Abhandlung gezeigt ist, alle allgemeinen Gesetze, welche von den Rechnungsarten der *vier Species* sowohl für sich, als auch in Bezug auf einander gelten, und die Grundlage des *arithmetischen* Kalkuls bilden; sie lassen überdies durch eine lineare Transformation auf diese Species selbst sich zurückführen.

Die Rechnung mit Würfen stellen sie dar, wenn man die Argument- und die Functionswerthe $a, b, a(\cdot)b, a(+)b$ etc., desgleichen die Constanten t_0, t_1, t_∞ ansieht als verschiedene Werthe des Parameters t eines (nicht zerfallenden) Kegelschnittes, welcher als unicursale Curve dadurch gegeben gedacht wird, dass die Coordinaten x, y seiner Punkte als quadratisch gebrochene Functionen vom selben Nenner in Abhängigkeit gesetzt sind von dieser Hilfsvariabeln t.

Jedem Parameterwerth entspricht dann eindeutig ein Punkt der Curve, und bilden t_0, t_1, t_∞ als feste „Grundpunkte" mit jedem veränderlichen vierten, wie etwa a, einen v. Staudt'schen *Wurf*.

Um das Product $a(\cdot)b$ zweier durch ihre vierten Punkte a und b beliebig gegebenen Würfe zu *construiren*, braucht man blos den

Punkt t_1 zu verbinden mit dem Schnittpunkte der Verbindungsgeraden von t_0 mit t_∞ und der Verbindungsgeraden von a mit b; die so erhaltene Verbindungslinie wird den Kegelschnitt in dem gesuchten Punkte $a(\cdot)b$ schneiden.

Ebenso ist $a(+)b$ der Schnittpunkt des Kegelschnittes mit derjenigen Geraden, welche den Punkt t_0 desselben verbindet mit dem Schnittpunkte der in t_∞ an ihn gezogenen Berührungslinie und der Geraden, welche a mit b verbindet.

Lässt man den willkürlich gewählten Grundpunkten t_0, t_1, t_∞ die Zahlen 0, 1 und ∞ selbst entsprechen, so ist bekannt, wie dadurch die ganze Peripherie des Kegelschnittes als eindeutige Abbildung der reellen Zahlenlinie festgelegt und die eben geschilderten Constructionen zu einem geometrischen Substrat der Operationen der vier Species gestempelt werden, von der Richtigkeit von deren Gesetzen Jedermann dann mittelst eines Lineals z. B. an einem Kreise leicht sich überzeugen kann.

Behufs der auf vorstehendes bezüglichen analytischen Nachweise werden Determinantensätze aufgestellt, und für dieselben verschiedene Beweise, darunter auch ein eleganter Beweis von Herrn A. Voss mitgetheilt.

Den Schluss des Aufsatzes bildet die Vergleichung der obigen bilinearen Lösung von O_1 mit der des Algorithmus C_{0123}, welche ebenso wie die von C_0 (und C_1) angeführt wird. Für eine unicursale *cubische* Curve construirt sich das symbolische Product

$$a(\cdot)b = \frac{\delta ab - \varepsilon(a+b) + \gamma}{\eta ab - \delta(a+b) + \varepsilon},$$

welches den Gesetzen C_{0123} gehorcht, einfach als der dritte Schnittpunkt der Curve mit derjenigen Geraden, welche die den Parameterwerthen a und b entsprechenden Punkte der Curve mit einander verbindet.

Ernst Schröder: Ein auf die Einheitswurzeln bezügliches Theorem der Functionenlehre. (Schlömilch's Zeitschr. für Math. und Phys. Bd. 22, S. 183—190.)

Das durch Anwendung bekannter Methoden gewonnene Theorem lautet:

$$f(z) - \gamma_k z^k = \sum_{a=0}^{a=\infty} \frac{1}{2^{a+1}} \sum^{h=2^{a+1}} (-1)^h e^{-\frac{hk\pi i}{2^a}} f\left(e^{\frac{h\pi i}{2^a}} z\right),$$

wenn die Function $f(z)$ innerhalb einer Ringfläche stetig ist, und γ_k für irgend ein ganzes k den Coefficienten von z^k in ihrer alsdann bekanntlich zulässigen Reihenentwickelung nach fallenden und steigenden Potenzen von z vorstellt.

Es erscheint wohl merkwürdig, dass man so ein beliebiges Glied aus der Reihenentwickelung von $f(z)$ gewissermassen herausschälen, resp. die von diesem Glied befreite Function durch $\int$ selbst dergestalt ausdrücken kann.

Ernst Schröder: Der Operationskreis des Logikcalculs. (Teubner, Leipzig 1877. 37 Seiten.)

Ernst Schröder: Note über den Operationskreis des Logikcalculs. (Math. Ann. Bd. XII, S. 481—484.)

Die *erstere* Schrift erstrebt für elementarmathematisch gebildete Leser eine Entwickelung der von Leibniz schon begehrten und von Boole gegründeten Disciplin des „Calculus of logic“ zu geben mit denjenigen Vervollkommnungen, deren dieselbe bedürftig erscheint. Verfasser geht zu diesem Zwecke auf einem grossentheiles von Robert resp. von den Gebrüdern Grassmann schon richtig eingeschlagenen Wege weiter, führt indessen den Leser wirklich bis zu dem Ziele, den ganzen beschwerlichen *arithmetisch*-logischen Rechenapparat Boole's entbehrlich zu machen, denselben zu ersetzen durch eine Methode, welche von dem der Sache wesentlich fremden Element der arithmetischen Zahlen geläutert und zu einer vollkommen elementaren gestaltet ist.

An der complicirtesten von Boole gestellten Aufgabe, deren Lösung Verfasser mit detaillirter Angabe der Rechnung durchführt, wird die Kraft der Methode erprobt, und endlich die bisher noch mangelhafte Lehre von den logischen vier Species durch Aufstellung einer correcten Theorie der Exception (Subtraction) und Abstraction (Division) ergänzt.

Die *zweite* Schrift oder „Note“ berichtet eingehender über die erstere Arbeit namentlich in ihrem Verhältniss zu den vorgängigen Arbeiten Boole's und Grassmann's, worauf ich hier, um kurz zu sein, verweise.

Ausserdem stelle ich darin Operationen auf, welche auf dem Gebiet der Substitutionen existiren und ebenso wie die logische Addition und Multiplication sich *gegenseitig* distributiv zu einander verhalten, so dass für dieselben nicht nur

$$a(b + c) = (ab) + (ac),$$

sondern auch

$$a + (bc) = (a + b)(a + c)$$

allgemein ist, wogegen ihnen die Commutativität und Associativität der logischen Grundoperationen abgeht.

Schliesslich macht die Note aufmerksam auf anderweitige, metrische, Operationen, welche mit den logischen gewisse Analogien darbieten.

Karlsruhe. Ernst Schröder.

L. Cremona: Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell' esagrammo di Pascal (Accademia de' Lincei, Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, serie 3ª, vol. I. Roma, 1877). — **Ueber Polsechsflache bei Flächen dritter Ordnung** (Comunicazione fatta alla Naturforscher-Versammlung, München 19. Sept. 1877, e ai Mathem. Annalen).

Una superficie di 3^0 ordine dotata di un punto doppio (conico) O contiene sei rette a concorrenti in O e quindici altre rette c situate tre a tre in quindici piani tritangenti τ. In dieci maniere diverse si possono prendere nove rette c che siano comuni a due triedri, in modo che le sei rette c rimanenti giacciano in un iperboloide. Ed oltre a questi 20 triedri (di 1ª specie) conjugati due a due, ve ne sono altri 60 (di 2ª specie), ciascun de' quali contiene pure nove rette c, però in modo che le sei restanti sono in due piani τ. Le sessanta rette p, spigoli de' 20 triedri di 1ª specie, costituiscono anche il sistema completo degli spigoli de' 60 triedri di 2ª specie; ed inoltre sono distribuite come spigoli di sei pentaedri, le cui facce sono piani τ, ed i cui vertici sono i vertici de' triedri di 2ª specie. I vertici dei 20 triedri di 1ª specie sono poi i vertici di uno stesso *esaedro*, il quale può riguardarsi come il nocciolo di tutta la figura. Le 60 rette p giacciono quattro a quattro in 15 piani, che passano ordinatamente pei 15 spigoli dell' esaedro, e si segano sei a sei in quindici punti S e tre a tre in venti rette k.

Se ora si projetta tutta questa figura dal punto O sopra un piano qualsivoglia, si ottengono nella projezione tutt' i teoremi relativi all' esagrammo di Pascal. Le 6 rette a e le 15 rette c dànno i vertici e i lati de' 60 esagoni che si possono formare con sei punti di una conica; le 60 rette p dànno le rette di Pascal; ai vertici de' triedri di 1ª specie corrispondono i 20 punti di Steiner; ai vertici de' triedri di 2ª specie i 60 punti di Kirkman; agli spigoli dell' esaedro le 15 rette di Steiner-Plücker; ai sei pentaedri le sei figure del sig. Veronese (*); ai punti S i 15 punti di Salmon; alla rette k le 20 rette di Cayley-Salmon; ecc.

Prescindendo da questa projezione, le proprietà suesposte appartengono ad ogni sistema di 15 rette formanti 15 triangoli, epperò si verificano per ciascuna delle 36 *bissestuple* (Doppelsechse di Schläfli) formate dalle 27 rette di una superficie *generale* di 3⁰ ordine. Per questa, si hanno dunque 36 esaedri analoghi a quello sopra accennato. I 36 esaedri si distribuiscono in 120 *terne* corrispondenti alle 120 coppie di triedri conjugati (1ª specie): i tre esaedri di una stessa terna hanno in comune due vertici ópposti, quelli de' corrispondenti triedri. Ciascun esaedro entra in 10 terne.

Ciascun esaedro è una soluzione del problema di ridurre l'equazione della superficie alla forma

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 = 0$$

essendo identicamente

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0.$$

Le dieci forme analoghe alla seguente

$$(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2) + (x_5 + x_6)(x_6 + x_4)(x_4 + x_5) = 0$$

che si ricavano dalla precedente, dànno le dieci coppie di triedri conjugati, corrispondenti ad uno stesso esaedro.

Data una soluzione $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$, le altre 35 dipendono da una sola equazione di 2⁰ grado.

Ciascun esaedro individua una sviluppabile di 3ª classe (e 4⁰ ordine), toccata dai sei piani. Per un teorema di Reye, le 36 sviluppabili sono inscritte in uno stesso pentaedro, c he èil pentaedro di Sylvester, cioè quello che permette di ridurre l'equazione della superficie a cinque cubi. Per tal modo il problema „trovare il pentaedro d'una superficie di 3⁰ ordine, della quale si conoscono le

*) Nuovi teoremi sull' hexagrammum mysticum (Accademia dè Lincei, l. c.).

27 rette“ coincide con quest' altro „trovare i cinque punti comuni a due cubiche piane aventi due dati punti comuni, l'uno doppio per l'una, l'altro doppio per l'altra.“

Roma, novembre 1877. L. Cremona.

J. Dienger: Der mittlere Gewinn oder Verlust bei der Lebensversicherung für die ganze Versicherungsdauer. (Rundschau der Versicherungen 1877.)

Die hier behandelte Frage ist schon mehrfach Gegenstand von besonderen Arbeiten gewesen, und zwar unter der Bezeichnung „mittleres Risiko“; trotzdem war es nothwendig, dieselbe aufs Neue zu untersuchen, da die seitherigen Lösungen nicht genügend schienen, weil gewöhnlich von Grundsätzen ausgegangen wurde, die der Natur der Sache nicht entsprachen. Zugleich ist dieser Gegenstand für die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung von Interesse, so dass eine eigentlich rein mathematische Aufgabe vorliegt.

Die Annahmen, welche gemacht werden, bestehen in Folgendem: Eine Versicherungsgesellschaft hat n Personen versichert; die r^{te} Person versicherte sich mit einem Kapitale K_r, zahlbar beim Tode, oder bei Erreichung des m^{ten} Lebensjahres, gegen eine jährliche Nettoprämie P_r. Das Deckungskapital (Reserve) für den jetzigen Zeitpunkt, bei dem dieser Versicherte a Jahre alt ist, heisst D_r. Die Wahrscheinlichkeit, im Laufe des ersten, zweiten, ... folgenden Jahres zu sterben, sei $w_{r,1}$; $w_{r,2}$; ..., bekannt aus der (angenommenen) Sterblichkeitstafel. (Dabei ist $w_{r,m-a}$ die Wahrscheinlichkeit, das Alter $m-1$ zu erleben.) Die Summe $w_{r,1}+\cdots+w_{r,m-a}$ ist $=1$.

Stirbt der Versicherte im s^{ten} Jahre, von jetzt an gerechnet, so erleidet die Anstalt einen Verlust, dessen baarer Werth $X_{r,s}-D_r$, wo $X_{r,s}=\frac{K_r}{p^s}-\frac{P_r}{p^{s-1}}-\cdots-\frac{P_r}{p}$ (p ist der gebrauchte Zinsfuss). Der mittlere (baare) Werth aller Verluste ist also

$$w_{r,1}(X_{r,1}-D_r)+w_{r,2}(X_{r,2}-D_r)+\cdots+w_{r,m-a}(X_{r,m-a}-D_r).$$

Diese Grösse ist, den Einrichtungen der Anstalt gemäss $=0$, d. h. ein Theil ihrer Glieder ist positiv, der andere negativ (Gewinn). Daraus folgt sofort, dass

$$D_r = w_{r,1} X_{r,1} + w_{r,2} X_{r,2} + \cdots + w_{r,m-a} X_{r,m-a}.$$

Will nun die Versicherungsanstalt für die ganze Dauer der bestehenden n Verträge die Wahrscheinlichkeit des baaren Werthes eines bestimmten Verlustes (oder Gewinnes) ermitteln, so hat sie zu beachten, dass der erste, zweite, ..., n^{te} Versicherte im ersten, ..., letzten Jahre seiner Versicherung sterben kann. Setzt man

$$w_{r,1}\, y^{X_{r,1} - D_r} + w_{r,2}\, y^{X_{r,2} - D_r} + \cdots + w_{r,m-a}\, y^{X_{r,m-a} - D_r} = Y_r$$

(wo m und a mit r sich ändern können), so ist der Coefficient von y^V in dem Produkte

$$Y = Y_1\, Y_2 \cdots Y_n$$

die Wahrscheinlichkeit, dass der baare Werth des künftigen Verlustes gleich V sei. Die Werthe von V, die sich natürlich von selbst aus dem obigen Produkte ergeben, können positiv oder negativ sein; in letzterem Falle hat man einen Gewinn.

Nimmt man alle Exponenten als ganze Zahlen an; setzt $y = e^{xi}$ und schreibt dann X für die neuen Werthe der Y, so ist der fragliche Coefficient P gegeben durch

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-Vxi} X dx.$$

Setzt man noch

$$Z_r = w_{r,1} e^{X_{r,1} xi} + w_{r,2} e^{X_{r,2} xi} + \ldots; \quad Z_1 \ldots Z_n = Z;$$
$$D_1 + \ldots + D_n = D,$$

so ist auch

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-(D+V)xi} Z dx.$$

Eine bekannte Umformung ergiebt

$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} M \cos\,[\psi - (D + V)x]\,dx,$$

wo $M = M_1 \cdots M_n$; $\psi = \psi_1 + \cdot + \psi_n$; $Z_r = M_r e^{\psi_r xi}$. M_r ist dabei < 1, ausser wenn $x = 0$; ψ_r liegt zwischen $-\pi$ und $+\pi$.

Wird nunmehr n als sehr gross angenommen, so wird gezeigt (vorausgesetzt, dass Grössen der Ordnung $\frac{1}{n}$ vernachlässigt werden), dass gesetzt werden darf

$$M = e^{-\frac{1}{2}k^2x^2}, \quad \psi = Dx + Qx^3,$$

wo

$$k^2 = k_1^2 + \cdots + k_n^2, \; k_r^2 = w_{r,1}(X_{r,1} - D_r)^2 + w_{r,2}(X_{r,2} - D_r)^2 + \cdots = w_{r,1}X_{r,1}^2 + w_{r,2}X_{r,2}^2 + \cdots - D_r^2;$$

Q eine Grösse der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Daraus findet sich

$$P = \frac{1}{k\sqrt{2\pi}} e^{-u^2} + \frac{Qu}{k^4\sqrt{\pi}}(3 - 2u^2)e^{-u^2}, \text{ wo } V = uk\sqrt{2}.$$

Diese Grösse drückt also die Wahrscheinlichkeit aus, der Verlust werde $uk\sqrt{2}$ sein (in seinem baaren Werthe). Da V eine ganze Zahl ist, so ändern sich die (sehr vielen) Werthe von u je um $\frac{1}{k\sqrt{2}} = \delta$, d. h. es sind die positiven Werthe von u: δ, 2δ 3δ, ...

Will man die Wahrscheinlichkeit haben, dass der Verlust oder Gewinn zwischen den Gränzen $\pm \varrho k\sqrt{2}$ liege (ϱ ein Vielfaches von δ), so muss man die Werthe von P summiren, indem man u von $-\varrho$ bis $+\varrho$ durch die Unterschiede δ gehen lässt. Man erhält dadurch

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\varrho e^{-u^2}du + \frac{e^{-\varrho^2}}{k\sqrt{2\pi}}.$$

So lange u positiv ist, hat man einen Verlust. Den mittleren Werth des gesammten (wirklichen) Verlustes findet man also, wenn man in PV die Grösse u von 0 bis ∞ (durch die Unterschiede δ) gehen lässt, d. h. derselbe (das **mittlere Risiko**) ist

$$\sum_0^\infty PV = \sum_{u=0}^{u=\infty}\left[\frac{ue^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{u^2\sqrt{2}}{k^3\sqrt{\pi}}(3 - 2u^2)e^{-u^2}\right] = \frac{k}{\sqrt{2\pi}}$$

Da $\sum_{-\infty}^{+\infty} PV = 0$, so ist mittlerer Gewinn und mittlerer Verlust einander gleich. Die Grösse k^2 ist bereits oben angegeben und hat die bei Aufgaben dieser Art auftretende Form.

Damit ist die eigentliche Aufgabe gelöst. Dem Zwecke dieser Anzeigen entsprechend, habe ich natürlich nur die letzten Resultate angegeben.

In der betreffenden Abhandlung wurde dann noch die Frage gestellt, welches das mittlere Risiko für das laufende Jahr sei. In

ähnlicher Weise, wie bei der Hauptaufgabe findet sich

$$\frac{k}{\sqrt{2\pi}}, \text{ wo } k^2 = k_1^2 + \cdots + k_n^2; \quad k_r^2 = \frac{w_{r,1} K_r^2 + w_{r,2} R_r^2}{p^1} - D_r^2$$
$$= w_{r,1}\left(\frac{K_r}{p} - D_r\right)^2 + w_{r,2}\left(\frac{R_r}{p} - D_r\right)^2,$$

wo R_r die (zurückzustellende) Reserve für den Jahresschluss ist, wenn der r^{te} Versicherte das Jahr überlebt, und $w_{r,2} = 1 - w_{r,1}$ (also nicht mit obigem $w_{r,2}$ zusammenfällt); $w_{r,1}$ aber die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, im Laufe des Jahres zu sterben. Uebrigens findet man auch

$$p^2 k_r^2 = w_{r,1}(1 - w_{r,1})(K_r - R_r)^2.$$

Da hiermit die mathematische Untersuchung beendet ist, so mögen die weitern Untersuchungen über die Bedeutung des mittlern Risikos hier übergangen werden.

Karlsruhe, den 17. November 1877.

J. Dienger.

J. W. L. Glaisher: Preliminary account of an enumeration of the primes in Burckhardt's tables (1 to 3,000,000) and Dase's tables (6,000,000 to 9,000,000). (Proceedings of the Cambridge Philosophical Society vol. III. pp. 17—23; 47—56.)

Burckhardt's *Tables des diviseurs* (1814—1817) give the least divisor of every number up to 3,036,000, and Dase's *Factoren-Tafeln* (1862—1865) give the least divisor of every number from 6,000,000 to 9,000,000. There is thus left a gap of three millions for which there exist no printed tables. In 1871 I commenced the enumeration of the primes in the six millions over whicht he published tables extend. The work was performed in duplicate by two computers independently; the two enumerations were then compared with one another and brought into agreement. Subsequently one of them was examined *de novo* throughout with the original tables.

A short account of the enumeration, as for as it had then proceeded, together with an abstract of the results for two of the millions, was published in the Report of the British Association for 1872. I have there given tables showing the agreement of the number of primes counted with the theoretical numbers derived from the logarithm-integral formula of Tchebycheff and Har-

greave, for the second and ninth millions, arranged in groups of 50,000. The second million was chosen for publication in preference to the first, chiefly because results derived from the counting of primes in the first million had been abready published by Legendre, Hargreave and others. Soon afterwards I become acquainted with the enumerations printed among the posthumous works of Gauss (*Werke* vol. II, pp. 436—447) and found many discrepancies between these results and my own. This taken in conjunction with the great difficulty of insuring accuracy caused me to lay aside the work for some time.

Recently, however, I have had the whole enumeration performed again by a fresh computer who had had no connexion with the previous enumerations. It was thus found that the latter were very accurate, only a few errors being discovered, and in several of the millions none at all. The numbers given in this paper are therefore the result of a triple calculation, and may, I believe, be relied upon.

The results of the enumeration are exhibited in six square tables, each table referring to a million, and the arrangement being similar to that adopted by Gauss in his tables above referred to. If, for convenience of expression, we call the hundred numbers between $100n$ and $100(n+1)$ a 'century' (so that *e. g.* the hundred numbers between 1,000,000 and 1,000,100 form a century) then the table shows the number of centuries each of which contains one prime, the number of centuries each of which contains two primes &c. Thus, for example, the first column of the table for the seventh million shows that of the thousand centuries between 6,000,000 and 6,100,000 two centuries are composed wholly of composite numbers, two centuries contain each one prime, seventeen centuries contain each 2 primes, fifty-two contain each 3 primes, and so on there being only one century that contains 14 primes, and no century that contains a greater number than 14.

The number of primes in each quarter million of the six millions is as follows:

	first million	second million	third million
First quarter	22,045	17,971	17,150
Second „	19,494	17,682	16,991
Third „	18,700	17,455	16,922
Fourth „	18,260	17,325	16,822
Total	78,499	70,433	67,885.

	seventh million	eighth million	ninth million
First quarter	15,967	15,851	15,712
Second „	15,941	15,772	15,652
Third „	15,950	15,768	15,746
Fourth „	15,941	15,767	15,650
Total	63,799	63,158	62,760

and the number of primes in each group of 100,000 is shown in the following table:

	first million	second million	third million	seventh million	eighth million	ninth million
I.	9,593	7,216	6,874	6,397	6,369	6,250
II.	8,392	7,225	6,857	6,402	6,306	6,301
III.	8,013	7,081	6,849	6,425	6,348	6,283
IV.	7,863	7,103	6,791	6,337	6,299	6,285
V.	7,678	7,028	6,770	6,347	6,301	6,245
VI.	7,560	6,973	6,809	6,402	6,305	6,326
VII.	7,445	7,015	6,765	6,338	6,347	6,281
VIII.	7,408	6,932	6,716	6,375	6,245	6,299
IX.	7,323	6,957	6,746	6,411	6,364	6,220
X.	7,224	6,903	6,708	6,365	6,274	6,270
Total	78,499	70,433	67,885	63,799	63,158	62,760

Thus for example the number of primes between 2,500,000 and 2,600,000 is 6,809.

In the notes to the new edition of Gauss's *Werke* (1876) nineteen errata, found by Dr. Meissel, of Iserlohn, are pointed out in Gauss's first million, and when these are corrected the values agree entirely with my own, except in one instance viz. the number of primes in the 354th chiliad should be 76 instead of 79.

In a paper in the *Mathematische Annalen* vol. II (1870) pp. 636—642, Meissel has given the errata in the first million, that are reproduced in the second edition of Gauss's *Werke*. The error in the 354th chiliad is not noticed by Meissel in this paper, but as he assigns 7,863 as the number of primes between the 300th and the 400th chiliad, which agrees with that given above, it is clear that he must have used the correct value in his calculation. Meissel gives the number of primes in each group of 100,000 in the first million, and the values agree with my own. In the first 100,000 however he gives the number of primes as 9,592 while the number in the above table is 9,593. This discrepancy is no doubt due to the fact that I have counted both 1 and 2 as primes, while Meissel has not included 1, for in Gauss's table the number of primes in the first chiliad is given as 168, and Meissel

accepts this value, but if 1 and 2 be both counted as primes the number is 169.

No doubt at all can therefore exist with regard to the accuracy of the enumeration for the first million. I have given (p. 49) a corrected table for this million corresponding to that which occurs on p. 65 of vol II of the third edition of Legendre's *Théorie des Nombres*.

It is unnecessary to give in detail the errata in the tables for the second and third millions in Gauss's *Werke*. The number of primes in each group of 100,000 has been given above, and on comparing these values with those in Gauss, it will he found that in the second million, only two (viz. 1,200,000—1,300,000 and 1,400,000—1,500,000) agree. The value for the whole million in Gauss is 70,382.

In the third million the values agree in only three groups (2,000,000—2,300,000) and the value for the million in Gauss is 67,862.

In regard to my own paper in the British Association Report for 1872 the values for the ninth million were found to be correct, but there were 5 errors in the second million.

I hope to publish a more full account of the enumeration giving the square tables for each group of 100,000 with the corresponding theoretical values from Legendre's and Tchebycheff's formulae, but the enumeration has occupied so much time and is of so troublesome a nature that it seemed desirable to publish the general results without further delay.

I have also had all the instances in which there are less than four primes in a century looked out in the tables, and all the cases noted in which there occur more than 50 consecutive composite numbers. A list of the groups of composite numbers so found in the first three millions was exhibited to the London mathematical Society on May 10, 1877. The two most noteworthy stretches are a group of 111 consecutive composite numbers between 370,261 and 370,373 and of 113 between 492,113 and 492,227. The occurence of these long sets of numbers without a prime in the first half million is remarkable. The longest stretch noted in the three millions occurs in the third million and consists of 147 consecutive composite numbers (2,010,733—2,010,881) and the next longest occurs in the second million, where there are two stretches each of 131 (1,357,201—1,357,333 and 1,561,919—1,562,051).

I may mention that in the tables there is no mark to be seen corresponding to the numbers 2,882,699 and 6,036,637, no doubt owing to the type having slipped back. The former of these numbers is divisible by 19, the latter I have found to be prime.

Cambridge, 1877 September 21.

J. W. L. Glaisher.

E. Koutny: die Normalenflächen der Flächen 2. O. längs ebener Schnitte derselben. (Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Sitzungsberichte, 75. Band, 1877.)

Dieser so wichtigen Gruppe von windschiefen Flächen ward bisher eine geringe Beachtung zu Theil und wurden bei ihrer constructiven Behandlung zumeist Näherungsmethoden benützt, die auf Wissenschaftlichkeit wohl keinen Anspruch erheben konnten. Nur der einfachste Specialfall dieser Art, die „Normalenfläche eines dreiaxigen Ellipsoides längs einer zu einem Hauptschnitte parallelen Ellipse“ wurde bisher untersucht.

In obiger Abhandlung wird die bezeichnete Flächengruppe in grösster Allgemeinheit behandelt und namentlich dahin gestrebt, dass in jedem Falle die wichtigsten Elemente für alle Constructionen an diesen Flächen in streng wissenschaftlicher Weise fixirt werden — indem vorzugsweise die Berührungsebenen von mindestens drei bestimmten Punkten (worunter stets der Central- und der unendlich ferne Punkt) jeder geraden Erzeugenden festgestellt, die wichtigeren Contouren aufgesucht, insbesondere jedoch einfache Methoden abgeleitet werden, um die Doppellinien dieser Flächen direct und genau auszumitteln.

Die vollständige Lösung des letzteren Problems ist das wichtigste Ergebniss der vorliegenden Untersuchung. Man wird hiebei zugleich unmittelbar zu interessanten Aufgaben der ebenen Geometrie geleitet. So ist der geometrische Ort der Schnittpunkte von Normalenpaaren einer Curve 2. O., die nach einem bestimmten Gesetze gebildet werden, zu untersuchen und zu verzeichnen. Bei dem allgemeinsten Falle, wo die Leitcurve der Normalenfläche weder ein Diametralschnitt der Leitfläche 2. O., noch ein Kreisschnitt ist und auch auf keiner ihrer Hauptebenen senkrecht steht, gelangt man zu dem Resultate, dass jede Normale von zwei anderen geschnitten wird, deren Fusspunkte in der Leitcurve mit jenem der ersteren

Normale verbunden, zwei Tangenten einer fixen Parabel bilden, welche die Hauptaxen der Leitcurve in bestimmten Punkten berührt. Wenn wir die Fläche auf die Ebene der Leitcurve projiziren, wodann ihre geraden Erzeugenden sich als Normalen der Leitcurve darstellen, und sodann die Curve der Schnittpunkte der einander nach dem ausgesprochenen Gesetze zugewiesenen Normalen construiren, so ergiebt dies eine Curve 3. Grades als Projection der Doppellinie dieses allgemeinsten Falles der Normalenfläche, zu welcher jede zweite Projection nun einfach ermittelt werden kann. Die Doppellinie selbst ist eine Raumcurve 3. Grades, welche die Leitlinie stets in zwei (reellen oder imaginären) Punkten schneidet, ausserdem aber deren Ebene noch in einem dritten Punkte durchschneidet, welcher als Schnittpunkt der zwei in diese Ebene fallenden Erzeugenden sofort erhalten wird. Diese Doppellinie wird von jeder Erzeugenden der windschiefen Fläche doppelt geschnitten und kann somit zwei Leitcurven der letzteren ersetzen.

Es ist eigenthümlich, dass der besprochene allgemeinste Fall auch der einzige ist, welcher eine Raumcurve als Doppellinie besitzt. Uebergeht man zu welch' immer Specialisirung, so zerfällt diese Doppellinie sofort in eine Curve 2. O. und eine Gerade, wobei wieder die Curve 2. O. in eine Gerade verflachen, die Gerade unendlich ferne fallen kann etc. Der genannte Strahlenbüschel 2. O. zerlegt sich hiebei in ähnlicher Weise in 2 Büschel 1. O., worunter zumeist Parallel-Strahlenbüschel vorkommen.

Für Kreisschnitte der Flächen 2. O. als Leitcurven der Normalenflächen folgt das Resultat, dass die eine Doppellinie sich wieder als Kreis auf der Leitlinienebene orthogonal projicirt und die zweite eine auf der Kreisebene im Mittelpunkte senkrecht stehende Gerade ist

In solcher Art werden vorerst die allgemeinen Fälle eingehend behandelt und die gewonnenen Resultate für die wichtigeren Specialfälle umgestaltet.

Die Ergebnisse der Abhandlung dürften auch geeignet sein, eine sichere Basis für weitere dieses Flächengebiet berührende Untersuchungen, wie z. B. über die ebenen Schnitte, Berührungscurven, Beziehungen zur Leitfläche, zu ihren Richtungskegeln oder Richtungsebenen etc. abzugeben.

Graz. E. Koutny.

Kurd Lasswitz: Atomistik und Kriticismus. Ein Beitrag zur erkenntnisstheoretischen Grundlegung der Physik. (Braunschweig, Friedrich Vieweg & Sohn. 1878. 8. VIII u. 111 S.)

Die grosse Bedeutung, welche die kinetische Theorie der Gase für die Physik gewonnen hat, lässt es wünschenswerth erscheinen, den allgemeinen Bedenken gegenüber, denen die atomistischen Theorien zu unterliegen pflegen, die Berechtigung einer kinetischen Atomistik überhaupt vom erkenntnisstheoretischen Gesichtspunkte aus zu untersuchen. Obige Schrift bemüht sich nunmehr, die Grundlagen der theoretischen Physik durch ein Zurückgehen auf die Grundlagen des physikalischen Erkennens nach Möglichkeit klarzustellen, indem sie die atomistische Theorie von ihrem gewohnten Boden, dem Dogmatismus, ablöst und ihren Werth an den Principien des Kriticismus prüft. Es ergiebt sich dabei, dass die Natur unserer Sinnlichkeit, insofern sie als subjectiver Factor unserer Erfahrung die Gestaltung derselben mitbedingt, bei dem Streben nach wissenschaftlicher Orientirung in der Welt uns nöthigt, auf die Bewegung undurchdringlicher, starrer, sehr kleiner Elementartheile zurückzugehen, um eine anschauliche und befriedigende Naturerklärung zu erhalten. Die kinetische Atomistik wird dadurch zu einer nothwendigen Folge der systematischen Erkenntnissthätigkeit des Menschen, und die vielfach hypothetischen oder wenig bestimmten Grundbegriffe der Physik erhalten einen einheitlichen und durchsichtigeren Charakter. — Bei der Vertheidigung der kinetischen Atomistik gegen etwaige Einwürfe kommen die Vorstellungen über *fernwirkende Kräfte*, die *Principien der Mechanik*, die *aprioristischen Elemente der Physik* und insbesondere der Begriff der *Elasticität* zu einer kritischen Besprechung. — Durch diese Untersuchung hofft der Verfasser einen Beitrag zur Feststellung und Aufklärung der Grenzen zwischen Naturwissenschaft und Philosophie geliefert zu haben, welcher vielleicht dahin wirken könnte, die empirischen Forscher einerseits den versöhnenden Bemühungen der Philosophen geneigter zu machen, andrerseits diejenigen unter ihnen, welche selbstständig über die Grenzprobleme der Naturwissenschaft philosophiren, hinzuweisen auf die drohende Gefahr des Dogmatismus, die einzelne Naturforscher bereits überrascht hat.

Gotha. K. Lasswitz.

Hermann Klein: Theorie der Elasticität, Akustik und Optik. Zugleich als Supplement zu dem Lehrbuch der Physik von Dr. Paul Reis. Leipzig 1877.

Um den Zweck, den ich bei Bearbeitung dieses Buches zu erreichen mich bemüht habe, und die Art der Darstellung der einzelnen Theorien leicht begreiflich machen zu können, möchte ich eine Eintheilung der Physiker vorausschicken, wodurch zugleich die Arbeiten derselben klassificirt werden. Während einige Physiker, die ich Forscher nennen will, sich zur Aufgabe machen, das Gebiet unserer physikalischen Erkenntniss durch neue Experimente oder weittragende Hypothesen zu vergrössern, bestreben sich andere, welche ich Lehrer nenne, die von den Forschern gewonnenen Resultate in zusammenhängenden Darstellungen weiter zu verbreiten. Als dritte Gattung bezeichne ich dann diejenigen, denen es vergönnt ist, nach beiden angegebenen Richtungen zu wirken. Durch die Abfassung des hierdurch angezeigten Buches übernehme ich meinem Berufe entsprechend die Verpflichtung eines Lehrers. Nun ist, um meinen Standpunkt noch genauer zu bestimmen, nothwendig, anzugeben, wer belehrt werden soll. Lehrbücher der Experimentalphysik giebt es genug. In den meisten derselben findet man, wie ich schon an einem anderen Ort*) angegeben habe, lange Rechnungen angestellt unter ängstlicher Vermeidung des Namens Differential, während vielleicht nur wenige Seiten weiter eine Integration auszuführen verlangt ist; auch kann man nicht selten die wenig tröstenden einleitenden Worte finden: „Man findet mit Hülfe höherer Rechnungen —“. Das vorliegende Buch soll nun die Theorien, wie sie in den Originalarbeiten vorliegen, mit Benutzung des dabei gebrauchten mathematischen Apparates wiedergeben und somit allen Lehrern der Physik einen bequemen Ersatz für die oft schwer zu erlangenden Originalarbeiten bieten, sodann besonders den Studirenden auf Universitäten und technischen Hochschulen einen Dienst erweisen, wenn sie sich mit der theoretischen Behandlung physikalischer Probleme bekannt machen und sich zum Studium der von den Forschern gelieferten Arbeiten vorbereiten wollen.

Die mathematische Behandlung der im Titel bezeichneten Abschnitte der Physik dient als Erweiterung eines jeden Lehrbuchs der Experimentalphysik, kann somit als ein selbstständiges Werk angesehen

*) Elemente der analytischen Geometrie und höheren Analysis mit besonderer Berücksichtigung physikalischer Aufgaben. Dresden 1874.



Kurd Lasswitz: Atomistik und Kriticismus. Ein ... ge-
kenntnisstheoretischen Grundlegung der Physik ... tern
Friedrich Vieweg & Sohn. 1878. 8. VIII u. ... e ich
... lossen

Die grosse Bedeutung, welche die kineti... hen bei-
für die Physik gewonnen hat, lässt es wü... usgeführt
den allgemeinen Bedenken gegenüber, den... on der An-
rien zu unterliegen pflegen, die Berecht... ien und der
mistik überhaupt vom erkenntnissth... Das Lehrbuch
zu untersuchen. Obige Schrift be... asser desselben
lagen der theoretischen Physik ... Beobachtungs-
Grundlagen des physikalische... esammelt hat.
zustellen, indem sie die ato... er Literatur habe ich
Boden, dem Dogmatismu... runde gelegten Lehrbuch
cipien des Kriticismus ... sind, welche bei Erforschung
unserer Sinnlichkeit, ... oder Gesetze eine hervorragende
fahrung die Gestalt ... en aber, welche bei den einzelnen Ab-
wissenschaftliche... orden sind, habe ich meistens entweder bei den
wegung und ... oder im Zusammenhang bei den einzelnen Para-
zurückzugeh... wiesen
rung zu e... geben.
nothwer... Inhalt des ganzen Buches enthält dem Titel gemäss drei
Mensc... 1. Elasticitätslehre S. 1—132. 2. Wellenbewegung,
Gru... S. 133—256. 3. Optik 257—524.
si... I. Unter der Ueberschrift: „Die Elasticität und deren Gesetze“ findet sich auf S. 1—27 die Aufstellung der allgemeinen Gleichgewichtsgleichungen mit Einführung der Elasticitätskräfte. Statt der Kräfte werden dann die Verschiebungen eingesetzt und damit die Gleichgewichtsbedingungen transformirt und mit Hülfe derselben erörtert: die Stellungsfläche, das Elasticitäts- und Spannungsellipsoid, die Hauptspannungen, die Elasticitätsfläche, die Hauptschubspannungen und das Verschiebungs- oder Deformationsellipsoid.
— S. 28—29 enthält die Paragraphen mit folgenden Ueberschriften: Zug- und Druckelasticität, Biegungselasticität, Torsionselasticität, Zugfestigkeit, Bruchfestigkeit, Druckfestigkeit, Zusammengesetzte Festigkeit, Schubfestigkeit, Torsionsfestigkeit. Dabei sind die betreffenden Durchbiegungen für verschiedene Belastungs- und Befestigungsarten, Maximalbelastung berechnet und die Formen der Körper von gleichem Widerstand für die verschiedenen Befestigungsarten angegeben. Eine besondere Betrachtung ist dem Draht, Schachtgestängen, Kettenbrücken und Telegraphendrähten gewidmet. Seite

132 enthält einen Anhang (ich habe diesen Abschnitt Anhang
t, weil er sich keinem Paragraphen des zu Grunde gelegten
es anschliessen lässt), in dem nach der eleganten Darstel-
Clebsch Folgendes behandelt wird. Anwendung der all-
rmeln der Elasticität auf gerade stabförmige und auf
Körper. In beiden Abtheilungen sind einmal die
in den Elementen so klein genommen, dass auch
ein bleiben und dann so, dass die Verschiebungen
ehr klein bleiben. In diesem Anhang werden
hungen gewonnen, die im zweiten Theil bei
tirt werden.
olgenden Theilen sind die in jedem Lehrbuch
xperimentaluntersuchungen einer theoretischen Be-
unterworfen. Besonders hervorheben will ich noch Fol-
es.

II. Die Ausbreitung der Wellen ist nach Riemann's Darstellung gegeben und dabei nach Helmholtz das Geschwindigkeitspotential eingeführt worden mit der Untersuchung der Bedingungen, unter denen überhaupt eine derartige Funktion existirt. Bei den Transversalschwingungen gehe ich aus von den allgemeinen Differentialgleichungen von Clebsch und gebe dann noch in besonderen Nummern die gewöhnliche Theorie. Ebenso ist die Schwingung von Platten und Membranen behandelt, wobei denn zum Schluss die Schwingungen rechteckförmiger Luftplatten von Kundt Berücksichtigung finden. Bei den Klängen der Saiten sind die Theorien von Helmholtz in den Beilagen zu den Tonempfindungen weiter ausgeführt und die Schwingungsformen bestimmt worden. Die Theorie der Longitudinalschwingungen ist nach Helmholtz mit Hülfe des Geschwindigkeitspotentials gegeben und dann in die Gesetze die reducirte Länge der Orgelpfeifen eingeführt worden.

III. Unter der Ueberschrift: „Begriff und Wesen des Lichtes" habe ich aufgenommen die Differentialgleichungen der Schwingungen des Aethers und deren Integration. Ebene Wellen, Schwingungen in symmetrischen Mitteln. Ausführlich sind die Lehren der Katoptrik und Dioptrik behandelt. Bei der Betrachtung der Systeme von Kugelflächen sind alle Cardinalpunkte bestimmt und darnach in einer Nummer sechs vortheilhafte Constructionen zur Auffindung des Bildes für gegebenen Gegenstand und Gegenstandsweite zusammengestellt. Die allgemeine analytische Bedingung für die Lage der Brennpunkte ist benutzt zur Bestimmung eines reinen Sonnenspec-

trums. Seite 326—335 enthält die Erklärung der Dispersion von Cauchy und die Betrachtungen über diese von Briot, dessen Theorie aber auch nicht genügt. Dabei habe ich aufgenommen die Resultate der mühsamen Rechnungen von Ketteler und dessen Construction der Dispersionscurven. Hieran anknüpfend finden sich S. 364—401 die Theorien von Sellmeier, O. Meyer, Helmholtz und Ketteler von der anomalen Dispersion. Die Beugung S. 415—437 ist nach den Theorien von Schwerd und Fresnel behandelt. Die Reflexionstheorie an einfach brechenden Mitteln ist ausführlich behandelt und in einem Anhang S. 475—483 findet sich die Ableitung der Cauchy'schen Formeln von Eisenlohr. Die Erscheinung an dünnen Krystallblättchen bei convergirendem Lichte und die bei Circularpolarisation ist soweit durchgeführt, dass die Curven der hellen und dunklen Linien analytisch entwickelt sind. Die Behandlung der Doppelbrechung findet ihren Ausgang in den allgemeinen Gleichungen der Aetherschwingungen und ist selbstverständlich weiter ausgeführt als es im Lehrbuch angegeben ist.

Dresden. H. Klein.

Röthig, der Malus'sche Satz und die Gleichungen der dadurch definirten Flächen. Journal für reine und angewandte Mathematik. Band 84. S. 231—237. Berlin bei Reimer.

Die Arbeit ist eine Folgerung aus den in dem Werke: „Röthig, die Probleme der Reflexion und Brechung, Leipzig 1876 bei Teubner" gegebenen Resultaten. Sie zeigt die Existenz der Flächen, zu welchen sämmtliche von einem festen Punkte ausgehende und nach beliebig vielen Brechungen oder Reflexionen an beliebigen Flächen im letzten Mittel verlaufende Strahlen Normalen sind dadurch, dass sie zugleich die Gleichungen dieser Flächen angiebt. Es werden nämlich die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Fläche als Functionen dreier Variabeln α, β, γ dargestellt, zwischen denen die Gleichung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

besteht.

Berlin. O. Röthig.

F. Reuleaux: Ueber einige Eigenschaften der Regelschraube. (Verh. des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses, 1878, I. Heft, mit 2 Tafeln).

Die von einer Geraden beschriebene gemeine Schraubenfläche wird hinsichtlich wichtiger Eigenschaften der Behandlung unterworfen. Der Verfasser definirt und unterscheidet zunächst vier Klassen von Regelschrauben:

1) die axiale
2) die geschränkte } rechtwinklige Regelschraube,
3) die axiale
4) die geschränkte } schiefwinklige Regelschraube,

und bespricht jede einzeln. Es wird nachgewiesen, dass die erzeugende Gerade einen mit der Schraube conaxialen Normalcylinder im einfachsten Falle in zwei Körper (Schraube und Mutter) zerlegt, und dass diese Körper sich specifisch nicht von einander unterscheiden. Bei den schiefwinkligen Schrauben entstehen statt zweier unendlich viele, einander wie Schraube und Mutter, jedes das nächstvorige umschliessende Gebilde, welche sämmtlich von einer einzigen und zwar stetigen Fläche begrenzt werden. Als charakteristisch stellt sich dabei das die Achse zunächst umgebende Schraubengebilde heraus; der Verfasser nennt es die Kernschraube. Er hat Modelle in Gyps hergestellt, mittelst eines feinen Drahtseilchens auf der Leitspindeldrehbank geschnitten, welche für die Zwecke des Unterrichtes eine unmittelbare Anschauung der gleichzeitig entstehenden Gebilde geben.

In § 4 erfährt besondere Beachtung die abwickelbare Regelschraubenfläche. Sie ist bekanntlich die Fläche derjenigen „geschränkten" Regelschraube, bei welcher der Steigungswinkel an dem von den Erzeugenden berührten Cylinder (dem „Kehlcylinder") gleich ist dem Winkel, welchen die Erzeugende mit einer zur Schraubenachse normalen Ebene einschliesst, dieser Winkel wird hier der Anlagewinkel genannt.*) Es wird nachgewiesen, dass mit der in die Ebene abgewickelten Umfläche dieser Schraube, welche Fläche eine zweiblättrige ist, sich Regelschrauben von verschiedener Steigung und verschiedenem Kehlhalbmesser bewickeln lassen, dass jedoch der Anlagewinkel für die Fälle, in welchen dieses möglich ist, zwischen $\pm 45^{0}$ eingeschlossen liegt. Im Grenzfall hat der Kehlcylinder die Hälfte des Kehlkreishalbmessers der planliegenden Fläche zum Halb-

*) In Formel (17) der Abhandlung steht irrigerweise $\cot g\, \alpha$ statt $tg\, \alpha$. F. R.

messer. Durch Modelle, an welchen die Mantelflächen durch ganz dünne Messingblechblätter veranschaulicht werden, hat der Verfasser diese Untersuchung für den Unterricht vorführbar gemacht.

Nachdem in § 5 gezeigt worden, welche Anwendungen die gewonnenen Sätze auf die in der mechanischen Technik üblichen Schrauben finden, wendet sich die Abhandlung in § 6 zur näheren Betrachtung der Haupt- oder Meridianschnitte der verschiedenen Regelschrauben. Es wird gezeigt, dass die allgemeine Gleichung der Hauptschnittcurve sich in die einer gleichseitigen Hyperbel und die einer Curve zerlegen lässt, welche der Quadratrix des Dinostrates ähnelt, weshalb der Verfasser vorschlägt, diese zweite Curve als dinostratische Schraubencurve zu bezeichnen. Vorher hat er nämlich darauf hingewiesen, dass die Quadratrix des Dinostratos mit ihren aufeinanderfolgenden Aesten als der Hauptschnitt einer Schraube angesehen werden kann. Die Verzeichnung der Hauptschnittcurve der Regelschraube wird hierauf so vorgenommen, dass deren Coordinaten aus denen der Hyperbel und der „dinostratischen Schraubencurve“ zusammengesetzt werden.

In einem siebenten § werden nunmehr die Normalschnitte der Regelschraube näher betrachtet, wobei der Verfasser auf die bekannten Sätze eingeht, wonach die Normalschnittcurven der Regelschraube allgemeine Evolventen sind. Er weist darauf hin, dass die archimedische Spirale (die Normalschnittcurve der „axialen schiefwinkligen“ Regelschraube) zu diesen Curven gehört, nämlich die um den Grundkreishalbmesser verlängerte Evolvente ist. Hierbei wird sodann ein directes Verzeichnungsverfahren, welches wohl neu ist, angegeben, nach welchem eine Schaar verlängerter und verkürzter Evolventen mit Leichtigkeit und sehr übersichtlich aufgetragen werden kann.

Indem alsdann darauf hingewiesen wird, dass ein ähnliches Verfahren sich auf die cyklischen Curven aller Art anwenden lassen würde, wird gefunden, dass dasselbe wesentlich noch bei den Orthocykloiden — so möchte der Verfasser die bei Rollung des Kreises auf der Geraden beschriebenen Cykloiden der Deutlichkeit halber genannt wissen — praktische Dienste leisten kann. Dies wird weiter verfolgt, auch später hervorgehoben, wie das in Rede stehende Verfahren geeignet sei, das einfach Arithmetische in der Fortschreitung der betreffenden Curven in die Erscheinung treten zu lassen.

Im achten und letzten § werden die Parallelprojectionen der Schraubenlinie besprochen, wobei folgender Satz entwickelt wird: Die

rechtwinklige Parallelprojection der gemeinen Schraubenlinie ist gleich derjenigen einer allgemeinen Orthocykloide, welche in der Ebene eines Normalschnittes des Schraubencylinders liegt, und deren Grundlinie der Projection der Achse des Schraubencylinders parallel ist.

Hieran schliesst sich eine Betrachtung, wonach man diese Projection auch als den Rollzug einer auf einer Geraden unter besondern Voraussetzungen rollenden Ellipse ansehen kann, sie demnach auch als eine allgemeine elliptische Orthocykloide auffassen könne. Hieraus wird denn ein Verfahren abgeleitet, die genannte Projection der Schraubenlinie unmittelbar, d. h. ohne Zuziehung einer Hülfsconstruction, zu verzeichnen. Die Sinoide, bekannt als die „Gefährtin der Cykloide", stellt sich hierbei als besonderer Fall der elliptischen Orthocykloide heraus.

Berlin, Februar 1878. F. Reuleaux.

Rud. Wolf. Geschichte der Astronomie. (Bd. 16. der Geschichte der Wissenschaften in Deutschland, herausg. durch die histor. Commission der k. bay. Akad.)

— **Astronomische Mittheilungen Nr. 44 und 45.** (Vierteljahrsschrift der nat. Ges. in Zürich. Jahrgang 1877.)

— **Mémoire sur la période commune à la fréquence des taches solaires et à la variation de la déclinaison magnétique.** (Memoirs of the Roy. Astron. Society. Vol. 43: 1875—77.)

Was zunächst die „Geschichte der Astronomie" anbelangt, so hoffe ich, wie ich es bereits in dem Vorworte zu derselben aussprach, darin einen gewissen Fortschritt gegenüber den bis dahin vorhandenen Geschichtswerken über diese Wissenschaft erreicht zu haben, und zwar einen gedoppelten: Einerseits suchte ich meiner Geschichte eine Gliederung zu geben, welche alle Gebiete und Richtungen möglichst gleichmässig und übersichtlich zu behandeln erlaubte, während bis dahin die messende und rechnende oder die sogenannte praktische Astronomie, obschon sie gewissermassen dem Herz der Wissenschaft entspricht, fast ganz vernachlässigt wurde, und auch die literarische Thätigkeit nur beiläufig Erwähnung fand, — und andererseits versuchte ich eine Geschichte zu schreiben, welche

für jeden Gebildeten zugänglich und geniessbar, und doch auch im Stande sein sollte den Fachmann zu befriedigen, und glaube diess dadurch erreicht zu haben, dass ich den gelehrten Apparat, der Erstern erschrecken müsste und für Letztern dagegen zum Werthvollsten gehört, fast ausschliesslich den Noten zuwies. — In wie weit mir ein solcher gedoppelter Fortschritt wirklich gelungen ist, muss ich Andern zu beurtheilen und namentlich dem Erfolge zu entscheiden überlassen; dagegen glaube ich hier den meiner Geschichte zu Grunde liegenden Plan noch etwas genauer darlegen zu sollen: Dass ich das Ganze in drei Bücher eintheilte, von welchen das erste „die Astronomie der ältesten Völker" bis auf Regiomontan, das zweite „die Reformation der Sternkunde" durch Copernicus und voraus durch Kepler, und das dritte „die neuere Astronomie" von Newton bis auf die neueste Zeit umfasst, ist fast selbstverständlich und nichts Neues. Dagegen ist mir eigenthümlich, dass ich jedes dieser Bücher gleichmässig in vier Unter-Abschnitte oder Capitel theilte: Je das erste Capitel führt in chronologischer Ordnung die allgemeinen Fortschritte der Astronomie während dem zugehörigen Zeitabschnitte auf, dabei allerdings zunächst die systematische, in der sogenannten Mechanik des Himmels gipfelnde Astronomie ins Auge fassend, aber doch auch die grössern Fortschritte auf allen übrigen Gebieten kurz berührend, so dass die drei Capitel 1, 5 und 9 schon für sich allein eine ziemlich vollständige Geschichte der Astronomie bilden, und zur Noth mit Ueberschlagen der zwischenliegenden Capitel gelesen werden können. Je das zweite Capitel bespricht speciell die Fortschritte der Rechnungsmethoden, der instrumentalen Hülfsmittel, der Beobachtungsmethoden, und der aus unmittelbarer Messung und Rechnung hervorgehenden Resultate. Es bilden somit die drei Capitel 2, 6 und 10, wenn auch in jedem derselben die chronologische Ordnung gegenüber der Eintheilung in Materien etwas zurücktritt, doch für sich eine Geschichte der praktischen Astronomie. Je das dritte Capitel ist den Fortschritten der beschreibenden Astronomie gewidmet, je der Reihe nach Sonne, Mond, Planeten, Kometen, Meteore und Fixsterne ins Auge fassend, und es bilden so die Kapitel 3, 7 und 11 für sich eine Geschichte der sogenannten Topographie des Himmels. Je das vierte Kapitel endlich berichtet über die literarische Thätigkeit in dem betreffenden Zeitabschnitte, und es bilden so die Kapitel 4, 8 und 12 für sich eine etwelche Geschichte der astronomischen Literatur. — Auf den eigentlichen Detail kann ich natürlich hier nicht eintreten, — ich

muss mich darauf beschränken aufmerksam zu machen, dass meine Geschichte an historisch-literarischen und biographischen Notizen ausserordentlich reich ist, und so mit Hülfe des sorgfältigen Registers vielfach auch als Nachschlagebuch benutzt werden kann, — und zum Schlusse darauf hinzuweisen, dass, namentlich in der Geschichte der praktischen Astronomie, einzelne Partien in meiner Geschichte zum ersten Male eine etwas genauere historische Behandlung erhalten haben, so z. B. das numerische Rechnen (§§ 33, 109, 193), die Trigonometrie und die Logarithmen (§§ 36, 110—111, 194), die Kreistheilung (§§ 34, 115, 196—198), das Fernrohr (§§ 97, 113—114, 204—205), der Theodolit und Meridiankreis (§§ 39, 116, 200—201), die Uhr (§§ 40—42, 117, 210), die Parallaxenbestimmung (§§ 52, 126, 161—162, 186, 229—232), die Kassler-Schule (§§ 86—88, 122), — sodann auch die Sonnenflecken (127—128, 188, 233—236), die alten Planeten (55, 130—132, 238) etc.

Die „astronomischen Mittheilungen“ betreffend kann ich ganz kurz sein: Die kürzlich erschienene Nr. 44 giebt zunächst im Detail eine von mir gemachte neue Polhöhenbestimmung, und es mag hier genügen auf das Résumé der angewandten Beobachtungs- und Ausgleichungs-Methode hinzuweisen, welches ich in den astronomischen Nachrichten (Nr. 2165) gegeben habe; sonst enthält sie noch einige Notizen über die 1872 von Oppolzer, Plantamour und mir gemachte Längenbestimmung, für welche auf die von Plantamour redigirte Schrift: „Détermination télégraphique de la différence de longitude entre l'Observatoire de Zurich et les stations astronomiques du Pfänder et du Gäbris. Genève 1877 in 4“ verwiesen werden muss, — ferner eine kurze Andeutung über die nach einer neuen Methode bestimmten Elemente des Doppelsternsystemes ξ Ursae majoris, — endlich eine Fortsetzung des räsonnirenden Verzeichnisses der Sammlungen der Zürcher-Sternwarte, aus welchen die Beschreibung des abgekürzten Horner'schen Rechenstabes hervorgehoben werden dürfte. Die eben im Drucke befindliche Nr. 45 wird die auf Seite 182 meiner „Geschichte der Astronomie“ versprochenen Auszüge aus Kassler-Manuscripten, und eine weitere Fortsetzung des eben erwähnten Verzeichnisses bringen, in der die Detailbeschreibung eines in Zürich gegen Ende des 17. Jahrhunderts construirten eigenthümlichen Sonnen-Sextanten allgemeineres Interesse in Anspruch nehmen kann.

Das von der Roy. Astronom. Society herausgegebene „Mémoire“ endlich enthält gegenüber dem von mir in Nr. 42 und 43 meiner Mittheilungen gegebenen und in einem frühern Referate besprochenen nichts

wesentlich Neues, als eine übersichtliche Zusammenstellung der Sonnenfleckenliteratur. Es ist auf Aufforderung der englischen Gesellschaft entstanden und nach ihrem Wunsche in französischer Sprache abgefasst worden, um die Reproduction eines von mir für die Kensington-Ausstellung gemachten und dann jener Gesellschaft geschenkten Diagrammes als erläuternder Text zu begleiten, und den englischen Astronomen, welche sich für meine Arbeiten interessiren, aber nicht deutsch lesen, eine kurze Uebersicht der von mir erhaltenen Haupt-Resultate zu geben.

Zürich. R. Wolf.

C. Neumann: Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential. (Leipzig, im Verlag von B. G. Teubner, 1877.)

Alles was über die Theorie der partiellen Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = f(x, y, z)$$

heutzutage vorliegt, steht in engem Zusammenhang mit gewissen allgemeinen Untersuchungen über Gravitation, Elektricität und Magnetismus; basirt also auf der Betrachtung einer Materie, welche beliebig im *Raume* vertheilt werden kann, und welche, was ihre einzelnen Theilchen betrifft, dem Newton'schen Gesetz: $\frac{m\mu}{E^2}$, oder (was dasselbe) dem *Newton'schen Potential**):

$$(2) \qquad \frac{m\mu}{E}$$

sich subordinirt.

In ganz analoger Weise wird offenbar die Theorie der partiellen Differentialgleichung

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x, y)$$

in Zusammenhang gebracht werden können mit der Theorie einer gewissen fingirten Materie, welche beliebig in der *Ebene* sich ausbreiten lässt, und deren einzelne Theilchen nach dem Gesetz: $\frac{m\mu}{E}$, d. i. nach Maassgabe des *Logarithmischen Potentials***):

---

*) Der Verf. des vorliegenden Werkes nennt das dem Newton'schen Gesetz entsprechende Potential kurzweg das *Newton'sche Potential.*

**) Die Potentiale (2) und (4) sind in ganz analoger Weise gebildet. Bezeichnet man nämlich die repulsive Kraft zwischen zwei Massentheilchen m

$$(4) \qquad m\mu \log \frac{1}{E}$$

auf einander wirken.

Diesen beiden Theorien, welche man kurzweg die des *Newton'schen* und die des *Logarithmischen Potentials* nennen kann, ist das vorliegende Werk gewidmet. Dasselbe hat im Ganzen eine dreifache Tendenz, nämlich erstens eine strengere Begründung einzelner Theile aus der Theorie des Newton'schen Potentials, zweitens eine weitere Ausdehnung und Vervollständigung dieser Theorie, endlich drittens eine möglichst *analoge* Entwickelung der Theorie des Logarithmischen Potentials.

Man würde sehr irren, wenn man glauben wollte, dass diese beiden Theorien in aller Strenge einander *analog* seien, dass etwa jeder Satz der einen unmittelbar auf die andere sich übertragen lasse. *Bezeichnet z. B.*, um an einen bekannten Satz aus der Theorie des Newton'schen Potentials zu erinnern, *σ eine gegebene geschlossene Fläche, und V das Newton'sche Potential irgend welcher unbekannten innerhalb σ gelegenen Massen, so wird dieses Potential für alle Punkte ausserhalb σ eindeutig bestimmt sein, sobald nur seine Werthe auf σ selber gegeben sind.* Versucht man aber zu diesem Satz den analogen Satz der Ebene, d. i. des Logarithmischen Potentials zu

---

und μ mit R, und das Potential der beiden Theilchen auf einander mit V, so ist

in der einen Theorie:	in der andern:
$R = \frac{m\mu}{E}$,	$R = \frac{m\mu}{E^2}$,
$V = m\mu \log \frac{1}{E}$,	$V = \frac{m\mu}{E}$,

also im einen, wie im anderen Falle:

$$R = -\frac{dV}{dE}.$$

Beiläufig sei bemerkt, dass der Verf. auf die Wichtigkeit der Theorie des Logarithmischen Potentials bereits im Jahre 1861 hingewiesen hat, in seiner Abhandlung im Borchardt'schen Journal, Bd. 59, Seite 335. In der That dürfte dieser Theorie unter den verschiedenen mathematischen Disciplinen eine herragende Stelle einzuräumen sein, theils in Folge ihrer Beziehung zur *allgemeinen Functionentheorie*, namentlich zum *Dirichlet'schen Princip* und zur Theorie der *conformen Abbildung*, theils in Folge ihrer Beziehung zu gewissen *hydrodynamischen Problemen* (Bewegung des Wassers in einer Röhre von gegebenem Querschnitt), theils in Folge ihrer Beziehung zu bekannten *elektrodynamischen Problemen* (Durchgang des elektrischen Stromes durch eine dünne Metallplatte von beliebiger Form), theils endlich in Folge von mancherlei Anregungen, die in ihr für die Weiterentwicklung der Theorie des *Newton'schen* Potential enthalten sind.

finden, so wird man auf nicht unerhebliche Schwierigkeiten stossen, — ja in Zweifel gerathen, ob ein solcher überhaupt existire.*)

Hieraus geht hervor, dass die in Rede stehenden beiden Theorien *nicht* überall parallel laufen, sondern mancherlei Discrepanzen darbieten. Und gerade diese Discrepanzen sind es, welche den Verf. veranlasst haben, der so wichtigen Theorie des Logarithmischen Potentials eine besondere Sorgfalt zuzuwenden.

Bei der weiteren Besprechung des vorliegenden Werkes werden wir Gebrauch machen von den dort angewandten Collectivbezeichnungen h und T.

In der *Ebene*, d. h. in der Theorie des Logarithmischen Potentials mögen nämlich h und T die Bedeutung haben:

$$h = 1,$$

$$T = \log \frac{1}{E};$$

andererseits mögen im *Raume*, d. h. in der Theorie des Newton'schen Potentials h und T folgende Bedeutungen haben:

$$h = 2,$$

$$T = \frac{1}{E}.$$

Alsdann wird in der einen wie in der andern Theorie die *Kraft*, mit welcher zwei Massentheilchen m und μ auf einander wirken, gleich $\frac{m\mu}{E^h}$, und ihr *Potential* gleich $m\mu T$ sein.

---

*) So ist z. B. der Satz *falsch* für eine Kreislinie σ vom Radius *Eins*. Denkt man sich nämlich innerhalb eines solchen Kreises σ irgend welche Massen M in beliebiger Weise vertheilt, und ausserdem im Centrum des Kreises einen Massenpunkt von der Grösse m, so werden die resp. von M und von M, m auf einen *äussern* Punkt a ausgeübten Potentiale V_a und W_a in der Beziehung stehen:

$$V_a + m \log \frac{1}{r} = W_a,$$

wo r den Abstand des Punktes a von m bezeichnet. Lässt man nun den äussern Punkt a nach irgend einer Stelle s der gegebenen Kreisperipherie σ hinrücken, und beachtet man, dass der Radius dieser Peripherie gleich *Eins* ist, so geht die vorstehende Beziehung über in $V_s + m \log(1) = W_s$, d. i. in:

$$V_s = W_s.$$

Diese Potentiale V und W haben also *auf σ einerlei* Werthe; auch rühren sie beide von Massen her, die *innerhalb* σ liegen; und dennoch findet zwischen ihren Werthen für einen *äusseren* Punkt a eine grosse Verschiedenheit statt. — Kurz, diese Potentiale V und W zeigen deutlich, dass der in Rede stehende Satz für eine Kreislinie vom Radius Eins *unrichtig* ist.

Im weitern Verlauf des Werkes zeigt der Verf. (vgl. in diesem Referat den Schluss des dritten Capitels), dass dieses Beispiel einer Kreislinie vom Radius Eins als ein ganz *singulärer* Fall anzusehen ist, und dass der in Rede stehende Satz, obwohl in diesem singulären Fall ungültig, im Allgemeinen dennoch besteht.

Erstes Capitel.

Allgemeine Theorie des Potentials.

Die 30 ersten Seiten dieses Capitels enthalten eine kurze (meistentheils nur historisch gehaltene) Recapitulation der von Laplace, Green und Gauss in der Theorie des Newton'schen Potentials aufgestellten Sätze, unter Beifügung der analogen Sätze aus der Theorie des Logarithmischen Potentials.

Wichtiger sind die Untersuchungen des Verf. über die *extremen* Werthe des Potentials innerhalb eines gegebenen massenleeren Gebietes, ferner über diejenigen Angaben, welche erforderlich sind, um das Potential innerhalb eines solchen Gebietes *eindeutig* zu bestimmen. Um näher hierauf eingehen zu können, zerlegen wir

die unendliche Ebene durch eine *geschlossene Curve* σ in einen äussern Theil $\mathfrak{A}$ und einen innern Theil $\mathfrak{J}$,	den unendlichen Raum durch eine *geschlossene Fläche* σ in einen äusseren Theil $\mathfrak{A}$ und einen innern Theil $\mathfrak{J}$,

und bezeichnen die zu $\mathfrak{A}$ (excl. σ) gehörigen Punkte mit a oder α, ferner die zu $\mathfrak{J}$ (excl. σ) gehörigen mit i oder j, endlich die auf σ gelegenen mit s oder σ. Ausserdem bezeichnen wir die Werthe, welche eine Function Φ in diesen Punkten a, α, s, σ, i, j besitzt, resp. mit Φ_a, Φ_α, Φ_s, Φ_σ, Φ_i, Φ_j. Solches festgesetzt, wollen wir nun die vom Verf. für die Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ aufgestellten Theoreme in möglichster Kürze und ohne weitere Begründung anzugeben suchen.*)

---

*) All' diese Theoreme sind vom Verf. bereits im Jahre 1870 (wenn auch in etwas anderer Form) publicirt worden in den Math. Annalen, Bd. III. Vergl. daselbst namentlich Seite 340—344 und 430—434. Uebrigens wird der sachkundige Leser (auch ohne weitere Angabe) sofort erkennen, wie viel von diesen Theoremen dem Verf. zuzuschreiben, und wie viel davon schon früher gefunden ist. So z. B. findet man in Gauss' allgemeinen Lehrsätzen Art. 26 eine Stelle, welche, übertragen in die hier angewandte Bezeichnungsweise, folgendermassen lautet:

Wenn von Massen, die sich blos innerhalb des endlichen Raumes $\mathfrak{J}$, oder auch ganz oder theilweise nach der Stetigkeit vertheilt auf dessen Oberfläche σ befinden, das Potential in allen Punkten von σ einen constanten Werth $= C$ hat, so wird das Potential in einem Punkte a des äussern unendlichen Raumes $\mathfrak{A}$
erstlich, wenn $C = 0$ ist, gleichfalls $= 0$,
zweitens, wenn C nicht $= 0$ ist, kleiner als C, und mit demselben Zeichen wie C behaftet sein.

Man sieht, dass diese Gauss'schen Sätze specielle Fälle sind von dem Theorem A. des Verf. (Seite 112 dieses Referates).

Theoreme, welche das Gebiet 𝔄 betreffen.

Hülfssatz. — Bezeichnet V das Potential irgend welcher theils auf, theils innerhalb σ ausgebreiteter Massen, so ist

$V_\infty = 0$ *oder* $= \pm\infty$, *je nachdem die Summe der das Potential erzeugenden Massen Null oder von Null verschieden ist.*	V_∞ *stets* $= 0$.

Hier bezeichnet V_∞ den Werth des Potentiales V für einen unendlich weit entfernten Punkt.

Theorem A. — Ist V das Potential irgend welcher auf oder innerhalb σ ausgebreiteter Massen, so werden die beiden Extreme der Werthe V_a, V_s (d. h. der kleinste und grösste dieser Werthe) *unter allen Umständen entweder auf σ, oder im Unendlichen, oder theils auf σ, theils im Unendlichen anzutreffen sein.**) Ist z. B. V auf σ constant, $= C$, befinden sich mithin auf σ und im Unendlichen im Ganzen nur *zwei* Werthe, nämlich C und V_∞, so müssen jene

---

*) Der Leser wird gebeten, genau auf den Wortlaut des Theorems zu achten. Dasselbe sagt nämlich aus, dass die beiden Extreme *mit voller Sicherheit* an den genannten Orten anzutreffen sind, *lässt aber völlig dahingestellt*, ob jene Extreme nicht vielleicht gleichzeitig noch an irgend welchen andern Orten anzutreffen seien. — Uebrigens ist zu bemerken, dass der Verf. in seinem Werke das Theorem mit grösserer Vollständigkeit hinstellt. Er sagt nämlich daselbst:

Ist V das Potential irgend welcher Massen, die theils auf theils innerhalb σ vertheilt sind, so müssen, was die beiden Extreme K, G der Werthe V_a, V_s betrifft, zwei Fälle unterschieden werden.

Erster Fall: V ist im Gebiete 𝔄 nicht überall $= 0$. Alsdann können jene extremen Werthe K, G nur auf σ und im Unendlichen sich vorfinden; so dass also für jeden endlichen Punkt a die Formel gilt:

(I) $$K < V_a < G,$$

die Zeichen genommen in sensu rigoroso.

Zweiter Fall: V ist in 𝔄 überall $= 0$. Alsdann wird die Formel (I) *nicht mehr gültig sein, indem die durch sie behaupteten Unterschiede der allgemeinen Gleichheit* (d. h. dem allgemeinen Nullsein) *Platz machen; so dass also an Stelle jener Formel folgende zu setzen ist:*

(II) $$K = V_a = G = 0.$$

Dabei ist zu erinnern, dass, wie schon oben bemerkt, unter den *a* die Punkte des Gebietes 𝔄, *exclusive* σ zu verstehen sind.

In ähnlicher Vollständigkeit hat der Verf. in seinem Werk auch die weiter folgenden Theoreme angegeben. Bei dem gegenwärtigen Referat aber schien es angemessen, von einer solchen Vollständigkeit zu Gunsten der grösseren Kürze und besseren Uebersichtlichkeit zu abstrahiren.

Extreme durch C und V_∞ dargestellt sein. Mit andern Worten: Es müssen in diesem Falle sämmtliche V_a ihrer Grösse nach zwischen C und V_∞ liegen.

*Theorem A'. — Ist V das Potential irgend welcher auf oder innerhalb σ ausgebreiteter Massen, und ist die Summe dieser das Potential erzeugenden Massen Null, so werden die beiden Extreme der Werthe V_a, V_s nothwendig auf σ anzutreffen sein.**) Ist z. B. V auf σ constant, $= C$, befindet sich mithin auf σ im Ganzen nur der *eine* Werth C, so müssen beide Extreme durch C dargestellt sein. D. h. sämmtliche V_s, V_a, sowie auch das (zu den V_a gehörige) V_∞ müssen in diesem Fall zwischen C und C liegen, also mit C identisch sein. Aus der so erhaltenen Formel

$$V_s = V_a = V_\infty = C$$

folgt aber mit Rücksicht auf den vorhergehenden Hülfssatz sofort:

$$V_s = V_a = 0 = C.$$

Tritt also zu den Bedingungen des Theorems A'. noch die hinzu, dass V auf σ constant sein soll, so werden die Werthe V_s, V_a sämmtlich $= 0$ sein.

Theorem A^{add}. — Ist V das Potential irgend welcher auf oder innerhalb σ ausgebreiteter Massen, ist ferner die Summe dieser Massen gegeben, = M, und sollen die V_s von irgend welchen auf σ vorgeschriebenen Werthen f_s nur durch eine unbestimmte additive Constante sich unterscheiden; so werden hierdurch sämmtliche V_a eindeutig bestimmt sein, desgleichen auch der Werth jener Constanten. Ist also z. B. die Summe jener Massen gegeben, $= M$, und soll V auf σ constant sein, so werden hierdurch sämmtliche V_a eindeutig bestimmt sein.

Schliesslich ergiebt sich, und zwar in unmittelbarem Anschluss an das Theorem A., noch ein letzter Satz, jedoch nur für das Newton'sche, nicht für das Logarithmische Potential. Dieser Satz, welcher vom Verf. als das Theorem A^{abs}. bezeichnet wird*), lautet folgendermassen:

---

*) Wiederum wird der Leser gebeten, genau auf den Wortlaut zu achten, desgleichen bei den weiter folgenden Theoremen.

**) Der Verf. hat absichtlich Bezeichnungen gewählt, welche an den *Inhalt* der betreffenden Theoreme einigermassen erinnern. So bezieht sich z. B. das Theorem A^{add}. auf den Fall, dass die Werthe von V auf σ bis auf eine *additive Constante* gegeben sind, während das Theorem A^{abs}., wie auch das weiterfolgende Theorem J^{abs}., den Fall betreffen, dass die Werthe von V auf σ *absolut*, d. h. vollständig gegeben sind.

Theorem A^{abs}.	*Ist V das Potential irgend welcher auf oder innerhalb σ ausgebreiteter Massen, und soll V auf σ irgend welche vorgeschriebenen Werthe* f_s *besitzen, so werden hierdurch sämmtliche* V_a *eindeutig bestimmt sein.* (Vgl. d. *Nm.* Werk, Pag. 35, Nr. 14.)

Die hier in der Theorie des Logarithmischen Potentials vorhandene Lücke, auf welche bereits zu Anfang dieses Referates hingewiesen wurde, ist der Verf. erst *später*, im dritten Capitel, zu beseitigen im Stande.

Theoreme, welche das Gebiet $\mathfrak{J}$ betreffen.

Theorem J. — Ist V das Potential irgend welcher theils auf theils ausserhalb σ gelegenen Massen, so werden die beiden Extreme der Werthe V_i, V_s *unter allen Umständen auf σ anzutreffen sein.* Ist z. B. V auf σ constant, $= C$, ist mithin auf σ im Ganzen nur der *eine* Werth C vorhanden, so müssen jene Extreme beide $= C$ sein. Mit andern Worten: Es müssen in diesem Falle sämmtliche V_a zwischen C und C liegen, also mit C identisch sein.

Theorem J^{abs}. — *Ist V das Potential irgend welcher auf oder ausserhalb σ ausgebreiteter Massen, und soll V auf σ irgend welche vorgeschriebenen Werthe* f_s *besitzen, so werden hierdurch sämmtliche* V_i *eindeutig bestimmt sein.* (Vergl. das *Neum.* Werk, Seite 41, Nr. 31.)

Erweiterung der genannten Theoreme.

Das bis jetzt betrachtete (der Ebene oder dem Raum angehörende) Gebiet $\mathfrak{J}$ besitzt nur *eine* Begrenzungscurve resp. Begrenzungsfläche. Denkt man sich von diesem Gebiete $\mathfrak{J}$ irgend ein in seinem Innern befindliches Stück abgesondert, so wird das zurückbleibende Gebiet *zwei* Begrenzungscurven resp. Begrenzungsflächen haben. Aus diesem Gebiete kann durch Wiederholung desselben Processes ein Gebiet mit *drei* Begrenzungscurven resp. Begrenzungsflächen abgeleitet werden. U. s. w. Wir wollen all' diese Gebiete mit $\mathfrak{J}$, genauer etwa mit $\mathfrak{J}^{(n)}$ bezeichnen, der Art, dass $\mathfrak{J}^{(n)}$ im Ganzen n Begrenzungscurven resp. Begrenzungsflächen besitzt.

In ganz derselben Weise kann man das Gebiet $\mathfrak{A}$ behandeln, indem man von demselben ein in seinem Innern liegendes Stück absondert; u. s. w. Die so entstehenden Gebiete bezeichnen wir sämmtlich mit $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{A}^{(n)}$, der Art, dass $\mathfrak{A}^{(n)}$ im Ganzen n Begrenzungscurven resp. Begrenzungsflächen besitzt.

Solches festgesetzt, ergiebt sich leicht, dass die im Vorhergehenden für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ oder (genauer ausgedrückt) für $\mathfrak{A}^{(1)}$ und $\mathfrak{J}^{(1)}$ aufgestellten Theoreme übertragbar sind auf die allgemeineren Gebiete $\mathfrak{A}^{(n)}$ und $\mathfrak{J}^{(n)}$.

Anwendung der Theoreme.

Um nun die Nützlichkeit dieser Theoreme (theils in ihrer engeren, theils in ihrer erweiterten Gestalt) an einem Beispiele zu demonstriren, wendet sich der Verf. zur Betrachtung eines *ringförmigen* resp. *schaalenförmigen* Gebietes $\mathfrak{C}$, also eines Gebietes $\mathfrak{C}$, welches z. B. begrenzt sein kann

von zwei concentrischen Kreisen, oder von zwei confocalen Ellipsen, oder zwei in einander geschachtelten Quadraten, u. s. w.;	von zwei concentrischen Kugelflächen, oder zwei confocalen Ellipsoidflächen, u. s. w.;

und gelangt dabei zu folgendem merkwürdigen Satz:

Sind M *und* M *zwei Massensysteme, welche ausserhalb* $\mathfrak{C}$ *liegen und durch* $\mathfrak{C}$ *von einander getrennt sind*), und sollen die beiden Massensysteme* M *und* M *zusammengenommen in allen Punkten des Gebietes* $\mathfrak{C}$ *ein constantes Potential besitzen, so muss jedes der beiden Massensysteme, einzeln genommen, diese Eigenschaft haben.* (Man findet diesen Satz in etwas anderer Gestalt in dem *Neumann*'schen Werk ausgesprochen auf Seite 46 und 47.)

Zweites Capitel.

Einige Anwendungen der Green'schen Sätze.

Das eben besprochene *erste* Capitel enthält, ausser dem Angeführten, noch mancherlei Anderes, so z. B. eine kurze Recapitulation der bekannten *Green'schen Sätze*, so wie auch eine Uebertragung dieser Sätze auf den Fall der Ebene, d. i. auf die Theorie des Logarithmischen Potentials.

Das nun folgende *zweite* Capitel, welches speciell über einige Anwendungen dieser Green'schen Sätze sich verbreitet, ist im Ganzen von sehr untergeordneter Bedeutung. Doch mögen folgende Sätze erwähnt sein:

---

*) Repräsentirt also z. B. $\mathfrak{C}$ eine ellipsoidische Schaale, so wird vorausgesetzt, dass von jenen beiden Massensystemen M und M das eine im innern Hohlraum der Schaale, das andere in dem die Schaale umgebenden äussern Raum sich befinde.

Bezeichnet i einen beliebig gegebenen Punkt innerhalb einer *Kreislinie* σ, und a den conjugirten äussern Punkt, und ist ferner auf σ eine gegebene Masse M in solcher Weise ausgebreitet, dass ihre Dichtigkeit mit den *Quadraten* der von i nach σ gelegten Strahlen oder (was auf dasselbe hinauskommt) mit den Quadraten der von a nach σ gelegten Strahlen umgekehrt proportional ist, so wird das (Logarithmische) Potential dieser Belegung auf *äussere* Punkte ebenso gross sein, als wäre die Masse M in i concentrirt; und gleichzeitig wird ihr Potential auf *innere* Punkte, abgesehen von einer *additiven Constanten*, ebenso gross sein, als wäre die Masse M in a concentrirt. (Vgl. das Neumann'sche Werk, Seite 62.)

Bezeichnet i einen beliebig gegebenen Punkt innerhalb einer *Kugelfläche* σ, und a den conjugirten äussern Punkt, und ist ferner auf σ eine gegebene Masse M in solcher Weise ausgebreitet, dass ihre Dichtigkeit mit den *Cuben* der von i nach σ gelegten Strahlen oder (was auf dasselbe hinauskommt) mit den Cuben der von a nach σ gelegten Strahlen umgekehrt proportional ist, so wird das (Newton'sche) Potential dieser Belegung auf *äussere* Punkte ebensogross sein, als wäre die Masse M in i concentrirt; und gleichzeitig wird ihr Potential auf *innere* Punkte, abgesehen von einem *constanten Factor*, ebensogross sein, als wäre die Masse M in a concentrirt. (Vergl. das N. Werk, Seite 68.)

Die Entdeckung dieser überaus einfachen und eleganten Sätze dürfte, soweit dieselben die *Kugel* betreffen, *Thomson* zuzuschreiben sein.

Drittes Capitel.

Ueber die Theorie der elektrischen Vertheilung und über das Princip der sogenannten natürlichen Belegung.

Nachdem der Verf. in diesem Capitel zunächst einige elektrostatische Sätze aufgestellt hat, die vielleicht nicht ganz ohne Interesse sein dürften, gelangt er (gewissermassen geleitet durch diese physikalischen Betrachtungen) zu einem *neuen Princip*, vermittelst dessen er die allgemeine Theorie des Potentials weiter zu vervollständigen und namentlich auch die im ersten Capitel offen gebliebene Lücke auszufüllen im Stande ist. Dieses Princip besteht in der sogenannten *natürlichen Belegung* der zu betrachtenden Curve oder Fläche. — Wir wollen bei dem gegenwärtigen Referat jene elektrostatischen Sätze mit möglichster Kürze angeben, sodann aber mit grösserer Ausführlichkeit handeln über das in Rede stehende Princip und dessen Anwendung.

Einige elektrostatische Sätze.

Nach einem bekannten schon von *Gauss* aufgestellten Satz ist

die elektrische Vertheilung auf einem gegebenen Conductor (falls keine äusseren Kräfte influiren) stets eine *gleichartige.*

Wollte man dieser Gauss'schen Ausdrucksweise sich anschliessen, nämlich die elektrische Schicht an der Oberfläche des Conductors *gleichartig* oder *ungleichartig* nennen, je nachdem das Vorzeichen ihrer Dichtigkeit überall dasselbe oder an verschiedenen Stellen ein verschiedenes ist, so könnten leicht Missverständnisse entstehen. Denn wollte man z. B. von *zwei* Conductoren mit *gleichartigen* Belegungen sprechen, so würde unwillkührlich die Vorstellung erweckt werden, als sollten die beiden Conductoren unter einander verglichen werden; während man doch nur auszudrücken beabsichtigt, dass das Vorzeichen auf jedem der beiden Conductoren constant sei, unbekümmert darum, ob diese beiden constanten Vorzeichen mit einander übereinstimmen oder nicht. — Zur Vermeidung solcher Missverständnisse hat der Verf. die Worte *gleichartig* und *ungleichartig* durch die griechischen Ausdrücke *monogen* und *amphigen* ersetzt.

Ueber die Frage der Monogenität und Amphigenität existirt nun, wie der Verf. zeigt, eine grosse Reihe einfacher allgemeiner Sätze, von denen jener zu Anfang genannte Gauss'sche Satz nur das erste Glied ist. Von diesen Sätzen, welche mit grosser Leichtigkeit aus den im ersten Capitel aufgestellten Theoremen sich ergeben, mögen namentlich folgende genannt werden:

Die elektrische Vertheilung auf einem gegebenen Conductor ist (falls keine äusseren Kräfte influiren) *stets monogen.*

Sind zwei Conductoren beliebig geladen, so wird (falls keine äusseren Kräfte influiren) *immer wenigstens auf* e i n e m *derselben eine monogene Vertheilung anzutreffen sein. Haben insbesondere die Conductoren* e n t g e g e n g e s e t z t e *Ladungen**), *so finden auf* b e i d e n *monogene Vertheilungen statt, und zwar von entgegengesetzten Vorzeichen. Hat endlich der eine Conductor eine beliebige Ladung, der andere die Ladung Null, so entsteht auf dem erstern eine monogene, auf dem letztern eine amphigene Vertheilung.*

Sind beliebig viele Conductoren mit beliebigen Ladungen gegeben, so wird (falls keine äusseren Kräfte influiren) *immer wenigstens auf* e i n e m *derselben eine monogene Vertheilung stattfinden. Sind insbesondere jene Ladungen der Art, dass ihre Summe* $= 0$ *ist, so werden*

---

*) Unter der *Ladung* eines Conductors ist die Gesammtmasse der auf ihm vorhandenen Elektricität zu verstehen. Demgemäss sind die Ladungen zweier Conductoren *entgegengesetzt* zu nennen, sobald die elektrische Gesammtmasse auf dem einen $= M$, auf dem andern $= -M$ ist.

mindestens zwei Conductoren mit monogenen Vertheilungen anzutreffen sein.

Die auf einem gegebenen Conductor durch einen äussern elektrischen Massenpunkt inducirte Belegung ist stets monogen, falls der Conductor zur Erde abgeleitet ist, hingegen stets amphigen, falls derselbe isolirt und mit der Ladung Null versehen ist.

Befindet sich ein Conductor C im Hohlraum eines schaalenförmigen Conductors S, so werden auf der äusseren Begrenzungsfläche von C und auf der innern von S stets monogene Vertheilungen vorhanden sein, und zwar von entgegengesetzten Vorzeichen.

Ausserdem dürfte unter mancherlei anderen Sätzen, die der Verf. über elektrische Vertheilung aufstellt, etwa noch folgender hervorzuheben sein:

Ist in einem Conductor elektrisches Gleichgewicht eingetreten unter der Einwirkung beliebig gegebener äusserer Kräfte, so wird die an seiner Oberfläche vorhandene elektrische Dichtigkeit auf keinem noch so kleinen Theile der Oberfläche Null sein können, — es sei denn, dass sie daselbst allenthalben Null wäre. Ist der Conductor von mehreren Flächen begrenzt (was z. B. stattfindet bei einem schaalenförmigen Conductor), *so gilt derselbe Satz für jede einzelne Fläche.* Dabei ist es gleichgültig, ob der Conductor zur Erde abgeleitet, oder ob er isolirt und mit einer beliebigen Elektricitätsmenge geladen ist. (Vergl. das Neumann'sche Werk Seite 77, Satz III.)

Die natürliche Belegung einer gegebenen Curve oder Fläche.

Die Vertheilung, welche die Elektricitätsmenge *Eins* auf einem isolirten Conductor ohne Einwirkung äusserer Kräfte annimmt, wird offenbar lediglich abhängen von der *geometrischen Beschaffenheit* seiner Oberfläche. Diese Vertheilung, welche der Verf. kurzweg *die natürliche Belegung der gegebenen Oberfläche* nennt, bildet ein wichtiges Instrument für die weiter folgenden Untersuchungen. Und nicht minder wichtig ist für die Theorie des Logarithmischen Potentials der analoge Begriff in der Ebene, d. i. *die natürliche Belegung einer gegebenen Curve.* Die betreffenden Definitionen lauten folgendermassen:

In der Ebene.	*Im Raume.*
Unter der natürlichen Belegung einer geschlossenen Curve σ ist eine auf σ ausgebreitete Massenvertheilung zu verstehen, deren Logarithmisches Potential in allen Punkten innerhalb	*Unter der natürlichen Belegung einer geschlossenen Fläche σ ist eine auf σ ausgebreitete Massenvertheilung zu verstehen, deren Newton'sches Potential in allen Punkten innerhalb*

σ einen constanten Werth hat, und deren Gesammtmasse Eins ist.

σ einen constanten Werth hat, und deren Gesammtmasse Eins ist.

Die (im Allgemeinen von Stelle zu Stelle variirende) Dichtigkeit dieser Belegung mag mit γ, ihr Potential auf einem variablen Punkt mit Π, und der constante Werth dieses Potentials für *innere* Punkte mit Γ bezeichnet sein. Alsdann ergeben sich z. B. für eine Kreislinie oder Kugelfläche folgende Formeln.

Für eine Kreislinie vom Radius A:

$$\gamma = \frac{1}{2\pi A},$$

$$\Gamma = \log\frac{1}{A},$$

$$\Pi = \log\frac{1}{r},$$

wo r die Centraldistanz desjenigen variablen Punktes vorstellt, auf welchen sich Π bezieht.

Für eine Kugelfläche vom Radius A:

$$\gamma = \frac{1}{4\pi A^2},$$

$$\Gamma = \frac{1}{A},$$

$$\Pi = \frac{1}{r},$$

wo r die Centraldistanz desjenigen variablen Punktes vorstellt, auf welchen sich Π bezieht.

Leicht kann man auch die natürliche Belegung für eine Ellipse oder eine Ellipsoidfläche bestimmen, und gelangt dabei zu folgenden Sätzen und Formeln*):

Bei einer *Ellipse* ist die Dichtigkeit γ der natürlichen Belegung in jedem Punkt proportional dem Abstande des Punktes von einer zweiten Ellipse, welche der gegebenen *ähnlich*, und von derselben unendlich wenig verschieden ist.

Repräsentirt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung der gegebenen Ellipse, so ergiebt sich für die Dichtigkeit γ im Punkte (x, y) die Formel:

$$\frac{1}{\gamma} = 2\pi ab\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}.$$

Diese Formel kann man auch so darstellen:

Bei einer *Ellipsoidfläche* ist die Dichtigkeit γ der natürlichen Belegung in jedem Punkt proportional dem Abstande des Punktes von einer zweiten Ellipsoidfläche, welche der gegebenen *ähnlich*, und von derselben unendlich wenig verschieden ist.

Repräsentirt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

die Gleichung der gegebenen Ellipsoidfläche, so ergiebt sich für die Dichtigkeit γ im Punkt (x, y, z) die Formel:

$$\frac{1}{\gamma} = 4\pi abc\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

Diese Formel kann man auch so schreiben:

*) Diese Formeln, welche im vorliegenden Werk *nicht* angegeben sind, wurden vom Verf. theilweise schon bei früheren Gelegenheiten mitgetheilt; so z. B. in Poggend. Annalen Bd. 113, ferner in den Math. Annalen Bd. III, S. 620.

$$\frac{1}{\gamma} = \pi\Delta,$$

oder auch so:

$$\frac{1}{\gamma} = 2\pi \sqrt{ab}\, \sqrt{R},$$

wo Δ die Länge desjenigen *Ellipsendurchmessers* bezeichnet, welcher der im Punkte (x, y) construirten Tangente parallel ist, während R den *Krümmungsradius* der Ellipse in jenem Punkt vorstellt. — Endlich kann man die Formel auch so schreiben:

$$\frac{1}{\gamma} = 2\pi \sqrt{SS'},$$

wo S, S' die nach dem Punkt (x, y) hinlaufenden *Brennstrahlen* bezeichnen.

$$\frac{1}{\gamma} = 4\Omega,$$

oder auch so:

$$\frac{1}{\gamma} = 4\pi \sqrt{abc}\, \sqrt{RR'} \text{ *)},$$

wo Ω den Flächeninhalt desjenigen *Diametralschnittes* bezeichnet, welcher der im Punkte (x, y, z) construirten Tangentialebene parallel ist, während R, R' die *Hauptkrümmungsradien* der Ellipsoidfläche in jenem Punkte vorstellen. — Endlich kann man, falls das Ellipsoid ein Rotations-Ellipsoid ist, die Formel auch so schreiben:

$$\frac{1}{\gamma} = 4\pi a \sqrt{SS'}$$

wo a den Radius des Aequators bezeichnet, während S, S' die beiden *Brennstrahlen* des Punktes (x, y, z) vorstellen. **)

Um nun den Begriff der natürlichen Belegung weiterhin mit Erfolg und Sicherheit anwenden zu können, ist offenbar zweierlei erforderlich, nämlich erstens die Kenntniss der *allgemeinen Eigenschaften* dieser Belegung, und zweitens der Nachweis ihrer *Existenz*. In ersterer Beziehung giebt der Verf. folgende Sätze:

I. *Die einer gegebenen Curve oder Fläche entsprechende Dichtigkeit γ ist allenthalben positiv, und kann auf keinem noch so kleinen Theil derselben Null sein.*

II. *Die einer Curve entsprechende Constante Γ kann, je nach Beschaffenheit der Curve, bald positiv, bald Null, bald negativ sein.* So z. B. ist (wie aus den vorhergehenden Formeln folgt) die Constante Γ für eine Kreislinie positiv oder Null oder negativ, je nachdem der Radius der Kreislinie kleiner als Eins, gleich Eins oder grösser

*) Diese Formel ist, soweit dem Referenten bekannt, zum ersten Mal von *Paolo Pagi* aufgestellt worden (Nuovo Cimento Ser. 2, Vol. XV, Fasc. di Marzo, Aprile e Maggio 1876).

**) Ist das Rotationsellipsoid ein *abgeplattetes*, so hat man diejenige Ellipse zu betrachten, in welcher das Ellipsoid von der durch den Punkt (x, y, z) gehenden Meridianebene geschnitten wird, und unter S, S' die Entfernungen des Punktes von den Brennpunkten dieser Ellipse zu verstehen.

als Eins ist. — *Hingegen wird die einer Fläche entsprechende Constante* Γ *stets positiv und stets verschieden von Null sein.*

III. *Das einer Curve entsprechende Potential* Π *hat für unendlich ferne Punkte den Werth* $-\infty$, *hingegen das einer Fläche entsprechende den Werth* 0.

Was andererseits die *Existenz* der natürlichen Belegung betrifft, so giebt der Verf. hiefür zwei Beweise; zunächst einen provisorischen Beweis vermittelst der schon von Gauss benutzten Variationsmethode (am Schluss des Capitels); sodann später (im fünften Capitel) einen strengeren Beweis, der indessen leider nicht allgemein gilt, sondern auf eine gewisse Kategorie von Curven und Flächen*) sich beschränkt.

Der sogenannte singuläre Fall.

γ und Π sind (nach ihrer Definition) zwei der gegebenen Curve oder Fläche σ eigenthümlich zugehörige Functionen, ebenso Γ ein ihr zugehöriger constanter Parameter.

Nun existiren gewisse Curven, deren Parameter Γ den Werth *Null* hat. Diese Curven, welche den weiteren Betrachtungen besondere Schwierigkeiten bereiten und in der zu entwickelnden allgemeinen Theorie einen besonderen Ausnahmefall zu constituiren scheinen, nennt der Verf. *singuläre Curven*, und spricht, sobald die zur Behandlung vorgelegte Curve dieser singulären Classe angehört, kurzweg vom Vorhandensein des *singulären Falles.* — Eine solche singuläre Curve ist z. B. eine Kreislinie vom Radius Eins, ebenso jede Ellipse, deren Halbaxen-Summe den Werth Zwei hat.

Was den Raum betrifft, so ist zu bemerken, dass *singuläre Flächen*, d. i. Flächen, deren Parameter Γ gleich Null ist, *nicht* existiren können. Denn der Parameter Γ einer gegebenen Fläche hat, wie vor wenig Augenblicken angeführt wurde, stets einen positiven und von Null verschiedenen Werth.

Erweiterung des Gauss'schen Satzes des arithmetischen Mittels.

Die Functionen γ, Π nebst der Constante Γ bieten die Mittel dar zur Erweiterung eines gewissen Gauss'schen Satzes. Um näher hierauf einzugehen, bezeichne σ (nach wie vor) eine geschlossene Curve oder Fläche von beliebiger Gestalt; ferner bezeichne V das Logarithmische resp. Newton'sche Potential eines beliebig gegebenen Massensystems, dessen einzelne Massenelemente theils mit m, theils mit μ benannt sein mögen, je nachdem sie *ausserhalb* oder *inner-*

*) Man vgl. hierüber denjenigen Theil dieses Referates, welcher speciell dem *fünften* Capitel gewidmet ist.

halb σ liegen; demgemäss sei der Werth dieses Potentials in irgend zwei Punkten x und σ ausgedrückt durch*):

$$V_x = \sum m T_{mx} + \sum \mu T_{\mu x}, \tag{1}$$

$$V_\sigma = \sum m T_{m\sigma} + \sum \mu T_{\mu\sigma}; \tag{2}$$

und zwar sei x ein ganz beliebiger Punkt, hingegen σ ein auf der gegebenen Curve oder Fläche σ befindlicher.

Denkt man sich nun die der Curve oder Fläche σ zugehörigen Functionen γ, Π, sowie auch die Constante Γ gebildet, und bezeichnet man den Werth der Function γ im Punkte σ mit γ_σ, ferner ein bei diesem Punkte abgegrenztes unendlich kleines Element der gegegebenen Curve oder Fläche mit $d\sigma$, so folgt aus (2) durch Multiplication mit $\gamma_\sigma d\sigma$ und Integration:

$$\int V_\sigma \gamma_\sigma d\sigma = \sum\left(m \int T_{m\sigma} \gamma_\sigma d\sigma\right) + \sum\left(\mu \int T_{\mu\sigma} \gamma_\sigma d\sigma\right).$$

Nach der Definition von Γ, Π ist aber (weil m ausserhalb und μ innerhalb der Curve resp. Fläche liegt):

$$\int T_{m\sigma} \gamma_\sigma d\sigma = \Pi_m,$$

$$\int T_{\mu\sigma} \gamma_\sigma d\sigma = \Gamma,$$

wo Π_m den Werth der Function Π im Punkte m bezeichnet. Somit folgt:

$$\int V_\sigma \gamma_\sigma d\sigma = \sum (m \Pi_m) + \sum (\mu \Gamma), \tag{3}$$

oder. was dasselbe:

$$\int V_\sigma \gamma_\sigma d\sigma = \sum (m \Pi_m) + \mathsf{M}\Gamma, \tag{4}$$

wo $\mathsf{M} = \sum \mu$ die Gesammtmasse der Elemente μ vorstellt.

Für den speciellen Fall, dass σ eine *Kreisfläche* resp. *Kugelfläche* vom Radius A ist, sind die Werthe von γ, Γ, Π sofort angebbar.**) Durch Substitution dieser Werthe in (4) ergiebt sich:

$$\frac{\int V_\sigma d\sigma}{2\pi \mathsf{A}} = \sum\left(m \log \frac{1}{r}\right) + \mathsf{M} \log \frac{1}{\mathsf{A}}, \qquad \frac{\int V_\sigma d\sigma}{4\pi \mathsf{A}^2} = \sum\left(\frac{m}{r}\right) + \frac{\mathsf{M}}{\mathsf{A}}, \tag{5}$$

wo die r die Centraldistanzen der einzelnen m vorstellen.

---

*) Vgl. die für T gegebene Definition, Seite 110 dieses Referates.

**) Sie sind bereits angeführt auf Seite 119 dieses Referates.

Der Verf. nennt die Formeln (5), von welchen diejenige rechter Hand schon in Gauss' allgemeinen Lehrsätzen Art. 20 sich vorfindet, den *Gauss'schen Satz des arithmetischen Mittels*; und demgemäss bezeichnet er die allgemeinere Formel (4) als den *erweiterten Gauss'schen Satz des arithmetischen Mittels.*

Jene allgemeine Formel (4) gewinnt, falls die Elemente des gegebenen Massensystems sämmtlich innerhalb σ, resp. auf σ liegen, mithin sämmtlich zu den μ gezählt werden dürfen, folgende Gestalt:

$$(6) \qquad \int V_\sigma \gamma_\sigma d\sigma = \mathsf{M}\Gamma,$$

oder (was dasselbe) folgende:

$$(7) \qquad \mathsf{M} = \frac{\int V_\sigma \gamma_\sigma d\sigma}{\Gamma}.$$

Ist also die der gegebenen Curve oder Fläche σ zugehörige Function γ nebst der Constante Γ *bekannt*, so wird man vermittelst der Formel (7) die Gesammtmasse M berechnen können, falls die Werthe V_σ gegeben sind; -- es sei denn, dass $\Gamma = 0$ wäre. Sollte nämlich zufälliger Weise $\Gamma = 0$ sein, so könnte jene Formel möglicher Weise die Gestalt $\mathsf{M} = \frac{0}{0}$ annehmen, mithin zur Berechnung von M unbrauchbar werden. — Somit ergiebt sich der Satz:

Befinden sich theils auf, theils innerhalb einer gegebenen geschlossenen Curve oder Fläche σ irgend welche unbekannte Massen, und sind die Werthe gegeben, welche das Potential dieser Massen auf σ besitzt, so wird hiedurch die Summe M jener Massen eindeutig bestimmt sein, — ausser im sogenannten singulären Falle (d. i. im Falle $\Gamma = 0$).

Bringt man endlich die Formel (6) auf den noch specielleren Fall in Anwendung, dass $\mathsf{M} = 0$ ist, so folgt:

$$(8) \qquad \int V_\sigma \gamma_\sigma d\sigma = 0.$$

Beachtet man, dass die Werthe γ_σ überall positiv und auf keinem noch so kleinen Theil der Curve oder Fläche Null sind (vgl. Seite 120 dieses Referates), so erkennt man aus (8) sofort, dass die V_σ *theils* positiv, *theils* negativ sein müssen, und gelangt daher zu folgendem Satz:

Befinden sich theils auf, theils innerhalb einer gegebenen geschlossenen Curve oder Fläche σ irgend welche Massen, deren Summe $= 0$ *ist, so können die Werthe, welche das Potential dieser Massen auf σ besitzt, nicht alle von einerlei Vorzeichen sein, — es sei denn, dass sie sämmtlich* $= 0$ *wären.*

Ausfüllung der im ersten Capitel offen gebliebenen Lücke.

Einer noch völlig unbekannten Function V mögen folgende Bedingungen auferlegt werden:

(9. α) V soll das Potential von Massen sein, die *auf* oder *innerhalb* σ liegen*),

(9. β) die V_σ sollen vorgeschriebene Werthe haben.

Legt man sich nun die Frage vor, ob die V_a durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt sind, so ist zuvörderst zu bemerken, dass man die Summe M der das Potential V erzeugenden Massen auf Grund der vorgeschriebenen Werthe V_σ sofort berechnen kann vermittelst der Formel (7):

$$\mathsf{M} = \frac{\int V_\sigma \gamma_\sigma d\sigma}{\Gamma},$$

und dass man also zu den Bedingungen (9. α, β), als unmittelbare Consequenz derselben, noch folgende dritte Bedingung hinzufügen darf:

(9. γ) die Summe M der das Potential V erzeugenden Massen soll einen gegebenen Werth haben.

Solches vorausgeschickt, lässt sich leicht zeigen, dass die V_a durch die Bedingungen (9. α, β) oder, was dasselbe, durch die Bedingungen (9. α, β, γ) eindeutig bestimmt sind.

Existirten nämlich *zwei* den Bedingungen (9. α, β, γ) entsprechende Potentiale V und V',

(10. α) so müsste offenbar die Differenz $U = V - V'$ das Potential von Massen sein, die *auf* oder *innerhalb* σ liegen,

(10. β) ferner müssten alsdann die U_σ sämmtlich $= 0$ sein,

(10. γ) endlich müsste alsdann die Summe der das Potential U erzeugenden Massen $= 0$ sein.

Beachtet man nun, dass diesen Anforderungen (10. α, β, γ) genügt wird, falls man die das Potential U erzeugenden Massenelemente sämmtlich $= 0$, mithin die U_a ebenfalls $= 0$ setzt, und beachtet man andererseits, dass die U_a, zufolge des Theorems A^{add}., durch die Anforderungen (10. α, β, γ) *eindeutig* bestimmt sind, so erkennt man sofort, dass die U_a, jenen Anforderungen zufolge, *nothwendiger Weise* $= 0$ sein müssen; q. e. d.

Doch werden diese Ueberlegungen *defect* für den *singulären Fall:* $\Gamma = 0$: weil die zur Bestimmung von M benutzte Formel

---

*) Alle hier angewendeten Bezeichnungen σ, a, etc. etc. sollen dieselbe Bedeutung haben wie früher (vgl. Seite 111 dieses Referates).

$$\mathsf{M} = \frac{\int V_\sigma \gamma_\sigma d\sigma}{\mathsf{r}}$$

für den Fall $\mathsf{r} = 0$ nicht mehr brauchbar ist. Somit ergiebt sich folgender Satz:

Theorem A^{abs}. — *Ist V das Potential irgend welcher auf oder innerhalb σ ausgebreiteter Massen, und soll V auf σ irgend welche vorgeschriebenen Werth f, besitzen, so werden hierdurch sämmtliche* V_a *eindeutig bestimmt sein, — ausser im singulären Fall.* — Hiermit ist endlich die im ersten Capitel offen gebliebene Lücke (vgl. Seite 112 dieses Referates) ausgefüllt.

Viertes Capitel.

Theorie der sogenannten Doppelbelegungen.

Die im ersten Capitel und am Schlusse des vorhergehenden aufgestellten Theoreme A^{add}., A^{abs}., J^{abs}. sagen aus, dass gewisse Functionen durch die ihnen auferlegten Bedingungen *eindeutig* bestimmt sind, geben aber keinerlei Aufschluss über die wirkliche *Existenz* dieser Functionen. Auch wird heut zu Tage kein Zweifel darüber obwalten, dass die von Gauss und Dirichlet zur Beseitigung dieses Uebelstandes angegebenen Variationsmethoden im Allgemeinen wenig Zutrauen verdienen, dass vielmehr die einzig strenge Methode zur Beseitigung des genannten Uebelstandes nur in der *wirklichen Aufstellung* jener Functionen bestehen kann.

Eine derartige Methode ist die vom Verf. angegebene *Methode des arithmetischen Mittels.* Um diese Methode weiterhin expliciren zu können, war der Verf. genöthigt, im gegenwärtigen Capitel zunächst einige *vorbereitende Untersuchungen* anzustellen über solche Potentiale, welche herrühren von sogenannten Doppelbelegungen.

Einige geometrische Definitionen.

Bei einer gegebenen Curve oder Fläche pflegt man eine bestimmte Seite als *positiv* festzusetzen, indem man alsdann gleichzeitig die auf dieser Seite errichtete Normale die *positive* Normale nennt. Und umgekehrt: Hat man eine bestimmte Normale als *positiv* festgesetzt, so pflegt man mit demselben Namen auch die entsprechende Seite zu benennen.*)

Ausserdem sind für die nachfolgenden Expositionen noch gewisse andere Festsetzungen erforderlich mit Bezug auf solche Curven oder

*) Dabei sei sogleich bemerkt, dass bei *geschlossenen* Curven oder Flächen vom Verf. stets die *innere* Seite zur *positiven* auserwählt ist.

Flächen, welche mit Ecken resp. Ecken und Kanten behaftet sind. Will man diese Festsetzungen der Art einkleiden, dass sie nicht speciell auf jene Eck- und Kantenpunkte beschränkt, sondern ganz allgemein für jeden *beliebigen* Punkt s der Curve resp. Fläche gültig sind, so kann man sich etwa folgendermassen ausdrücken:

Die von s nach den Nachbarpunkten der Curve σ hinlaufenden und über dieselben hinaus verlängerten Strahlen bilden einen *Winkel*, durch welchen eine mit dem Radius Eins um s beschriebene *Kreislinie* in zwei Theile zerlegt wird. Von diesen beiden Theilen mag der auf der positiven Seite der Curve liegende *das Winkelmaass der Curve im Punkte* s genannt, und mit ϖ_s bezeichnet werden.

Ist z. B. σ die Peripherie eines gleichseitigen Dreiecks, und setzt man als positive Seite die innere fest, so wird für jeden Punkt s

$$\varpi_s = \pi, \text{ oder } = \frac{\pi}{3}$$

sein, je nachdem der Punkt s in einer *Seite*, oder in einer *Ecke* des Dreiecks liegt.

Die mit ϖ_s durch die Relation

$$\varpi_s + ȣ_s = \pi$$

verbundene Grösse $ȣ_s$ mag das *Supplement* des Winkelmaasses, oder kürzer das *supplementare Winkelmaass* heissen.

Die von s nach den Nachbarpunkten der *Fläche* σ hinlaufenden und über dieselben hinaus fortgesetzten Strahlen bilden einen *Kegelmantel*, durch welchen eine mit dem Radius Eins um s beschriebene *Kugelfläche* in zwei Theile zerlegt wird. Von diesen beiden Theilen mag der auf der positiven Seite der Fläche liegende *das Winkelmaass der Fläche im Punkte* s genannt, und mit ϖ_s bezeichnet werden.

Ist z. B. σ die Oberfläche eines Würfels, und setzt man als positive Seite die innere fest, so wird für jeden Punkt s

$$\varpi_s = 2\pi, \text{ oder } = \frac{2\pi}{2}, \text{ oder } = \frac{2\pi}{4}$$

sein, je nachdem der Punkt s in einer *Seite*, oder in einer *Kante*, oder in einer *Ecke* des Würfels liegt.

Die mit ϖ_s durch die Relation

$$\varpi_s + ȣ_s = 2\pi$$

verbundene Grösse $ȣ_s$ mag das *Supplement* des Winkelmaasses, oder kürzer das *supplementare Winkelmaass* heissen.

Aus diesen Definitionen geht hervor, dass $ȣ_s$ *gewöhnlich* $= 0$ ist, dass nämlich eine Abweichung von diesem gewöhnlichen Werthe nur dann stattfindet, wenn der Punkt s in einer Ecke oder Kante liegt.*)

---

*) Man kann den Buchstaben ȣ ein *Omikron-Ypsilon* oder kürzer ein *Omikron* nennen. Letzteres ist nicht ganz richtig, empfiehlt sich aber als das Bequemere.

Definition der Doppelbelegungen.

Denkt man sich in allen Punkten der gegebenen Curve oder Fläche σ die *positive* Normale ν errichtet, und auf all' diesen Normalen ein und dieselbe *unendlich kleine* Strecke λ aufgetragen, so entsteht eine neue mit σ *parallel* laufende Curve oder Fläche σ'. Correspondirende Punkte von σ und σ' sind alsdann solche zu nennen, die auf derselben Normale liegen, und correspondirende Elemente solche, die aus correspondirenden Punkten bestehen. — Werden nun σ und σ' in continuirlicher Weise mit Masse belegt, und zwar in solcher Art, dass die auf je zwei correspondirenden Elementen $d\sigma$ und $d\sigma'$ vorhandenen Massen einander *entgegengesetzt gleich* sind, so entsteht eine sogenannte *Doppelbelegung*. Ist $(-\zeta)$ die Dichtigkeit der auf σ ausgebreiteten einfachen Belegung, ferner λ (wie schon festgesetzt wurde) der unendlich kleine constante Abstand zwischen σ und σ', so heisst (nach Helmholtz):

$$\lambda\zeta = \mu$$

das *Moment* der Doppelbelegung. Unter Anwendung dieses Momentes μ lautet das Logarithmische resp. Newton'sche Potential der Doppelbelegung auf einen beliebig gegebenen Punkt x folgendermassen:

$$W_x = \int \frac{\partial\left(\log\frac{1}{E}\right)}{\partial\nu}\,\mu\,d\sigma, \quad = \int \mu\,\frac{\cos\vartheta\,d\sigma}{E}, \quad = \int \mu\,(d\sigma)_x, \qquad\Bigg\|\qquad W_x = \int \frac{\partial\left(\frac{1}{E}\right)}{\partial\nu}\,\mu\,d\sigma, \quad = \int \mu\,\frac{\cos\vartheta\,d\sigma}{E^2}, \quad = \int \mu\,(d\sigma)_x.$$

Hier bezeichnet E die Entfernung des Punktes x vom Elemente $d\sigma$, ferner ϑ den Winkel der Linie E ($d\sigma \rightarrow x$) gegen die Normale ν; und demgemäss repräsentirt der Ausdruck:

$$(d\sigma)_x = \frac{\cos\vartheta\cdot d\sigma}{E} = \frac{\partial\left(\log\frac{1}{E}\right)}{\partial\nu}\,d\sigma \qquad\Bigg\|\qquad (d\sigma)_x = \frac{\cos\vartheta\cdot d\sigma}{E^2} = \frac{\partial\left(\frac{1}{E}\right)}{\partial\nu}\,d\sigma$$

die mit ε multiplicirte *scheinbare Grösse* des Elementes $d\sigma$ für einen in x befindlichen Beobachter, wobei $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ ist, je nachdem jener Beobachter die positive oder negative Seite des Elementes $d\sigma$ vor Augen hat.

Diese Formeln linker und rechter Hand (d. i. für Ebene und Raum) können unter Anwendung der schon früher (Seite 110 dieses Referates) festgesetzten Collectivbezeichnungen in folgende zusammengezogen werden:

$$W = \int \mu (d\sigma)_x ,$$

$$(d\sigma)_x = \frac{\partial T}{\partial \nu} d\sigma = \frac{\cos\vartheta \cdot d\sigma}{E^h} .$$

Das Potential einer Doppelbelegung ist also $= \int \mu (d\sigma)_x$, d. i. gleich der Summe der scheinbaren Grössen der einzelnen Curven- resp. Flächenelemente, jede solche scheinbare Grösse noch multiplicirt mit dem zugehörigen Werthe des Momentes, und ferner noch multiplicirt mit ε (wo $\varepsilon = \pm 1$ ist, wie vor wenig Augenblicken näher angegeben wurde).

Es verhält sich mit dem Potential W einer Doppelbelegung ähnlich wie mit den Differentialquotienten einer gegebenen Function $f(\alpha)$. Um nämlich den Begriff des Differentialquotienten $\frac{df(\alpha)}{d\alpha}$ zu *erklären*, sind *zwei* Punkte α und $\alpha + d\alpha$ erforderlich, während bei Angabe seines *fertigen* Werthes [der nach Lagrange mit $f'(\alpha)$ bezeichnet wird] nur *ein* Punkt α in Betracht kommt. Hiermit analog sind zur *Erklärung* jenes Potentials W *zwei* Flächen σ und σ' erforderlich, während bei Angabe seines *fertigen* Werthes nur *eine* Fläche σ in Betracht kommt.

Die vorstehenden Formeln repräsentiren diesen *fertigen* Werth von W, und enthalten demgemäss nur die *eine* Fläche σ. *Ueberhaupt wird im Folgenden nur von diesem fertigen Begriff die Rede sein.*

Doppelbelegungen vom Momente Eins.

Versteht man unter σ eine *geschlossene* Curve oder Fläche mit positiver innerer Seite, ferner unter

$$W_x = \int (d\sigma)_x$$

das Potential einer auf σ ausgebreiteten Doppelbelegung vom Momente *Eins*, so ist (wie zum Theil schon von Gauss nachgewiesen wurde; vgl. die allg. Lehrsätze Art. 22):

$$W_a = 0,$$

$$W_s = h\pi - \vartheta_s,$$

$$W_i = 2h\pi ,$$

wo a, s, i Punkte bezeichnen, welche resp. *ausserhalb*, *auf* und *innerhalb* σ liegen. Lässt man also den variablen Punkt x in der Richtung von Aussen nach Innen die gegebene Curve oder Fläche an irgend einer Stelle s durchschreiten, so wird das Potential W_x

zwei kurz auf einander folgende sprungweise Veränderungen erleiden; denn es wird in *dem* Augenblick, wo der von Aussen kommende Punkt die Curve oder Fläche erreicht, plötzlich von 0 auf $h\pi - \vartheta_s$, und unmittelbar darauf in *dem* Augenblick, wo der Punkt, nach Aussen strebend, die Curve oder Fläche verlässt, von $h\pi - \vartheta_s$ auf $2h\pi$ anwachsen. Mithin ist der eine Sprung von der Grösse $h\pi - \vartheta_s$, der andere von der Grösse $h\pi + \vartheta_s$; wobei zu erinnern, dass die Grösse ϑ_s im Allgemeinen (nämlich für jeden Punkt s, der weder Eck- noch Kantenpunkt ist) den Werth Null hat.

Doppelbelegungen von beliebig gegebenem Moment.

Ist das Moment μ der Doppelbelegung eine beliebig gegebene Function des Ortes auf σ, so besitzt das zugehörige Potential

$$W_x = \int \mu (d\sigma)_x,$$

wie der Verf. zeigt, analoge Discontinuitäten. Lässt man nämlich wiederum den variablen Punkt x die betrachtete Curve oder Fläche σ an irgend einer Stelle s durchschreiten, und bezeichnet man den Werth der Function μ an dieser Stelle mit μ_s, so wird das Potential in *dem* Augenblick, wo der von Aussen kommende Punkt die Curve oder Fläche erreicht, plötzlich um $(h\pi - \vartheta_s)\mu_s$ wachsen, und unmittelbar darauf in *dem* Augenblick, wo der Punkt, nach Innen strebend, die Curve oder Fläche verlässt, nochmals und zwar um $(h\pi + \vartheta_s)\mu_s$ anwachsen. — Es besitzt also das Potential auf der Curve oder Fläche σ im Ganzen *dreierlei* Werthsysteme, nämlich ein erstes auf der *äusseren* Seite von σ, ein zweites direct auf σ *selber*, endlich ein drittes auf der *innern* Seite von σ.

Benennt man sämmtliche Punkte der Ebene oder des Raumes, je nachdem sie *ausserhalb*, *auf* oder *innerhalb* σ liegen, resp. mit a, s und i, und die in diesen Punkten vorhandenen Potentialwerthe resp. mit W_a, W_s und W_i, so besteht offenbar das erste jener drei Werthsysteme aus den Grenzwerthen der W_a, das zweite direct aus den W_s selber, endlich das dritte aus den Grenzwerthen der W_i. Bedient man sich nun, was die genannten Grenzwerthe betrifft, der Symbole W_{as} und W_{is}, indem man unter W_{as} den Werth in einem Punkte a versteht, welcher dem Punkte s *unendlich nahe* liegt, andererseits unter W_{is} den Werth in einem Punkte i, der ebenfalls *unendlich nahe* an s liegt, so kann man offenbar die vorhin angegebenen sprungweisen Aenderungen oder (was dasselbe ist) die Beziehungen zwischen den dreierlei Werthsystemen W_a, W_s, W_i durch folgende Formeln ausdrücken:

$$W_{as} = W_s - (h\pi - \vartheta_s)\mu_s,$$
$$W_{is} = W_s + (h\pi + \vartheta_s)\mu_s;$$

woraus durch Subtraction folgt:

$$W_{is} - W_{as} = 2h\pi\mu_s.$$

In grösserer Vollständigkeit lauten die Resultate, zu denen der Verf. im gegenwärtigen Capitel gelangt, folgendermassen:

Bezeichnet σ eine geschlossene Curve oder Fläche mit positiver innerer Seite, und denkt man sich auf σ eine Doppelbelegung ausgebreitet, deren Moment μ überall stetig ist, so wird das von dieser Doppelbelegung auf einen variablen Punkt x ausgeübte Potential:

$$W_x = \int \mu (d\sigma)_x$$

folgende Eigenschaften haben.

Erste Eigenschaft: Die von s abhängende Function:

$$W_s + \vartheta_s \mu_s \tag{1}$$

ist auf σ überall stetig.

Zweite Eigenschaft: Die Werthe W_a bilden ein stetig zusammenhängendes System, dessen Grenzwerthe W_{as} mit den directen Werthen W_s durch die Relation verknüpft sind:

$$W_{as} = (W_s + \vartheta_s \mu_s) - h\pi\mu_s. \tag{2}$$

Dritte Eigenschaft: Die Werthe W_i bilden ein stetiges System, dessen Grenzwerthe W_{is} mit den directen Werthen W_s durch die Relation verbunden sind:

$$W_{is} = (W_s + \vartheta_s \mu_s) + h\pi\mu_s. \tag{3}$$

Vierte Eigenschaft: Bezeichnet p eine beliebig gegebene Richtung, so sind die Grenzwerthe von $\frac{\partial W_a}{\partial p}$ und $\frac{\partial W_i}{\partial p}$ unter einander identisch, was angedeutet werden mag durch die Formel:

$$\frac{\partial W_{as}}{\partial p} = \frac{\partial W_{is}}{\partial p}. \tag{4}$$

Beiläufig werden vom Verf. noch folgende Sätze mitgetheilt, als gültig für eine beliebig gegebene geschlossene Curve oder Fläche σ.

Erster Satz. — Die Gesammtmasse einer auf σ ausgebreiteten Doppelbelegung ist stets $= 0$.

Zweiter Satz. — Ist das Potential W einer auf σ ausgebreiteten Doppelbelegung für alle Punkte a *constant* (mithin $= 0$), so wird ihr Moment ebenfalls durch eine *Constante*, und zwar durch eine Constante von ganz *un*bestimmtem Werthe dargestellt sein.

Dritter Satz. — Ist das Potential W einer auf σ ausgebreiteten Doppelbelegung für alle Punkte i *constant*, etwa $= K$, so wird ihr Moment ebenfalls *constant*, und zwar $= \frac{K}{2h\pi}$ sein.

Vierter Satz. — Soll eine Doppelbelegung von σ der Art sein, dass ihr Potential auf der *äussern* Seite von σ *vorgeschriebene* Werthe f besitzt, so ist hierdurch ihr Moment bis auf eine additive Constante *eindeutig bestimmt*; — ausser im singulären Fall.

Fünfter Satz. — Soll eine Doppelbelegung von σ der Art sein, dass ihr Potential auf der *innern* Seite von σ *vorgeschriebene* Werthe f besitzt, so ist hierdurch ihr Moment *eindeutig* bestimmt.

Fünftes Capitel.

Die Methode des arithmetischen Mittels.

Es handelt sich hier (wie schon zu Anfang des vorhergehenden Capitels näher ausgeführt wurde) um den Existenzbeweis derjenigen Functionen, von welchen in den Theoremen $A^{add}.$, $A^{abs}.$, $J^{abs}.$ die Rede war, sowie auch um den Existenzbeweis der sogenannten *natürlichen Belegung.*

Der Verf. giebt die genannten Existenzbeweise nur unter der Voraussetzung, dass die gegebene Curve oder Fläche σ *zweiten Ranges* und *keine zweisternige* sei; und wir werden daher, bevor wir auf jene Beweise näher eingehen können, uns zunächst mit dieser Ausdrucksweise (zweiter Rang, zweisternig) näher bekannt zu machen haben. Auch wird es zweckmässig sein, einige einleitende Betrachtungen vorangehen zu lassen, welche den Weg, auf dem der Verf. zu seinen Existenzbeweisen gelangt ist, einigermassen andeuten.

Einleitende Betrachtungen.

Es sei σ eine gegebene geschlossene Curve oder Fläche, und

$$W_x = \int \mu_\sigma (d\sigma)_x \tag{15}$$

das Potential einer auf σ ausgebreiteten Doppelbelegung vom Momente μ. Beschränken wir uns bei diesen einleitenden Betrachtungen auf den besondern Fall, dass σ *frei von Ecken und Kanten* ist, mithin die ϑ_s sämmtlich $= 0$ sind, so gewinnen die Formeln (2), (3) die einfachere Gestalt:

$$(16)\qquad \begin{aligned} W_{as} &= W_s - h\pi\mu_s, \\ W_{is} &= W_s + h\pi\mu_s. \end{aligned}$$

Setzt man der grösseren Bequemlichkeit willen:

(17) $$h\pi\mu = f,$$
so gehen die Formeln (15), (16) über in:

(18) $$W_x = \frac{1}{h\pi}\int f_\sigma (d\sigma)_x,$$
respective in:

(19) $$W_{as} = W_s - f_s, \quad W_{is} = W_s + f_s.$$

Nunmehr bilde man ein Potential W'_x, welches zu den Werthen W_σ in derselben Beziehung steht, wie W_x zu den f_σ, sodann ein Potential W''_x, welches zu den W'_σ wieder in der nämlichen Beziehung steht; u. s. w. Mit andern Worten, man bilde nach dem Schema der Formel (18) die auf einander folgenden Functionen:

(20) $$\begin{aligned} W_x &= \frac{1}{h\pi}\int f_\sigma (d\sigma)_x, \\ W'_x &= \frac{1}{h\pi}\int W_\sigma (d\sigma)_x, \\ W''_x &= \frac{1}{h\pi}\int W'_\sigma (d\sigma)_x, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Alsdann gelten nach (19) die Relationen:

(21) $$\begin{aligned} W_{as} &= W_s - f_s, \\ W'_{as} &= W'_s - W_s, \\ W''_{as} &= W''_s - W'_s, \\ W'''_{as} &= W'''_s - W''_s, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

woraus z. B. folgt:

(22) $$-(W_{as} + W'_{as} + W''_{as} + W'''_{as}) = f_s - W'''_s.$$

Nimmt man für den Augenblick an, die Function W'''_s sei auf σ allenthalben ausserordentlich klein, und es differire also der in (22) auf der rechten Seite stehende Ausdrnck $(f_s - W'''_s)$ überall nur ausserordentlich wenig von f_s, so wird offenbar

(23) $$-(W_a + W'_a + W''_a + W'''_a)$$

eine Function des variablen Punktes a sein, deren Werthe *auf* σ von den f_s nur äusserst wenig abweichen. Zugleich aber repräsentirt diese Function (ebenso wie ihre einzelnen Glieder W_a, W'_a, etc. etc.) ein Potential, dessen erzeugende Massen *auf* σ ausgebreitet sind. Folglich wird diese Function (23) mit grosser Annäherung all denjenigen Anforderungen entsprechen, welche im Theorem A^{abs}. (vgl. Seite 125 dieses Referates) an das Potential V_a gestellt wurden.

Aus diesen Ueberlegungen geht mit einiger Wahrscheinlichkeit hervor, dass ein jenen Anforderungen in *voller Strenge* entsprechendes Potential durch die unendliche Reihe:

$$(24) \qquad V_a = -(W_a + W_a' + W_a'' + W_a''' + \cdots \textit{ in inf.})$$

dargestellt sein wird, falls sich nur nachweisen lässt, dass die auf σ ausgebreitete Function

$$(25) \qquad W_s^{(n)}$$

mit wachsendem n gegen *Null* convergirt.

In der That weist der Verf. nach, dass die Function (25), wenn auch nicht gegen *Null*, so doch gegen eine *Constante* convergirt; und gleichzeitig weist er nach, dass die Reihe (24) eine *convergente* ist. In letzterer Beziehung zeigt er, dass die genannte Reihe im Wesentlichen eine geometrische ist, welche fortschreitet nach den Potenzen eines gewissen der gegebenen Curve oder Fläche σ zugehörigen *Parameters* λ*), und dass dieses λ ein *ächter Bruch* ist. Andererseits zeigt er in ersterer Beziehung, dass sämmtliche Werthe der Function $W_s^{(n)}$ (25) in das Intervall einschliessbar sind**):

$$(26) \qquad C - (G-K)\lambda^{n+1} \leqq W_s^{(n)} \leqq C + (G-K)\lambda^{n+1},$$

wo C, G, K gewisse der vorgeschriebenen Function f eigenthümliche *Constanten* bezeichnen, und dass also sämmtliche Werthe jener Function $W_s^{(n)}$ mit wachsendem n gegen die Constante C convergiren. Jedoch sind all diese Demonstrationen des Verf. nur von *beschränkter Gültigkeit*, nämlich an die Bedingung geknüpft, dass die gegebene Curve oder Fläche σ *zweiten Ranges* und *keine zweisternige* sei. Was diese Ausdrucksweise besagen will, soll sogleich erläutert werden.

Ueber den Rang einer Curve oder Fläche.

Man kann zwischen *Punkt* und *Stelle* unterscheiden, indem man z. B. von der Ellipse sagt, dass dieselbe mit ihrer Tangente *zwei*

*) Diesen Parameter λ nennt der Verf. die *Configurationsconstante* der gegebenen Curve oder Fläche. Beispielsweise zeigt er, dass diese Constante λ für einen Kreis $= \frac{1}{2}$, ferner für eine Ellipse $\leqq \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^3\right]$ ist, falls a die grosse und b die kleine Axe der Ellipse bezeichnet.

**) Diese Formel (26) ist identisch mit der Formel des Neumann'schen Werkes Seite 188, Nr. 44. Denn bei einer Curve oder Fläche σ, welche (wie hier vorläufig vorausgesetzt wurde) *frei* von Ecken und Kanten ist, wird die Function $W_s^{(n)}$ identisch sein mit $f_s^{(n+1)}$; vgl. das Neumann'sche Werk Seite 166.

Punkte (nämlich zwei einander unendlich nahe Punkte), aber nur *eine* Stelle gemein habe, ferner von der Lemniscate, dass dieselbe mit ihrer Doppeltangente *vier* Punkte, aber nur *zwei* Stellen gemein habe. Ebenso kann man auch, was die Peripherie eines regulären Polygons betrifft, sagen, dass dieselbe mit derjenigen unendlich langen geraden Linie, welche durch zwei aufeinanderfolgende Ecken geht, *unendlich viele* Punkte (nämlich sämmtliche Punkte der betreffenden Seite), aber nur *eine* Stelle gemein habe.

In der That bedient sich der Verf. dieser Ausdrucksweise, indem er jedes *Continuum von Punkten* (einerlei, ob die Anzahl der darin enthaltenen Punkte endlich oder unendlich gross ist) kurzweg als *Stelle* bezeichnet. Gleichzeitig nennt er eine gegebene Curve oder Fläche vom *R^{ten} Range*, wenn sie mit einer unendlich langen geraden Linie, welche Lage man dieser Linie auch zuertheilen mag, niemals mehr als *R Stellen* gemein hat, oder (genauer ausgedrückt) wenn die *grösste Zahl* von Stellen, welche sie mit einer solchen Linie gemein haben kann, $= R$ ist.

Von besonderer Wichtigkeit für die Untersuchungen des Verf. ist der Specialfall $R = 2$. Eine Curve oder Fläche *zweiten* Ranges kann offenbar niemals einspringende Ecken oder Kanten, überhaupt keine einspringenden Theile haben. Oder genauer ausgedrückt:

Welche Tangente man an eine Curve *zweiten* Ranges auch legen mag, stets werden sämmtliche Punkte der Curve auf *derselben* Seite der Tangente liegen.

Welche Tangentialebene man an eine Fläche *zweiten* Ranges auch legen mag, stets werden sämmtliche Punkte der Fläche auf *derselben* Seite der Tangentialebene liegen.

Als Beispiele von Curven oder Flächen *zweiten* Ranges würden zu erwähnen sein:

die Kreislinie, die Ellipse, die Peripherie eines Rechtecks*), die Peripherie eines regulären Polygons, die Peripherie eines Kreissegmentes, welches theils von einem Kreisbogen, theils von einer geraden Linie begrenzt ist.

die Kugelfläche, die Ellipsoidfläche, die Oberfläche eines Tetraeders, Würfels, Dihexaeders, Granatoeders, Ikosaeders u. s. w., ferner die Oberfläche eines Kugelsegmentes, welches theils von einer Kugelcalotte, theils von einer Kreisfläche begrenzt wird.

Eine geschlossene Curve oder Fläche *zweiten* Ranges würde man zur Noth als eine *überall convexe* Curve oder Fläche bezeichnen

*) Ein *beliebiges Viereck* darf *nicht* als Beispiel aufgeführt werden. Denn denken wir uns z. B. ein Viereck mit einspringendem Winkel, so wird die Peripherie dieses Vierecks eine Curve *vierten* Ranges sein.

können*), nur müsste man alsdann hinzufügen, dass einzelne Theile der Curve oder Fläche *geradlinig*, resp. *eben* sein dürfen.

Die mit sogenannten Sternen behafteten Curven und Flächen.

Einsternige Curven und Flächen.

Lässt sich auf einer gegebenen Curve ein Punkt M markiren von solcher Lage, dass sämmtliche Tangenten der Curve durch M gehen, so mag die Curve einsternig, und M ihr Stern heissen.

Eine einsternige Curve wird daher stets ein *Winkel* sein, nämlich dargestellt sein durch zwei von demselben Punkt auslaufende (begrenzte oder unbegrenzte) gerade Linien.

Lässt sich auf einer gegebenen Fläche ein Punkt M markiren von solcher Lage, dass sämmtliche Tangentialebenen der Fläche durch M gehen, so mag die Fläche einsternig, und M ihr Stern heissen.

Eine einsternige Fläche wird daher stets ein *Kegelmantel* sein, nämlich dadurch erhalten werden, dass man einen von einem gegebenen Punkt ausgehenden (begrenzten oder unbegrenzten) Strahl um seinen Ausgangspunkt in beliebiger Weise sich drehen lässt.

Zweisternige Curven und Flächen.

Lassen sich auf einer gegebenen Curve zwei Punkte M, N markiren von solcher Lage, dass jedwede Tangente der Curve durch einen dieser beiden Punkte geht, so mag die Curve zweisternig heissen, und M, N ihre Sterne.

Ein zweisternige Curve wird daher stets aus *zwei Winkeln* zusammengesetzt, mithin ein *Viereck* sein. Doch kann der eine Winkel des Vierecks 180^0 betragen, wodurch sich alsdann dasselbe in ein *Dreieck* verwandelt. — Beim Viereck liegen die Sterne in zwei gegenüberliegenden Ecken, während beim Dreieck der eine Stern in einer Ecke, der andere in

Lassen sich auf einer gegebenen Fläche zwei Punkte M, N markiren von solcher Lage, dass jedwede Tangentialebene der Fläche durch einen dieser beiden Punkte geht, so mag die Fläche zweisternig heissen, und M, N ihre Sterne.

Eine zweisternige Fläche wird daher stets aus *zwei Kegelmänteln* zusammengesetzt sein. Als Beispiele würden anzuführen sein die Oberfläche desjenigen Körpers, der durch Rotation eines Rhombus um eine Diagonale entsteht, ferner die Oberfläche des *Dihexaeders*, des *Octaeders*, des *Rhomboeders*, des *Parallelepipedums*, des *Würfels*, und endlich

*) Dieser Bezeichnung hat sich der Verf. früher bedient, namentlich z. B. in den Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., April 1870, Seite 56.

einem beliebigen Punkt der gegenüberliegenden Seite sich befindet.

auch diejenige des *Tetraeders*. **Bei der letzteren Fläche befindet sich der eine Stern in einer Ecke, der andere in einem beliebigen Punkte der gegenüberliegenden Seite.**

Vielsternige Curven und Flächen.

In ähnlicher Weise könnte man allgemein n-sternige Curven und Flächen definiren. Doch ist solches für die hier vorliegenden Zwecke von keinem Belang.

Der Existenzbeweis für diejenige Function, von welcher das Theorem A^{add}. handelt.

Indem wir nach den eben besprochenen geometrischen Definitionen den eigentlichen Faden unserer Betrachtungen wieder aufnehmen, haben wir uns zunächst des Theorems A^{add}. zu erinnern. Dasselbe lautet: *Sollen die ein Potential U_a erzeugenden Massen auf oder innerhalb σ liegen, und eine gegebene Summe M haben, und sollen ferner die U_s von irgend welchen auf σ vorgeschriebenen Werthen F_s nur durch eine unbestimmte additive Constante sich unterscheiden:*

$$U_s = F_s + Const., \tag{27}$$

so sind hierdurch sämmtliche U_a eindeutig bestimmt.

Um nun zu zeigen, dass ein diesen Anforderungen entsprechendes Potential U wirklich existire, markiren wir irgendwo *innerhalb* σ einen festen Punkt, denken uns in demselben die *gegebene* Masse M concentrirt, und führen an Stelle von U ein neues Potential V ein, indem wir setzen:

$$V_a = U_a - MT_a\,; \tag{28}$$

dabei soll MT_a das Potential jenes festen Massenpunktes M auf den variablen Punkt a vorstellen. Hierdurch gewinnt die Anforderung (27) folgende Gestalt:

$$V_s = (F_s - MT_s) + Const.,$$

oder, falls wir zur Abkürzung $F_s - MT_s = f_s$ setzen, folgende:

$$V_s = f_s + Const.$$

Auch die übrigen an U gestellten Forderungen sind auf das neue Potential V leicht übertragbar. So z. B. sollte die Summe der das Potential U erzeugenden Massen den gegebenen Werth M haben. Folglich wird die Summe der das neue Potential V erzeugenden Massen [wie aus (28) ersichtlich] den Werth $M - M$, d. i. den Werth

Null haben müssen. Jene an U gestellten Anforderungen werden daher, übertragen auf das neue Potential V, folgendermassen lauten:

V_a soll das Potential irgend welcher Massen sein, die auf oder innerhalb σ liegen, und deren Summe Null ist; ferner sollen die V_s von den auf σ vorgeschriebenen Werthen f_s nur durch eine unbestimmte additive Constante sich unterscheiden, also der Bedingung

$$V_s = f_s + Const. \tag{29}$$

entsprechen.

Der Verf. zeigt nun, dass man ein diesen Anforderungen entsprechendes Potential V_a wirklich aufzustellen im Stande sei, falls die gegebene Curve oder Fläche σ *zweiten Ranges* und keine *zweisternige* ist, und falls ausserdem die vorgeschriebenen Werthe F oder (was auf dasselbe hinauskommt) die neu eingeführten Werthe f auf σ *überall stetig* sind. Seine Methode (die wir hier ohne weiteren Beweis mittheilen) ist folgende:

Man nehme die *innere* Seite von σ zur *positiven* und bilde, von den vorgeschriebenen Werthen f ausgehend, gewisse aufeinanderfolgende Functionen $W^{(n)}$, $f^{(n)}$, indem man zur Bildung der $W^{(n)}$ die Formeln der Columne I., andererseits zur Bildung der $f^{(n)}$ ganz nach Belieben die Columne II. oder III. verwendet*):

(30)	I.	II.	III.
	$h\pi W_x = \int f_\sigma (d\sigma)_x,$	$W_{as} = f_s' - f_s,$	$W_{is} = f_s' + f_s,$
	$h\pi W_x' = \int f_\sigma' (d\sigma)_x,$	$W_{as}' = f_s'' - f_s',$	$W_{is}' = f_s'' + f_s',$
	$h\pi W_x'' = \int f_\sigma'' (d\sigma)_x,$	$W_{as}'' = f_s''' - f_s'',$	$W_{is}'' = f_s''' + f_s'',$
	etc. etc.	etc. etc.	etc. etc.

Die in solcher Weise entstehenden Functionen $f^{(n)}$ oder $f_s^{(n)}$ haben die Eigenschaft, mit wachsendem n gegen eine Constante zu convergiren, was angedeutet sein mag durch die Formel:

$$f_s^{(\infty)} = C. \tag{31}$$

*) In den Formeln (30) dient x als Collectivbezeichnung für die Punkte a, s, i, d. i. für sämmtliche Punkte der Ebene resp. des Raumes. Auch ist daselbst in üblicher Weise $(d\sigma)_x$ für $\frac{\partial T}{\partial \nu} d\sigma$ gesetzt, wo ν die positive Normale von σ bezeichnet. Diese positive Normale ν ist, weil wir als positive Seite von σ die *innere* festgesetzt haben, identisch mit der *innern* Normale.

Nachdem in solcher Weise die Functionen $W^{(n)}$, $f^{(n)}$, sowie die Constante C construirt sind, kann man nun das gesuchte Potential V augenblicklich angeben. Denn es wird, wie der Verf. nachweist, allen an das Potential V gestellten Anforderungen Genüge geleistet, sobald man setzt:

$$(32) \qquad V_a = -(W_a + W_a' + W_a'' + W_a''' + \cdots \textit{in inf.});$$

während gleichzeitig für die in jenen Anforderungen [Formel (29)] auftretende additive *Const.* der Werth resultirt:

$$(33) \qquad Const = -C,$$

wo C die in (31) genannte Bedeutung hat.

Auf diese Weise wird also vom Verf. die Existenz des Potentiales V nachgewiesen durch seine wirkliche Aufstellung, jedoch immer nur unter der Voraussetzung, dass die Curve oder Fläche σ *zweiten Ranges* und *keine zweisternige* sei, und dass die auf σ vorgeschriebenen Werthe f daselbst *stetig* sind.

Beiläufig sei noch bemerkt, dass das Potential V durch die Reihe (32) als das Potential einer auf σ ausgebreiteten *Doppelbelegung* dargestellt ist, dass man dasselbe aber, vermöge einer Transformation jener Reihe, auch als das Potential einer auf σ ausgebreiteten *einfachen Belegung* darzustellen im Stande ist, und dass sich einfache Formeln ergeben sowohl für das *Moment* jener Doppelbelegung, als auch für die *Dichtigkeit* der einfachen Belegung. (Vgl. das Neumann'sche Werk, Seite 206. Für V ist dort der Buchstabe Φ gebraucht.)

Der Existenzbeweis für die sogenannte natürliche Belegung.

Ein specieller Fall des Theorems A^{add}. lautet: *Sollen die ein Potential Π_a erzeugenden Massen auf oder innerhalb σ liegen, und die Summe Eins haben, und sollen ferner die Π_s constant sein:*

$$(34) \qquad \Pi_s = Const.,$$

so sind hierdurch sämmtliche Werthe Π_a eindeutig bestimmt.

Dieses specielle Potential Π_a, welches nach Vorschrift der allgemeinen Formeln (30), (31), (32) sofort berechnet werden kann, ist offenbar nichts Anderes als Potential der sogenannten natürlichen Belegung. *Folglich kann die Existenz dieses Potentiales Π, sowie auch die der natürlichen Belegung selber keinem weiteren Zweifel unterliegen*, falls nur die gegebene Curve oder Fläche σ den vorher genannten Bedingungen entspricht, nämlich *zweiten Ranges* und *keine zweisternige* ist.

Beiläufig sei hier noch aufmerksam gemacht auf einen andern Specialfall des Theorems A^{add}., nämlich auf folgenden: Sollen die

ein Potential P_a erzeugenden Massen *auf* oder *innerhalb* σ liegen, und die *gegebene* Summe M haben, und sollen ferner die P_s constant sein:

$$(35)\qquad P_s = \text{Const.},$$

so sind hierdurch sämmtliche Werthe P_a eindeutig bestimmt.

Gleichzeitig bemerkt man, dass dieses eindeutig bestimmte Potential P_a durch das vorhergehende Potential Π_a ausdrückbar ist, nämlich den Werth besitzt:

$$(36)\qquad P_a = M\Pi_a .$$

Somit ergiebt sich der Satz:

Es existiren unendlich viele Potentiale P_a, deren erzeugende Massen auf oder innerhalb σ liegen, und deren Werthe auf σ constant sind; doch sind all diese Potentiale von der Form:

$$(37)\qquad P_a = M\Pi_a ,$$

wo M eine willkührliche Constante bezeichnet, während Π_a das Potential der natürlichen Belegung vorstellt.

Der Existenzbeweis für diejenige Function, von welcher das Theorem A^{abs}. handelt.

Man kann das Theorem A^{abs}. so aussprechen: *Sollen die ein Potential W_a erzeugenden Massen auf oder innerhalb σ liegen, und sollen ferner die W_s vorgeschriebene Werthe F_s besitzen:*

$$(38)\qquad W_s = F_s ,$$

so sind hierdurch sämmtliche Werthe W_a eindeutig bestimmt, — ausser im singulären Fall.

Um zu zeigen, dass ein diesen Anforderungen entsprechendes Potential W_a stets existirt, setze man:

$$(39)\qquad W_a = U_a - K\Pi_a ,$$

wo U_a, Π_a die bereits berechneten Potentiale (27), (34) sein sollen, während K eine noch disponible Constante vorstellt. Alsdann wird:

$$(40)\qquad W_s = U_s - K\Pi_s .$$

Nun haben aber U_s, Π_s nach (27), (34), falls man die in jenen Formeln enthaltenen Constanten mit B, Γ bezeichnet, die Werthe:

$$U_s = F_s + B,$$
$$\Pi_s = \Gamma.$$

Somit erhält man:

$$(41)\qquad W_s = F_s + B - K\Gamma .$$

Folglich wird W allen gestellten Anforderungen Genüge leisten, sobald man jene noch disponible Constante $K = \frac{B}{\Gamma}$ setzt, was nur

im singulären Fall: $\Gamma = 0$ zu Unzuträglichkeiten führen könnte. — Somit ist dargethan, *dass, abgesehen von diesem singulären Fall, ein den gestellten Anforderungen entsprechendes Potential W stets existirt*, immer vorausgesetzt, dass die gegebene Curve oder Fläche σ *zweiten Ranges* und *keine zweisternige* ist, und dass die vorgeschriebenen Werthe F auf σ *stetig* sind.

Der Existenzbeweis für diejenige Function, von welcher das Theorem J^{abs}. handelt.

Das Theorem J^{abs}. lautet: *Sollen die ein Potential V_i erzeugenden Massen auf oder innerhalb σ liegen, und sollen ferner die V_s irgend welche vorgeschriebenen Werthe f_s besitzen:*

$$V_s = f_s, \tag{42}$$

so sind hierdurch sämmtliche Werthe V_i eindeutig bestimmt.

Um die Existenz dieses Potentiales nachzuweisen, sind, von den vorgeschriebenen Werthen f aus, wiederum die in (30) angegebenen Functionen $W^{(n)}$, $f^{(n)}$ zu bilden, so wie auch die in (31) angegebene Constante C. *Alsdann wird*, wie der Verf. zeigt, *allen an das Potential V gestellten Anforderungen entsprochen, sobald man setzt:*

$$V_i = C + (W_i - W_i') + (W_i'' - W_i''') + (W_i^{\text{IV}} - W_i^{\text{V}}) + \cdots \text{ in inf.}, \tag{43}$$

immer vorausgesetzt, dass die gegebene Curve oder Fläche σ *zweiten Ranges* und *keine zweisternige* ist, und dass ausserdem die vorgeschriebenen Werthe f auf σ *überall stetig* sind.

Das Potential V ist durch (43) dargestellt als das Potential einer *Doppelbelegung*, deren Moment sich leicht angeben lässt. Beiläufig zeigt der Verf., dass man dieses Potential, *abgesehen von der Constanten C*, auch ausdrücken kann als das Potential einer auf σ ausgebreiteten *einfachen* Belegung, und giebt eine Formel für die betreffende Dichtigkeit (vgl. das Neumann'sche Werk Seite 209; statt V ist dort der Buchstabe Ω gebraucht).

Einige elektrostatische und elektrodynamische Aufgaben.

Dass die oben exponirten Methoden von Bedeutung sind für die bekannten *elektrostatischen* Aufgaben, bedarf keiner Erläuterung. Doch zeigt der Verf., dass dieselben auch von Belang sind für gewisse *elektrodynamische* Aufgaben, dass man nämlich vermittelst jener Methoden folgende beiden Probleme zu lösen vermag:

I. *Auf oder ausserhalb σ sollen irgend welche Massen ausgebreitet werden, deren Potential U auf der innern Seite von σ der Bedingung entspricht:*

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} = f, \tag{44}$$

wo die f vorgeschriebene Werthe bezeichnen, und v die innere Normale von σ vorstellt. (Vgl. das Neumann'sche Werk, Seite 216.)

II. *Auf oder innerhalb σ sollen irgend welche Massen ausgebreitet werden, deren Potential U auf der äussern Seite von σ der Bedingung entspricht:*

$$\frac{\partial U}{\partial N} = f, \tag{45}$$

wo die f vorgeschriebene Werthe bezeichnen, und N *die äussere Normale von σ repräsentirt.* (Vgl. das Neumann'sche Werk, Seite 218.)

In der einen wie in der andern Aufgabe ist unter σ nach Belieben entweder eine geschlossene *Curve* in der Ebene, oder eine geschlossene *Fläche* im Raum zu verstehen.

Sechstes Capitel.

Ueber die von Beer gegebenen approximativen Methoden.

Schon im Jahre 1856 (Pogg. Annal. Bd. 98, Seite 137) hat *Beer* gewisse Reihenentwicklungen gegeben zur Berechnung derjenigen Functionen, von welchen in den Theoremen $A^{add.}$, $A^{abs.}$, $J^{abs.}$ die Rede ist, ohne indess die Convergenz und Brauchbarkeit dieser Entwicklungen einer weiteren Discussion zu unterziehen. Der Verf. gelangt nun zu dem Resultat, dass diese Entwicklungen in der That convergent und gültig sind, falls nur die gegebene Curve oder Fläche σ *zweiten Ranges* und *keine zweisternige* ist.

Um den Unterschied der *Beer*'schen Entwicklungen — gegenüber den *Neumann*'schen — einigermassen zu charakterisiren, sei zunächst bemerkt, dass es sich bei *Beer* — ebenso wie bei *Neumann* — wesentlich um zwei Aufgaben handelt, nämlich:

I. um die Aufstellung einer Function, welche den Bedingungen des Theorems $A^{add.}$, oder (was ziemlich auf dasselbe hinauskommt) denen des Theorems $A^{abs.}$ entspricht;

II. um die Aufstellung einer Function, welche den Bedingungen des Theorems $J^{abs.}$ Genüge leistet.

Vermittelst der *Beer*'schen Methoden ist man *eines* dieser Probleme (gleichgültig welches) zu lösen im Stande, sobald die Lösung des *andern* Problemes bereits vorliegt*); so dass also diese Methoden

*) Speciell bei den *elektrostatischen* Problemen, welche *Beer* hauptsächlich im Auge hatte, wird allerdings diese Voraussetzung in der Regel *erfüllt* sein.

keine wirkliche Lösung der beiden Probleme, sondern immer nur eine Reduction des einen Problems auf das andere darbieten.

Das Problem der magnetischen Induction.

Die vom Verf. zur Lösung dieses Problems gegebene Methode, welche der betreffenden *Beer*'schen Methode nahe verwandt sein dürfte, basirt ebenfalls auf der Theorie der Doppelbelegungen. Ohne hierauf näher einzugehen, sei nur mitgetheilt, was der Verf. über das Gültigkeitsgebiet seiner Methode bemerkt. Er sagt:

Ist der gegebene inducirte Körper begrenzt von einer Fläche $(2N)^{ten}$ *Ranges, so wird die in Rede stehende Methode stets convergent und gültig sein, falls nur die Magnetisirungsconstante* K *des Körpers zur Zahl* N *in der Beziehung steht:*

$$K < \frac{1}{4\pi(N-1)}.$$

Ist mithin $N = 1$, *die Fläche also zweiten Ranges, so wird die Methode gültig sein für jeden beliebigen Werth von* K.

Dabei ist zu beachten, dass die vom Verf. benutzte Magnetisirungsconstante K zu der ursprünglich von *Poisson* eingeführten Magnetisirungsconstanten k in der Beziehung steht:

$$K = \frac{3k}{4\pi(1-k)}.$$

Siebentes Capitel.

Weitere Entwicklung der Theorie der Doppelbelegungen.

Bezeichnet σ eine Curve oder Fläche mit festgesetzter positiver Seite, und denkt man sich auf σ eine Doppelbelegung vom Momente μ ausgebreitet, so wird, wie schon erwähnt, das Potential dieser Belegung auf irgend einen Punkt x durch folgende Formel dargestellt:

$$(1) \qquad W_x = \int \mu (d\sigma)_x,$$

(vgl. dieses Referat Seite 127). Nachdem im vierten Capitel der Verf. die Theorie solcher Doppelbelegungen für *geschlossene* Curven und Flächen behandelt hat, geht er gegenwärtig zu dem Fall über, dass dieselben *ungeschlossen* sind.

Will man, wenn σ eine *ungeschlossene Curve* ist, über die Gesammtheit der Potentialwerthe (1) eine anschauliche Vorstellung gewinnen, so hat man vor allen Dingen *zweierlei* Werthsysteme zu unterscheiden, das der W_s und das der W_t, indem man sämmtliche

Punkte der ganzen unendlichen Ebene, je nachdem sie *auf* oder *ausserhalb* σ liegen, resp. mit s oder t bezeichnet. Denn diese beiden Systeme sind, wie der Verf. zeigt, so gut wie *ohne Zusammenhang*, indem sie fast überall in *unstetiger* Weise zusammenstossen.

Das System der W_s, für sich allein betrachtet, ist, wie der Verf. zeigt, längs der gegebenen Curve überall stetig, ausser in den Eckpunkten derselben. Denkt man sich nämlich eine Function f einerseits für die *Endpunkte* g, h der Curve, andererseits für *alle übrigen* Punkte s der Curve durch die Formeln definirt:

$$
\begin{aligned}
f_g &= W_g, \\
f_s &= W_s + \vartheta_s \mu_s, \qquad (2) \\
f_h &= W_h,
\end{aligned}
$$

so wird diese Function f auf σ *allenthalben* stetig sein. Dabei bezeichnet ϑ_s das supplementare Winkelmass der Curve im Punkte s, und μ_s den daselbst vorhandenen Werth von μ.

Um von dem unstetigen Zusammenstoss der beiden Systeme W_s und W_t eine deutliche Vorstellung zu gewinnen, sind die *Grenzwerthe* der W_t, d. i. diejenigen Werthe in Betracht zu ziehen, welche W_t annimmt, sobald der variable Punkt t der Curve σ unendlich nahe rückt. Diese Grenzwerthe zerfallen in verschiedene Kategorien. Wir können nämlich erstens den Punkt t einem der beiden *Endpunkte* g, h der Curve sich nähern lassen; die in solcher Weise entstehenden Grenzwerthe seien bezeichnet mit W_{tg} resp. mit W_{th}. Und andererseits können wir den Punkt t irgend einem *intermediären* s (d. i. einem Punkte s, der von den Endpunkten durch irgend welche, wenn auch noch so kleine, Entfernungen getrennt ist) sich nähern lassen; die in solcher Weise entstehenden Grenzwerthe mögen bezeichnet werden mit W_{ts}.

Der Verf. zeigt, dass, entsprechend den unendlich vielen Richtungen, in welchen die Annäherung von t an g erfolgen kann, unendlich viele Grenzwerthe W_{tg} sich ergeben, die aber sämmtlich von der Form sind:

$$W_{tg} = A + B\Delta, \qquad (3)$$

wo A, B Constanten sind, während Δ das *Azimuth der Annäherung*, d. i. denjenigen Winkel bezeichnet, unter welchem die unendlich kleine Linie gt im Punkte g gegen die positive Seite der Curve σ geneigt ist. Eine ähnliche Formel gilt natürlich für die W_{th}:

$$W_{th} = A' + B'\Delta', \qquad (4)$$

wo A', B', Δ' analoge Bedeutungen haben.

Was andererseits die den *intermediären* Punkten s entsprechenden Grenzwerthe W_{ts} betrifft, so ergiebt sich, dass dieselben an einer gegebenen Stelle s im Ganzen nur *zwei* Werthe haben, von welchen der eine oder andere zur Geltung kommt, je nachdem die in Rede stehende Annäherung von der *negativen* oder *positiven* Seite (der Curve) erfolgt. Der Verf. bezeichnet diese beiden Werthe mit

$$W_{as} \text{ und } W_{is},$$

indem er den Punkt t, je nachdem derselbe von der *negativen* oder *positiven* Seite sich nähert, respective mit a oder i benennt.

Die Resultate, zu denen der Verf. hinsichtlich all dieser Grenzwerthe W_{tg}, W_{th} und W_{ts} gelangt, lassen sich schliesslich zusammenfassen in folgenden Sätzen:

Lässt man den variablen Punkt t irgend einem intermediären Punkt s von der negativen oder positiven Seite sich nähern, und bezeichnet man denselben im erstern Fall mit a, im letztern mit i, so gelten für die betreffenden Grenzwerthe W_{as} und W_{is} die Formeln:

$$(5)\qquad \begin{aligned} W_{as} &= (W_s + \vartheta_s \mu_s) - \pi \mu_s, \\ W_{is} &= (W_s + \vartheta_s \mu_s) + \pi \mu_s, \\ \frac{\partial W_{as}}{\partial p} &= \frac{\partial W_{is}}{\partial p}, \end{aligned}$$

wo p eine beliebig gegebene Richtung vorstellt.

Lässt man ferner den variablen Punkt t einem der beiden Endpunkte, z. B. dem Punkte g sich nähern, so gilt für den betreffenden Grenzwerth W_{tg} die Formel:

$$(6)\qquad W_{tg} = W_g + \mu_g(\pi - \Delta),$$

wo Δ das Azimuth der Annäherung, d. i. denjenigen Winkel bezeichnet, unter welchem die unendlich kleine Linie gt im Punkte g gegen die positive Seite der Curve geneigt ist.

Auf die analogen Betrachtungen im *Raume* (über ungeschlossene Flächen) geht der Verf. nicht näher ein.

Achtes Capitel.

Theorie der kanonischen Potentialfunctionen.

Man kann von den „*Potentialfunctionen eines gegebenen Gebietes*“ sprechen, indem man — nach dem Vorgange von *Lipschitz* und auch wohl anderer Mathematiker — unter einer solchen Function das Potential irgend welcher Massen versteht, die theils *ausserhalb*, theils *auf der Grenze* des gegebenen Gebietes ausgebreitet sind. Diese

Potentialfunctionen bilden das eigentliche Thema, um welches alle bisherigen Capitel mehr oder weniger sich drehen. So z. B. wird durch die Methode des arithmetischen Mittels (wenigstens in vielen Fällen) die Berechnung derjenigen Potentialfunction eines gegebenen Gebietes ermöglicht, welche auf der Grenze desselben mit daselbst vorgeschriebenen Werthen entweder vollständig oder bis auf eine additive Constante übereinstimmt. Während nun aber bisher jene vorgeschriebenen Werthe immer als *stetig* vorausgesetzt wurden, mag gegenwärtig angenommen werden, dass dieselben *unstetig* seien, und in Ueberlegung gezogen werden, ob vielleicht dieser zweite Fall auf den ersten sich reduciren lasse. Um die Frage genauer zu formuliren, betrachtet der Verf. ein bestimmtes Beispiel.

Es sei σ eine stetig gebogene geschlossene Curve, ferner $\mathfrak{J}$ das Gebiet innerhalb σ, und es sei irgend welche Methode $\mathfrak{M}$ bekannt*), mit Hülfe deren man die Potentialfunctionen des Gebietes $\mathfrak{J}$ für *stetig* gegebene Grenzwerthe wirklich zu berechnen vermag. — Es fragt sich, ob man alsdann jene Potentialfunctionen auch für solche Grenzwerthe f zu bilden im Stande ist, welche auf σ in einzelnem Punkte mit *endlichen Differenzen* behaftet, sonst aber stetig sind.

Bildet man, um näher hierauf einzugehen, das diesen f entsprechende Integral:

$$U_x = \frac{1}{\pi}\int f(d\sigma)_x\,,$$

d. i. das Potential einer auf σ ausgebreiteten Doppelbelegung vom Momente $\frac{f}{\pi}$, so erkennt man leicht, dass die Werthe U_s von der Unstetigkeit der f_s in keinerlei Weise afficirt, sondern trotzdem *stetig* sind.**) Auch erkennt man, dass die U_i zu den U_s in der Beziehung stehen:

*) Eine solche Methode $\mathfrak{M}$ wird z. B. die *Methode des arithmetischen Mittels* sein, falls die Curve σ zweiten Ranges und keine zweisternige ist.

**) Um diese Behauptung zu rechtfertigen, bemerke man zunächst, dass das Integral U_x, ausführlicher geschrieben, so lautet:

$$U_x = \frac{1}{\pi}\int \frac{f\cos\vartheta\cdot d\sigma}{E}$$

(vgl. dieses Referat, Seite 127). Sodann beschreibe man um irgend einen Punkt s_0 der Curve σ eine kleine Kreislinie, durch welche σ in einen innern Theil σ' und einen äussern Theil σ'' zerfällt, von welchen der erstere, bei hinreichender Kleinheit der Kreislinie, als *geradlinig* betrachtet werden kann; denn die Curve σ ist nach gemachter Voraussetzung überall von *stetiger Biegung*. Bildet man nun das Integral U_x für irgend einen auf σ, und zwar

$$U_{is} = U_s + f_s$$

(vgl. dieses Referat, Seite 130), so dass also die Stetigkeit der U_s sich unmittelbar überträgt auf die $(f_s - U_{is})$. Folglich wird man mit Hülfe der Methode 𝔐 diejenige Potentialfunction V_i des Gebietes ℑ zu berechnen im Stande sein, welche auf σ die Werthe $(f_s - U_{is})$ besitzt, also der Relation

$$V_{is} = f_s - U_{is}$$

entspricht. Giebt man aber dieser Relation die Gestalt:

$$V_{is} + U_{is} = f_s,$$

so erkent man sofort, dass $(V_i + U_i)$ die eigentlich gesuchte Potentialfunction repräsentirt, nämlich diejenige, deren Grenzwerthe mit den vorgeschriebenen f identisch sind.

Die vorhin aufgeworfene Frage ist also bejahend zu beantworten. Mit andern Worten: *Bezeichnet σ eine überall stetig gebogene geschlossene Curve, ferner ℑ das Gebiet innerhalb σ, und ist man im Besitz irgend welcher Methode zur Bildung der Potentialfunctionen des Gebietes ℑ für vorgeschriebene stetige Grenzwerthe, so wird man diese Functionen auch für solche Grenzwerthe zu bilden im Stande sein, welche auf σ in einzelnen Punkten mit endlichen Differenzen behaftet, sonst aber stetig sind.* — Uebrigens hat der Verf. diesen Satz im gegenwärtigen Capitel mit grösserer Strenge und zugleich auch mit grösserer Allgemeinheit bewiesen, nämlich gezeigt, dass derselbe auch dann in Kraft bleibt, wenn die gegebene Curve σ *nicht* stetig gebogen, sondern mit irgend welchen Ecken behaftet ist.

Vor allen Dingen fragt es sich, ob die behandelte Aufgabe eine völlig bestimmte ist, ob also eine Potentialfunction W_i des Gebietes ℑ durch Angabe ihrer Grenzwerthe f *eindeutig* bestimmt sei, — immer vorausgesetzt, dass diese f keine anderen Unstetigkeiten haben, als solche, die in einzelnen Differenzpunkten bestehen. Der Verf. zeigt, dass solches der Fall ist, sobald man noch gewisse den einzelnen Differenzpunkten entsprechende Bedingungen hinzufügt. Diese

---

auf σ' gelegenen Punkt s, so zerfällt dasselbe in zwei Theile, entsprechend den Theilen σ' und σ'':

$$U_s = U_s' + U_s''.$$

Da σ' als *geradlinig* betrachtet werden darf, so erkennt man sofort, dass der Winkel ϑ in allen Elementen des Integrals U_s' gleich 90^0, mithin U_s' selber gleich 0 ist; und erhält also:

$$U_s = U_s'';$$

woraus ersichtlich, dass U_s bei einer kleinen Bewegung des Punktes s in *stetiger* Weise variirt. W. z. b. w.

accessorischen Bedingungen sind leicht angebbar. Bezeichnet nämlich g irgend einen der in Rede stehenden Differenzpunkte, und sind f_1 und f_2 die in g zusammenstossenden Werthe von f, so besteht die dem Punkte g entsprechende *accessorische* Bedingung darin, dass alle innerhalb eines um g beschriebenen kleinen Kreises befindlichen Werthe W_i durch Verkleinerung dieses Kreises theils in das Intervall $f_1 \cdots f_2$ hinein, theils beliebig nahe an dasselbe heranziehbar sind.

Analoges ist zu bemerken für das *ausserhalb* σ gelegene Gebiet $\mathfrak{A}$. Um die Behandlung des Gebiets $\mathfrak{A}$ mit der des Gebiets $\mathfrak{J}$ möglichst *conform* zu machen, empfiehlt es sich, den Begriff der Potentialfunction ein wenig zu modificiren. Für diesen modificirten Begriff benutzt der Verf. das Epitheton: „*kanonisch*“. Und zwar versteht er unter einer *kanonischen Potentialfunction* des Gebietes $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{J}$ eine solche, welche abgesehen von einer *additiven Constanten* das Potential irgend welcher ausserhalb oder auf der Grenze des gegebenen Gebiets ausgebreiteter Massen von der Summe *Null* ist.

Neuntes Capitel.

Ueber gewisse combinatorische Methoden.

Murphy hat bekanntlich eine combinatorische Methode angegeben, durch welche die elektrostatischen Probleme für ein System von beliebig vielen Conductoren auf diejenigen Probleme reducirt werden, welche den *einzelnen* Conductoren entsprechen. Diese Methode beruht im Wesentlichen auf zwei Sätzen, von denen der eine darin besteht,

(1) *dass die auf einem zur Erde abgeleiteten Conductor durch einen elektrischen Massenpunkt* (— 1) *inducirte Vertheilung stets monogen und zwar positiv ist*;

während der andere dahin lautet:

(2) *dass die eben genannte Belegung ihrer Gesammtmasse nach stets kleiner als* 1 *ist.*

Um an diese *Murphy*'sche Methode kurz zu erinnern, mag folgende Aufgabe in Betracht gezogen werden: Zwei resp. von den Flächen α und β begrenzte Conductoren sind in solcher Weise mit Elektricität geladen, dass das elektrische Gesammtpotential V auf α den constanten Werth A, andererseits auf β den Werth *Null* hat. Es sollen für diesen Fall die elektrischen Belegungen der beiden Conductoren, sowie auch diejenigen Werthe ermittelt werden, welche das Potential V in beliebigen Punkten des Raumes besitzt.

Um diese Aufgabe nach der *Murphy*'schen Methode zu behandeln,

betrachte man zunächst den Conductor α für sich allein, und bestimme diejenige Belegung Δ_α dieses Conductors, deren Potential U auf α den vorgeschriebenen constanten Werth A hat, was angedeutet sein mag durch die Formel:

$$U_\alpha = A.$$

Sodann bestimme man diejenige Belegung Δ'_β, welche die Belegung Δ_α auf den Conductor β induciren würde, falls derselbe zur Erde abgeleitet wäre. Das Potential U' dieser Belegung Δ'_β wird alsdann auf β, abgesehen vom entgegengesetzten Vorzeichen, identisch sein mit U, was angedeutet werden mag durch

$$U'_\beta = -U_\beta.$$

Hierauf bestimme man diejenige Beliegung Δ''_α, welche durch die Belegung Δ'_β auf dem Conductor α hervorgerufen werden würde, falls derselbe zur Erde abgeleitet wäre. Das Potential U'' dieser Belegung Δ''_α wird alsdann auf α, abgesehen vom entgegengesetzten Vorzeichen, identisch mit U' sein, also der Formel entsprechen:

$$U''_\alpha = -U'_\alpha.$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens ergiebt sich folgendes System von Formeln:

$$(3)\qquad \begin{aligned} U_\alpha &= A, & U'_\beta &= -U_\beta, \\ U''_\alpha &= -U'_\alpha, & U'''_\beta &= -U''_\beta, \\ U^{IV}_\alpha &= -U'''_\alpha, & U^{V}_\beta &= -U^{IV}_\beta, \\ \dots\dots && \dots\dots \end{aligned}$$

Und mit Hülfe dieser Formeln erkennt man leicht, dass das *eigentlich gesuchte Potential* V den Werth hat:

$$(4)\qquad V = U + U' + U'' + U''' + \cdots \text{ in inf.};$$

denn aus jenen Formeln (3) folgt sofort, dass V auf α den Werth A, andererseits auf β den Werth *Null* hat. Zugleich erkennt man, dass die *gesuchten Belegungen* E_α und E_β der beiden Conductoren die Werthe haben*):

$$(5)\qquad \begin{aligned} E_\alpha &= \Delta_\alpha + \Delta''_\alpha + \Delta^{IV}_\alpha + \cdots \text{ in inf.}, \\ E_\beta &= \Delta'_\beta + \Delta'''_\beta + \Delta^{V}_\beta + \cdots \text{ in inf.} \end{aligned}$$

Auch erkennt man, und zwar mit Hülfe der Sätze (1), (2), dass die Reihen (5) unter allen Umständen *convergent* sind, und dass also Gleiches auch gilt von der Reihe (4).

---

*) Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, dass die Grössen Δ, E die *Dichtigkeiten* der in Rede stehenden Belegungen sein sollen.

Diese Murphy'sche Methode ist auf die analogen Probleme der Ebene nicht mehr anwendbar, weil die Sätze (1), (2), wie der Verf. zeigt, *daselbst unrichtig werden.* Aus diesem Grunde entwickelt der Verf. eine etwas andere Methode, welche von diesem Uebelstande frei ist, nämlich in ganz conformer Weise Anwendung findet auf die Probleme des Raumes, wie auf die der Ebene.

Ausserdem giebt der Verf. eine im Ganzen ähnliche Methode (oder vielmehr *zwei* solche Methoden) für den Fall an, dass die beiden Flächen α und β *einander schneiden.* Es handelt sich alsdann, falls z. B. α und β Kugelflächen sind, um die Lösung der elektrischen Probleme für den von diesen beiden Kugelflächen begrenzten *linsen*förmigen Körper.

Anhang.

Erweiterung einiger Untersuchungen von Green und Thomson.

Dieser Anhang enthält, wie schon aus der Ueberschrift hervorgeht, zwei ziemlich differente Betrachtungen.

Die Green'sche Function und die Green'sche Massenbelegung.

Repräsentirt σ eine geschlossene Curve oder Fläche, und j einen festen Punkt *innerhalb* σ, so versteht man bekanntlich unter der *Green'schen Massenbelegung* von σ diejenige, welche mit Bezug auf alle *äussere* Punkte äquipotential ist mit einer in j concentrirten Masse Eins. Gleichzeitig versteht man unter der *Green'schen Function* das Potential der genannten Massenbelegung auf irgend welchen innern Punkt i. Der Verf. bezeichnet die Dichtigkeit jener Belegung in irgend einem Punkte σ und den Werth der *Green*'schen Function für den Punkt i respective mit η_σ und G_i oder (weil beide Grössen abhängig sind von dem anfangs gewählten festen Punkte j) mit η_σ^j und G_i^j.

In analoger Weise kann man von derjenigen *Green'schen Belegung* und *Green'schen Function* sprechen, welche einem festen Punkte a *ausserhalb* σ entsprechen. In diesem Falle bezeichnet der Verf. den Werth der Dichtigkeit in einem Punkte σ, und den Werth der genannten Function in irgend einem *äussern* Punkte a resp. mit η_σ^α und G_a^α.

Solches festgesetzt, ist bekanntlich (wie wenigstens für den Fall des *Newton*'schen Potentials schon *Green* gezeigt hat):

$$(1) \qquad G_i^j = G_j^i \quad \text{und} \quad G_a^\alpha = G_\alpha^a\,;$$

so dass man diese Functionen einfacher mit G_{ij} und $G_{a\alpha}$ benennen kann.

Der Verf. zeigt nun, dass für die *Green*'schen Belegungen η_σ^j und η_σ^α gewisse Sätze gelten, die vollständig analog demjenigen sind, der früher — unter dem Namen des erweiterten *Gauss*'schen Satzes — von ihm aufgestellt wurde mit Bezug auf die *natürliche* Belegung γ_σ.

Um näher hierauf einzugehen, sei V das Potential eines beliebigen Massensystems, dessen einzelne Massenelemente, je nachdem sie *ausserhalb* oder *innerhalb* σ liegen, respective mit m oder μ bezeichnet werden mögen. Es sei also für einen beliebigen Punkt x:

$$V_x = \sum (\mu T_{\mu x}) + \sum (m T_{mx}), \tag{2}$$

wo T die früher (Seite 110 dieses Referates) festgesetzte Bedeutung hat. Alsdann drückt jener erweiterter *Gauss*'sche Satz (vgl. Seite 122 dieses Referates) sich durch die Formel aus:

$$\int V_\sigma \gamma_\sigma \, d\sigma = \sum (m \Pi_m) + \sum (\mu \Gamma). \tag{3}$$

Und in analoger Weise stellen die neuen Sätze für die *Green*'schen Belegungen sich durch folgende Formeln dar:

$$\int V_\sigma \eta_\sigma^\alpha \, d\sigma = \sum (m G_{m\alpha}) + \sum (\mu T_{\mu\alpha}), \tag{4}$$

$$\int V_\sigma \eta_\sigma^j \, d\sigma = \sum (m T_{mj}) + \sum (\mu G_{\mu j}). \tag{5}$$

Sind die m sämmtlich *Null*, so verschwindet in Gleichung (4) auf der rechten Seite das erste Glied, während das zweite mit Rücksicht auf (2) in V_α übergeht; so dass man zu der bekannten Formel gelangt:

$$\int V_\sigma \eta_\sigma^\alpha \, d\sigma = V_\alpha. \tag{4. a}$$

Und sind andererseits die μ sämmtlich *Null*, so verschwindet in Gleichung (5) auf der rechten Seite das zweite Glied, während das erste, mit Rücksicht auf (2), in V_j übergeht; so dass man die ebenfalls bekannte Formel erhält:

$$\int V_\sigma \eta_\sigma^j \, d\sigma = V_j. \tag{5. a}$$

Uebrigens sind die Eigenschaften der *Green*'schen Belegungen in der *Ebene* und im *Raume*, d. h. in der Theorie des Logarithmischen und des *Newton*'schen Potentials *nicht* durchweg einander entsprechend. So sind z. B. sämmtliche Werthe der Function η_σ^α im *Raume* positiv, *nicht* aber in der *Ebene*. Ferner ist die Gesammtmasse der Belegung η_σ^α (welche sich ausdrückt durch das Integral $\int \eta_\sigma^\alpha d\sigma$) im *Raume* stets kleiner als Eins, höchstens gleich Eins, *nicht* aber in der *Ebene*.

Andererseits sind die Werthe der Function η_σ^j, im Raume wie in der Ebene, sämmtlich positiv. Auch ist die Gesammtmasse der Belegung η_σ^j (d. i. das Integral $\int \eta_\sigma^j d\sigma$), im Raume wie in der Ebene, stets gleich Eins.

Thomson's Methode der reciproken Radien.

Der Verf. zeigt, dass diese Methode nicht nur für das *Newton*'sche Potential im Raume, sondern ebenso auch für das Logarithmische Potential in der Ebene wichtige Resultate ergiebt. Auch theilt der Verf. beiläufig einen neuen Satz über *correspondirende Kugelflächen* mit.

Um auf diesen letztern näher einzugehen, bezeichne (o, H) eine gegebene Kugelfläche vom Centrum o und Halbmesser H. Lässt man nun von o einen Strahl ausgehen, und markirt auf demselben irgend zwei der Relation

$$(1)\qquad (ox)\,(o\xi) = H^2$$

entsprechende Punkte x, ξ, so heisst bekanntlich jeder von diesen beiden Punkten das *Spiegelbild* des andern in Bezug auf die Kugel (o, H). Auch pflegt man zwei solche Punkte kurzweg *correspondirende* oder *conjugirte* Punkte zu nennen. — Sind zwei Paare correspondirender Punkte x, ξ und y, η gegeben, so ist nach (1):

$$(2)\qquad (ox)\,(o\xi) = (oy)\,(o\eta) = H^2,$$

und folglich

$$(3)\qquad \Delta(oxy) \sim \Delta(o\eta\xi).$$

Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke folgt sofort:

$$(4)\qquad \frac{(xy)}{(\xi\eta)} = \frac{(ox)}{(o\eta)} = \frac{(oy)}{(o\xi)} = \sqrt{\frac{(ox)\,(oy)}{(o\xi)\,(o\eta)}}.$$

Der Verf. zeigt nun, dass diese Relationen (4) gültig bleiben*), wenn man die Punkte y, η durch zwei *einander correspondirende Kugelflächen* s, σ ersetzt, dass nämlich die Formeln gelten:

$$(5)\qquad \frac{(xs)}{(\xi\sigma)} = \frac{(ox)}{(o\sigma)} = \frac{(os)}{(o\xi)} = \sqrt{\frac{(ox)\,(os)}{(o\xi)\,(o\sigma)}};$$

nur sind in diesem Fall unter (os), (xs) und $(o\sigma)$, $(\xi\sigma)$ die von den Punkten o, x, ξ an s resp. σ gelegten *Tangenten* zu verstehen, jede Tangente gerechnet von ihrem Ausgangspunkt bis zum Berührungspunkt.

*) Ein sehr einfacher *geometrischer* Beweis dieses Satzes ist kürzlich von *H. E. Grassmann* gegeben worden (Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1877, Seite 133).

Leipzig. C. Neumann.



Paul Gordan: Ueber die Auflösung der Gleichungen 5. Grades.

Für die Auflösung der Gleichungen 5. Grades war ursprünglich der Gesichtspunkt massgebend, aus denselben durch rationale Transformation möglichst viele Glieder wegzuschaffen. Die Herstellung solcher Formen, der Tschirnhausen'schen und der Jerrard'schen*), wo 3 Glieder herausgeschafft sind und in nur 3 noch 1 wesentlicher Coefficient übrig bleibt, erfordert aber beschwerliche Rechnungen; einfacher aber weniger weit gehend ist die Herausschaffung von nur 2 Gliedern. Daher hat sich weiterhin der Gesichtspunkt geltend gemacht, solche transformirte Gleichungen oder solche Resolventen aufzustellen, deren Coefficienten von möglichst wenig Parametern abhängen, nämlich von 2 oder einem. Besonders sind es Gleichungen 6. Grades, die von Brioschi Jacobi'sche Gleichungen**) genannt worden sind, auf welche die Theorie hingewiesen hat.

Den Anstoss zu diesen Betrachtungen gab eine Bemerkung Galois, dass die Modulargleichung 6. Grades der Transformation 5. Grades der elliptischen Functionen eine Resolvente 5. Grades besitzt. Hermite hat Comptes Rendus 1858 diese Resolvente 5. Grades wirklich aufgestellt; es ergab sich gerade die Jerrard'sche Form. Durch dieselbe Betrachtung werden auch gewisse Jacobi'sche Gleichungen auf die Jerrard'sche Form zurückgeführt.

In der Theorie der elliptischen Functionen kommen eine Anzahl von Ausdrücken vor, vor Allem der Multiplicator, welche Jacobi'schen Gleichungen genügen (vgl. Jacobi, Crelle 3).

Den Herren Brioschi und Kronecker ist es gelungen die allgemeinen Jacobi'schen Gleichungen sowohl, die 2 wesentliche Parameter besitzen, als auch die speciellen mit nur einem, mittelst elliptischer Functionen zu lösen. Damit ist aber der Weg zur Lösung der Gleichungen 5. Grades gewiesen. Kronecker führt die Lösung der allgemeinen Gleichung 5. Grades auf eine specielle Jacobi'sche zurück. Brioschi führt ausserdem für die Jacobi'schen Gleichungen Resolventen 5. Grades ein, unter andern die Jerrard'sche, in welche man die Gleichungen 5. Grades transformiren kann. Aber die nöthigen Eliminationen werden entweder nur angedeutet oder sind sehr verwickelt.

---

*) Dieselbe hat die Form:

$$x^5 + ax + b = 0.$$

**) Zwischen den Quadratwurzeln der Wurzeln dieser Gleichungen finden 3 lineare Relationen statt.

Ein Fortschritt knüpft an die Untersuchungen von Klein über das Icosaeder an (Ann. Bd. IX). Unter den Resolventen der Icosaedergleichung giebt es zunächst die specielle Jacobi'sche Gleichung, mit deren Hülfe Kronecker die allgemeinen Gleichungen 5. Grades auflöst und eine Gleichung 5. Grades wie sie Brioschi hat. Klein hat nun, im Verkehr mit mir auf den Gesichtspunkt hingewiesen, diesen Zusammenhang benutzt, um die allgemeine Jacobi'sche Gleichung auf zwei Icosaedergleichungen oder auch auf eine zurückzuführen und in Folge dessen auch die Wurzeln der Gleichung

$$x^5 + ax^2 + bx + c = 0$$

durch Icosaederfunctionen ausgedrückt. Eine solche Darstellung ist in conciser Form auch in meiner Note (Erlanger Berichte, Juni 1872) enthalten, aber in der vorliegenden Arbeit systematischer abgeleitet und in noch einfacherer Form gegeben. Zugleich ist die Zurückführung auf specielle Formen 5. Grades, auch auf die Jerrard'sche geleistet.

Ich fasse in meiner Arbeit die Auflösung der Gleichungen 5. Grades als specielle Anwendung einer allgemeinen Invariantentheorie der Icosaedersubstitutionen auf; dieselbe bildet die ersten beiden Theile meines Aufsatzes. Die Auflösung der Gleichung 5. Grades selbst im 3. Theile stellt sich so einfach dar, dass einer praktischen Verwendung der Formeln keine Schwierigkeit mehr im Wege steht.

Der Inhalt des 1. Theils ist der folgende: Ich behandle die 120 linearen Icosaedersubstitutionen, durch welche die Form (das Icosaeder):

$$\gamma_1 = y_1^{11} y_2 + 11 y^6 y_2^6 - y_1 y_2^{11}$$

in sich übergeht, in der von Klein im 12. Bd. der Math. Ann. gegebenen Form. Zu jeder dieser 120 Substitutionen gehört eine andere desselben Systems, welche aus ihr entsteht, wenn man $\left(\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$ durch ε^2 ersetzt. Diese zugehörigen Substitutionen wende ich auf andere Variable an und stelle mir nunmehr die Aufgabe:

Alle in den x und y homogenen Functionen zu finden, die sich bei gleichzeitiger Anwendung entsprechender Substitutionen nicht ändern. Diese Functionen nenne ich Icosaederformen. Zu ihnen gehört zunächst γ_1, ferner deren Hessische Form γ_2 und die Functionaldeterminante γ_3; sowie die Formen γ^1, welche aus den γ dadurch hervorgehen, dass man y_1, y_2, x_1, x_2



durch $x_1, x_2, -y_2, y_1$ ersetzt. Diese Operation bezeichne ich durch Vertauschung von x mit y.

Es ist das vollständige System zu suchen, aus dem sich alle Icosaederformen als ganze Functionen zusammensetzen lassen. Dazu gehören die γ und γ^1.

Zunächst bestimme ich nun diejenige Form, welche in beiden Variabelpaaren möglichst niedrigen Grades ist:

$$f = y_1^3 x_1^2 x_2 + y_1^2 y_2 x_2^3 + y_1 y_2^2 x_1^3 - y_2^3 x_1 x_2^2$$

Um die übrigen Formen zu finden ist, da die x und y verschiedenen Substitutionen gleichzeitig unterworfen werden, eine Ausdehnung der Bildungsprozesse von Covarianten erforderlich. Es muss gleichzeitig in Bezug auf die x und in Bezug auf die y überschoben werden. Hierdurch findet man die folgenden einfachsten Covarianten von f:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{9}{4}(f,f)_{1,1} = y_1^4 x_1 x_2^3 - y_1^3 y_2 x_1^4 - 3 y_1^2 y_2^2 x_1^2 x_2^2 \\
&\qquad + y_1 y_2^3 x_2^4 + y_2^4 x_1^3 x_2 \\
\psi &= 12(f,\varphi)_{1,1} = y_1^5 (x_1^5 + x_2^5) - 10 y_1^4 y_2 x_1^3 x_2^2 + 10 y_1^3 y_2^2 x_1 x_2^4 \\
&\qquad + 10 y_1^2 y_2^3 x_1^4 x_2 + 10 y_1 y_2^4 x_1^2 x_2^3 + y_2^5(-x_1^5 + x_2^5) \\
\Theta &= 4(f,\varphi)_{3,0} = x_2 y_1^7 - 7 x_1 y_1^5 y_2^2 - 7 x_2 y_1^2 y_2^5 - x_1 y_2^7 \\
\tau &= \frac{9}{2}(f,f)_{2,0};\ (f,\tau)_{1,0};\ (f,\varphi)_{1,0},\ \gamma_1,\ (f,\psi)_{1,0},\ (\varphi,\varphi)_{2,0},
\end{aligned}$$

welche ich durch U bezeichne, während ich die Formen U' nenne, welche aus ihnen durch Vertauschung von x mit y hervorgehen. Unter den U ist Θ, als linear, ausgezeichnet. Ich benutze sie und die ihr entsprechende Θ' zur Anordnung des Systems und beweise den Satz:

Alle Formen des Systems sind unter folgenden enthalten:

$$U,\ U',\ \left(U, \Theta^s\right)_{s,0},\ \left(U'\ \Theta'^s\right)_{0,s},$$

wo die letzteren Ueberschiebungen bedeuten.

Sondert man die überflüssigen Formen ab, so erhält man das System; es besteht aus 36 Formen, sie bilden gleichzeitig das Formensystem von f. Diejenigen Icosaederformen, welche in x und y denselben Grad haben, sind ganze Functionen von f, φ, ψ, Δ

$$\Delta = \Theta\left(f, \tau'\right)_{0,1} - \Theta'\left(f, \tau\right)_{1,0},$$

die unter ihnen, welche sich bei Vertauschung von x und y nicht ändern, von f, φ, ψ allein; zu letzteren gehört auch Δ^2.

Die Theorie dieser Formen vervollständige ich durch Aufstellung der associirten Formen, durch welche sich alle übrigen rational

darstellen lassen. Es sind diess $f, \varphi, \psi, \frac{\tau}{\Theta}, \frac{(f,\tau)_{1,0}}{\Theta} = c$. Zwischen ihnen besteht die Relation:

$$Lc^2 - Mc + N = 0$$

wo:

$$L = f\psi - 8\varphi^2$$
$$M = 9f^2\varphi - \frac{1}{3}\psi^2$$
$$N = -27f^4 - 8\varphi^3 + 9f\varphi\psi$$
$$\Delta^2 = LN - M^2.$$

Der 2. Theil des Aufsatzes beschäftigt sich mit einer Untergruppe der Icosaedersubstitutionen, welche dem Tetraedertypus angehört. Man hat wieder 3 Formen g_1, g_2, g_3 in den y allein, welche durch die Gruppe in sich übergehn, und die durch Vertauschung aus ihnen entstehenden g'. Unter den Tetraederformen in x und y befindet sich eine bilineare

$$\chi = -y_1(x_1 + x_2) + y_2(x_1 - x_2).$$

Das System der Tetraederformen besteht aus den g und den Ueberschiebungen $\left(g, \chi^s\right)_{0,s}$; zur rationalen Darstellung genügen wieder 5 Formen.

Da die Icosaederformen zugleich Tetraederformen sind, so sind sie durch dieses System als ganze Functionen darstellbar. Man kann $f, \varphi, (f,\varphi)_{1,0}, (f,\varphi)_{0,1}$ so ausdrücken und daher unser Tetraederformensystem durch die Formen ersetzen:

$$f, \varphi, V = \left((f,\varphi)_{1,0}, \chi\right)_{0,1} - \left((f,\varphi)_{0,1}, \chi\right)_{1,0}, \left(f, \chi^s\right)_{s,0}, \left(f, \chi^s\right)_{0,s},$$
$$\left(\varphi, \chi\right)^s_{s,0}, \left(\varphi, \chi\right)^s_{0,s}, \left(V, \chi^s\right)_{s,0}, \left(V, \chi^s\right)_{0,s}$$

Durch diese kann man alle Icosaeder- und Tetraederformen als ganze Functionen darstellen, z. B.: $\psi = -\chi^5 - 5f\chi^2 + 5\varphi\chi$. Durch $f, \varphi, \chi, c, (f,\chi)_{1,0}$ sind alle Tetraederformen rational ausdrückbar, die von gleichem Grade in x und y durch f, φ, χ, c allein.

Um diese Entwicklung zur Lösung einer Gleichung 5. Grades zu verwerthen, transformire ich dieselbe zunächst in die Gleichung:

$$\text{I.} \qquad \chi^5 + 5f\chi^2 - 5\varphi\chi + \psi = 0$$

Ihre 5 Wurzeln χ_ν

$$\chi_\nu = -\varepsilon^\nu x_1 y_1 + \varepsilon^{2\nu} x_1 y_2 - \varepsilon^{3\nu} x_2 y_1 - \varepsilon^{4\nu} x_2 y_2$$

erhält man aus χ durch Icosaedersubstitutionen und ihre Discri-

minante ist Δ^2. Die Icosaederfunction $\frac{y_1}{y_2}$ findet man aus dem Icosaederparameter $\frac{\gamma_1^5}{\gamma_2^3}$, welcher rational in f, φ, ψ, c ist, und sodann die $x_i y_k$ aus 2 linearen Covarianten. — Ein etwas andrer Weg zur Aufsuchung der χ_ν, ist die Transformation der Gleichung I auf die Brioschi'schen Normalformen, die hier als Resolventen des Icosaeders auftreten. So existiren für:

$$u = \frac{g_1}{\sqrt{\gamma_1}};\quad v = \frac{g_2 \gamma_1}{\gamma_2};\quad w = \frac{g_1 g_2 \gamma_1^3}{\gamma_2 \gamma_3}$$

die Gleichungen:

$$u^5 - 10u^3 + 45u - \frac{\gamma_3}{\gamma_1^{2\frac{1}{2}}} = 0$$

$$\frac{\gamma_2^3 v^5}{\gamma_1^5} - 40v^2 + 5v - 1 = 0$$

$$\frac{\gamma_2^3}{\gamma_1^5} w^5 - 5\frac{\gamma_3^2}{\gamma_1^5} w^2 - 135\frac{\gamma_3^4}{\gamma_1^{10}} w - \frac{\gamma_3^8}{\gamma_1^{20}} = 0$$

und zwischen u, v, w und χ bestehen die Relationen:

$$\chi = \frac{A + u\sqrt{B}}{3 - u^2};\quad v = \frac{1}{u^2 - 3};\quad w = \frac{v^3}{24v^2 - 4v + 1},$$

wo $$A = -\frac{8f\varphi + 3c\psi}{f^2 + 3c\varphi}\qquad B = \frac{-8\varphi^2 + f\psi}{f^2 + 3c\varphi}.$$

In den letzten §§ meiner Arbeit ist die Gleichung I auf die Jerrard'sche Form zurückgeführt worden, welche von Hermite durch elliptische Functionen gelöst wurde. Diese Jerrard'sche Form ist nicht unmittelbar eine Icosaeder-Resolvente; sondern unter den Gleichungen $\chi^5 + 5f\chi^2 - 5\varphi\chi + \psi = 0$, welche auf dieselbe Icosaederfunction $\frac{y_1}{y_2}$ führen, befinden sich 3 Jerrard'sche. Diese behandle ich zunächst ebenso wie die ursprünglische und führe sie auf die andern Normalformen in u, v, w zurück. Die hierbei gewonnenen Formeln benutze ich dann dazu, um umgekehrt die u, v, w durch die Wurzeln der Jerrard'schen Gleichung auszudrücken. Auf diesem Wege erhalte ich zur Auflösung der Gleichung:

$$\chi_\nu^5 + 5f\chi_\nu^2 - 5\varphi\chi_\nu + \psi = 0$$

folgende Formeln:

1. Zur Zurückführung auf die Jerrard'sche Form

$$h_\nu^5 - 5k'^4 h_\nu - 2k'^4\frac{1 + k^2}{\sqrt{k}} = 0$$

die Formeln:

$$(f\psi - 8\varphi^2)c^2 - (9f^2\varphi - \tfrac{1}{3}\psi^2)c + \frac{(-27f^4 - 8\varphi^3 + 9f\varphi\psi)}{9} = 0$$

$$A = -\frac{8f\varphi + 3c\psi}{f^2 + 3c\varphi}$$

$$B = \frac{-8\varphi^2 + f\psi}{f^2 + 3c\varphi}$$

$$C = \frac{-8\varphi^3 + 9f\varphi\psi + 3c\psi^2}{f^2 + 3c\varphi};$$

$$D = \frac{AB^2 + 3cAB + 30fB}{\varphi}$$

$$\frac{-16(1 + 14k^2 + k^4)^3}{k^2 k'^8} = \frac{(A^2 - 3B)^3}{C}.^{*)}$$

2. Zur Auflösung der Jerrard'schen Form (nach Hermite):

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum\limits_{-\infty}^{\infty} q^{2m^2+m}}{\sum\limits_{-\infty}^{\infty} q^{m^2}} = \varphi(\omega)$$

$$h_\nu = 2\sqrt{5}\,\sqrt[4]{k}\left(\varphi(5\omega) + \varphi\left(\frac{\omega + 16\nu}{5}\right)\right)\left(\varphi\left(\frac{\omega + 16(\nu+1)}{5}\right)\right.$$
$$\left. - \varphi\left(\frac{\omega + 16(\nu+4)}{5}\right)\right)\left(\varphi\left(\frac{\omega + 16(\nu+2)}{5}\right) - \varphi\left(\frac{\omega + 16(\nu+3)}{5}\right)\right)$$

und endlich:

$$\chi_\nu = \begin{cases} -\dfrac{Ak}{4}\cdot\dfrac{1}{1 + 14k^2 + k^4}\left\{2\,\dfrac{1 + k^2}{\sqrt{k}}\,h_\nu + 4\sqrt{k}\,\dfrac{h_\nu^3 + 2kh_\nu}{2h_\nu\sqrt{k} + k^2 + 1}\right\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \dfrac{Dk^2k'^4}{4}. \\ \dfrac{1}{(1 + 14k^2 + k^4)(1 - 34k^2 + k^4)}\left\{3\,\dfrac{\sqrt{k}}{1 + k^2}\,h_\nu - \dfrac{1}{2\sqrt{k}}\cdot\dfrac{h_\nu^3 + 2kh_\nu}{2h_\nu\sqrt{k} + k^2 + 1}\right\} \end{cases}$$

Bei dieser Auflösung der Gleichungen 5. Grades habe ich weder die Existenz der drei Jerrard'schen Formen verwerthet, noch die der beiden Wurzeln der Gleichung für c, noch endlich die Beziehungen, welche sich aus den Jacobi'schen Gleichungen ergeben.

Erlangen. P. Gordan.

---

*) Diese Formel ist algebraisch lösbar.

J. Lüroth. Ueber cyclisch-projectivische Punktgruppen in der Ebene und im Raume. Math. Ann. Bd. XIII.

Die Aufgabe, welche in der obigen Arbeit gelöst ist, besteht in der Aufsuchung einer Gruppe von n reellen Punkten $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ der Ebene oder des Raumes, die so liegen, dass es eine projectivische Umformung der Ebene resp. des Raumes giebt, welche die Punkte der Gruppe cyklisch vertauscht. Es werden zuerst diejenigen Elemente bestimmt, welche bei einer solchen Transformation sich nicht ändern, woran sich dann die Aufsuchung der Punktgruppe schliesst. Es ergeben sich die Resultate: dass bei einer Ebene alle Punkte der Gruppe auf einer Geraden oder auf einem Kegelschnitte liegen müssen, dass sie dagegen im Raume auf einer Geraden, oder auf einer Ebene (und in dieser auf einem Kegelschnitte), oder auf zwei Ebenen (nur bei geradem n) und gleichzeitig auf zwei Kegeln, oder endlich auf einem Hyperboloid mit einer Mantelfläche liegen können.

Karlsruhe. Lüroth.

L. Koenigsberger: Ueber algebraische Beziehungen zwischen den Integralen verschiedener Differentialgleichungen. (Borchardt's Journal für Mathematik. Bd. 84.)

Bekanntlich hat Liouville nachgewiesen, dass, wenn Abel'sche Integrale von der Form

$$\int y dx,$$

worin y eine algebraische Function von x bedeutet, auf algebraische Functionen und niedere Transcendente reducirbar sind, in die Reductionsformel die logarithmischen Functionen nur additiv und mit Constanten multiplicirt eintreten, die Argumente dieser Logarithmen nur algebraische Functionen von x sind, und Exponentialfunctionen in dieser Reduction gar nicht vorkommen können, dass also die allgemeine Beziehung die von Abel der weiteren Transformation zu Grunde gelegte Form annimmt

$$\int y dx = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_n \log v_n,$$

in welcher $u, v_1, v_2, \dots v_n$ algebraische Functionen von x, und $A_1, A_2 \dots A_n$ constante Grössen bedeuten.

Als ich zum Zwecke einer Untersuchung, welche die Reduction hyperelliptischer Integrale auf algebraisch-logarithmische Functionen, elliptische Integrale und hyperelliptische Integrale niederer Ordnung zum Gegenstande hatte, den Satz von Liouville auf diese Klasse von Transcendenten auszudehnen suchte, bemerkte ich, dass derselbe in einem functionentheoretischen Satze viel allgemeinerer Natur seinen Ursprung hat und der Theorie der algebraischen Differentialgleichungen angehört. Ich stelle in der oben bezeichneten Arbeit den Satz auf:
dass, wenn zwischen einem Integrale Z der Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$f\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \cdots \frac{d^mz}{dx^m}\right) = 0$$

und r Integralen

$$Z_1, Z_2, \cdots Z_r$$

des Systems von irreductiblen algebraischen Differentialgleichungen

$$\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^{k_1} + \varphi_1(x, z_1, z_2, \cdots z_r)\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^{k_1-1} + \cdots$$
$$+ \varphi_{k_1-1}(x, z_1, z_2, \cdots z_r)\frac{dz_1}{dx} + \varphi_{k_1}(x, z_1, z_2, \cdots z_r) = 0$$
$$\left(\frac{dz_2}{dx}\right)^{k_2} + \psi_1(x, z_1, z_2, \cdots z_r)\left(\frac{dz_2}{dx}\right)^{k_2-1} + \cdots$$
$$+ \psi_{k_2-1}(x, z_1, z_2, \cdots z_r)\frac{dz_2}{dx} + \psi_{k_2}(x, z_1, z_2, \cdots z_r) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(\frac{dz_r}{dx}\right)^{k_r} + \chi_1(x, z_1, z_2, \cdots z_r)\left(\frac{dz_r}{dx}\right)^{k_r-1} + \cdots$$
$$+ \chi_{k_r-1}(x, z_1, z_2, \cdots z_r)\frac{dz_r}{dx} + \chi_{k_r}(x, z_1, z_2, \cdots z_r) = 0$$

ein algebraischer Zusammenhang

$$(1) \cdots F(x, Z, Z_1, Z_2, \cdots Z_r) = 0$$

besteht, und man setzt — unter der Voraussetzung, dass keine der Grössen $Z, Z_1, Z_2, \cdots Z_r$ selbst algebraisch ist, oder zwischen einigen von ihnen eine algebraische Beziehung existirt — statt der Grössen $Z_1, Z_2, \cdots Z_r$ andere Integrale des Systems von Differentialgleichungen, so wird die algebraische Beziehung (1) noch fortbestehen, wenn

für Z ein bestimmtes anderes Integral jener Differentialgleichung m^{ter} Ordnung gesetzt wird.

Ich knüpfe daran die Auseinandersetzung einer Methode zur Untersuchung eines algebraischen Zusammenhanges zwischen Integralen von Differentialgleichungen, stelle Betrachtungen über die allgemeine Transformationsgleichung zwischen Abel'schen Integralen und über das Vorkommen der Abel'schen Umkehrungsfunctionen in derselben an und hebe die Verwendung des obigen Satzes auch für andere Untersuchungen hervor.

Wien. L. Koenigsberger.

L. Koenigsberger: Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale auf elliptische. (Borchardt's Journal für Mathematik.)

Eine in den „Annales de la société scientifique de Bruxelles" (1. année 1876) erschienene Arbeit von Hermite, die sich mit dem bekannten von Jacobi reducirten hyperelliptischen Integrale erster Ordnung beschäftigt, und in der angeführt wird, dass die beiden hyperelliptischen Integrale

$$\int^{z}\frac{dz}{\sqrt{(z^2-a)(8z^3-6az-b)}} \text{ und } \int^{z}\frac{z\,dz}{\sqrt{(z^2-a)(8z^3-6az-b)}}$$

sich durch die beiden verschiedenen Substitutionen

$$x=\frac{4z^3-3az}{a} \text{ und } x=\frac{2z^3+b}{3(z^2-a)}$$

auf die beiden verschiedenen elliptischen Integrale

$$\frac{1}{3}\int^{x}\frac{dx}{\sqrt{(2ax-b)(x^2-a)}} \text{ und } \frac{1}{2\sqrt{3}}\int^{x}\frac{dx}{\sqrt{x^3-3ax-b}}$$

reduciren lassen, war für mich die Veranlassung, das Problem der Reduction der hyperelliptischen Integrale auf elliptische genauer zu untersuchen und einige darauf bezügliche Resultate zu veröffentlichen.

Auf Grund von allgemeinen Sätzen, die ich in einer früheren Arbeit „über die allgemeinsten Beziehungen zwischen hyperelliptischen Integralen" (Borchardt's Journal für Mathematik Bd. 81) aufgestellt habe, konnte ich schliessen, dass, wenn zwischen einem hyperelliptischen Integrale

$$\int^{z} f(z, \sqrt{R(z)})\, dz,$$

in welchem $R(z)$ ein Polynom $2p+1^{\text{ten}}$ Grades bedeutet, hyperelliptischen Integralen niederer Ordnung, elliptischen Integralen und algebraisch-logarithmischen Functionen eine Beziehung besteht, für

welche die Graenzen der Integrale und die Argumente der algebraisch-logarithmischen Functionen algebraischen Relationen unterworfen sind, jedenfalls ein zur Irrationalität $\sqrt{R(z)}$ gehöriges hyperelliptisches Integral erster Gattung auf ein Integral erster Gattung, welches den in der Relation vorkommenden elliptischen Integralen zugehörig ist, reducirbar sein muss, und dass, wenn die zu einem der elliptischen Integrale gehörige Irrationalität mit

$$\sqrt{\varphi(x)} = \sqrt{x(1-x)(1-c^2x)}$$

bezeichnet wird,

$$\int^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = \int^z \frac{(\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \cdots + \pi x^{p-1})\, dz}{\sqrt{R(z)}}$$

sein wird, worin x und $\sqrt{\varphi(x)}$ rational durch z und $\sqrt{R(z)}$ ausdrückbar sind. Es lässt sich sodann leicht nachweisen, dass man das Problem zurückführen kann auf die Aufsuchung derjenigen hyperelliptischen Integrale, welche auf elliptische Integrale derart reducirbar sind, dass die Variable des letzteren eine rationale Function derjenigen des hyperelliptischen Integrales ist, und man wird nunmehr zur weiteren Durchführung der Untersuchung zwei wesentlich verschiedene Wege einschlagen können. Will man die Typen für die Polynome $R(z)$ finden, deren zugehörige Integrale auf elliptische Integrale reducirbar sind, so wird man die Betrachtung auf die zu diesen Integralen gehörigen ϑ-functionen ausdehnen können und die Relationen für die Moduln dieser ϑ-functionen aufsuchen, wenn die zugehörigen Integrale auf elliptische reducirbar oder die resp. ϑ-functionen in ϑ-functionen niederer Ordnung und elliptische ϑ-functionen zerlegbar sein sollen; in diesem Sinne habe ich mir in einer früheren Arbeit „über die Transformation zweiten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung“ die Frage vorgelegt, welche hyperelliptischen Integrale erster Ordnung durch eine Transformation zweiten Grades auf elliptische Integrale zurückführbar sind und mit Hülfe der sich als nothwendig ergebenden Gleichung

$$\vartheta\,(0,\,0,\,\tau_{11}',\,0,\,\tau_{22}')_{14} = 0$$

auf Grund allgemeiner Sätze, welche ich für die Transformation zweiten Grades der hyperelliptischen Functionen entwickelt hatte, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen zwischen den Lösungen des Polynoms fünften Grades aufgestellt, für welches die dazugehörigen hyperelliptischen Integrale auf elliptische reducirbar sind. Ich habe jedoch in der Arbeit, über die ich eben referire,

einen andern Weg eingeschlagen und zwar den der algebraischen Transformation, in der Weise, wie Jacobi die Reduction eines elliptischen Integrales auf ein anderes behandelt oder die Transformation der elliptischen Integrale durchführt. Ich stelle zuerst die Bedingungen für den Grad der Transformation auf, zeige, wie der bekannte Jacobi'sche Fall und die von Hermite gefundenen Integrale sich als einfachste Fälle ergeben, und wie man für jede Ordnung von hyperelliptischen Integralen beliebig viele auf elliptische Integrale reducirbare finden kann.

Die von Hermite angeregte Frage, ob für die algebraische Irrationalität, deren charakteristische Zahl gewöhnlich mit p bezeichnet wird, stets auf elliptische Integrale reducirbare Integrale existiren, für welche die p Integrale erster Gattung durch ebensoviel verschiedene elliptische Integrale mit Hülfe von p Substitutionen ausdrückbar sind, wird sich, wie ich glaube, nur mit Hülfe der Theorie der ϑ-functionen beantworten lassen.

Wien. L. Koenigsberger.

(Zu Seite 87, Z. 14 v. o. ist einzuschalten:)

Nachschrift. Von Seiten ihres Verfassers Herrn Charles S. Peirce sind mir inzwischen die Separatabzüge zweier Abhandlungen zugestellt und dadurch bekannt geworden, betitelt:

Three papers on logic, Proceedings of the American academy of arts and sciences, 1867, p. 250—298, und

Description of a notation for the logic of relatives, resulting from an amplification of the conceptions of Boole's calculus of logic, Memoirs of the American academy, Vol. IX, 1870, 62 Seiten,

welche ich mich zu dem in vorgenannter Schrift von mir gegebenen Literaturverzeichniss hiemit nachzutragen beeile.

Aus der ersteren von diesen beiden Abhandlungen (I. Paper: „On an improvement in Boole's calculus of logic") ersehe ich, dass bezüglich einiger wesentlichen Punkte in meiner ersteren Schrift, nämlich in Hinsicht auf die Wahrnehmung der vorstehend angeführten doppelten Distributivität sowohl, als auch bezüglich der für logische Differenzen und Quotienten auf S. 29—31 von mir aufgestellten Ausdrücke, die Priorität Herrn Peirce zukommt.

E. Schröder.

Richard Rühlmann: Handbuch der mechanischen Wärmetheorie. Bd. 1 mit theilweiser Benutzung von E. Verdet's Théorie mécanique de la Chaleur. (800 S. mit in den Text eingedruckten Holzstichen. Braunschweig, Vieweg & Sohn 1876.)

Bei Bearbeitung dieses Buches ist der Verfasser von der Annahme ausgegangen, dass es dem Fortschritte der Wissenschaft nützlich und den Fachgenossen willkommen sein müsse, wenn ein Werk entstünde, welches mit thunlichster Vollständigkeit alle wichtigen Arbeiten auf dem Gebiete der mechanischen Wärmetheorie zusammenfasst, systematisch anordnet und organisch verknüpft. Von diesem Gesichtspunkte aus wurde anfänglich eine deutsche Bearbeitung und Ergänzung des oben genannten trefflichen Werkes von Verdet in Aussicht genommen. Schon bei Bearbeitung der ersten Lieferung des ersten Bandes stellte sich jedoch heraus, dass seit dem Erscheinen des klassischen Werkes des französischen Physikers so viele und so bedeutungsvolle Abhandlungen erschienen waren, dass es ungemein schwer fiel, deren wesentlichen Inhalt in den alten Rahmen der ursprünglichen Disposition dieses Buches unterzubringen. Ermuntert durch hervorragende Fachgenossen emancipirte sich der Verfasser daher mehr nnd mehr von der Verdet'schen Arbeit und hat sich in den neueren Lieferungen ganz auf eigene Füsse gestellt.

Nach gewissen Richtungen hin unterscheidet sich diese Arbeit wesentlich von allen anderen ähnlichen Werken, welche über Theile der mech. Wth. in neuerer Zeit erschienen sind. Es ist nämlich hier versucht worden, sowohl den mathematisch-mechanischen Theil dieser Wissenschaft, als auch die experimentelle Bestimmung der in derselben zur Verwendung kommenden Zahlwerthe, soweit, als dies zur Beurtheilung von deren Zuverlässigkeit nöthig ist, als auch die zahlreichen Bestätigungen theoretischer Resultate durch die Beobachtungen zusammenzufassen, um auf diese Weise ein möglichst klares Bild davon zu geben, welchen Grad von Zutrauen die einzelnen Theile der mech. Wth. und ihre Resultate zur Zeit verdienen, und an welchen Stellen noch offengebliebene Lücken der Ergänzung durch weitere theoretische oder experimentelle Untersuchungen harren.

Der eigentlich theoretische Theil der mech. Wth. im engeren Sinne hat im ersten Bande des Buches seine Erledigung gefunden. Nach Wiedergabe von zwei meisterhaften Vorlesungen Verdet's über mech. Wth. und Ergänzung derselben durch einige neue Anmerkungen, werden zuerst (S. 145—183) die mechanischen und rein physikalischen Vorbegriffe (Temperatur, Wärmemenge, thermische Fläche, thermische Constanten: c_p, c_v, h, l etc.) behandelt. Der zweite Abschnitt (S. 184—232) beschäftigt sich vorzugsweise mit dem ersten Hauptsatze und der experimentellen Bestimmung des mechanischen Aequivalentes der Wärme, für welches, zu Ehren Joule's, der Verf. den Buchstaben J vorschlägt. Als wahrscheinlichster Werth für J resultirt 425 Kgm.; Joule hat (nach einer briefliche Mittheilung an den Verfasser) als Ergebniss neuer, noch nicht publicirter, mit höchster Sorgfalt angestellter Versuche 423,7 Kgm. erhalten. Der dritte Hauptabschnitt (S. 234—358) behandelt zunächst Joule's und Hirn's Versuche über die äussere Arbeitsleistung und innere Arbeit bei vollkommenen Gasen; hierauf werden ziemlich ausführlich die Joule-Thomson'schen Untersuchungen über die innere Arbeit bei Ausdehnung von Luft, Kohlensäure und Wasserstoff besprochen. Daran schliesst sich eine Discussion der Versuche zur Ermittelung des Quotienten $\frac{c_p}{c_v}$. Die Ausflusserscheinungen der Gase sind wesentlich nach Zeuner's neueren Untersuchungen dargestellt. Als Einleitung zur Theorie der Kreisprocesse werden die Definitionen der thermischen Curven gegeben; als Beispiele zu diesem Kapitel sind nach dem Vorgange Rankine's die Kreisprocesse einiger Heissluftmaschinen mitgetheilt. — Der IV. Abschnitt (S. 358—465) handelt vom 2. Hauptsatze, reproducirt den älteren Clausius'schen Beweis, erörtert und widerlegt die verschiedenen Einwürfe, die gegen denselben erhoben worden sind und giebt hierauf die Erweiterung desselben, sowie die verschiedenen geometrischen Darstellungen der äusseren Arbeit, Gesammtenergie und inneren Energie bei einer beliebigen Zustandsänderung, sowie die wesentlichsten Eigenschaften der thermischen Curven. Den Schluss bilden die verschiedenen Versuche von Szily, Clausius und Boltzmann den zweiten Hauptsatz aus allgemeinen mechanischen Principien herzuleiten, sowie eine Kritik derselben. Im V. Abschn. (S. 466—734) werden als Anwendungen des zweiten Hauptsatzes, nach Ableitung der Formeln für Volumenänderungen, die Wärmeentwickelungen bei Compressionen von Flüssigkeiten und festen Körpern, sowie die hieraus sich ergeben-

den Berechnungen der specifischen Wärme bei constantem Volumen erörtert. Besondere Aufmerksamkeit ist hierbei den Fällen gewidmet, in welchen der Ausdehnungscoefficient negativ ist. Die Anwendung der allgemeinen Formeln auf die Gase führt auf neue Zustandsgleichungen für diese Substanzen und zur Bestimmung der Abweichungen zwischen den Angaben eines Luft- und Kohlensäurethermometers von der absoluten Temperatur. Das zweite Kapitel dieses Abschnittes beschäftigt sich mit den Vorgängen der Verdampfung und Schmelzung, sowie mit der Bestimmung der thermischen Constanten der wichtigsten Dämpfe. Die Darstellung des Ausströmens der Dämpfe schliesst sich wiederum genau an Zeuner's neueste Untersuchungen an. Auch die Abhängigkeit des Schmelzpunktes vom Drucke und die hierin liegende treffliche Bestätigung der theoretischen Resultate ist ausführlich besprochen. Am Schlusse dieses Kapitels ist auch eine neue Erklärung der Erscheinungen der Regelation gegeben. Nach einer Untersuchung der thermischen Curven bei Dampf- und Flüssigkeitsgemischen sind die bis jetzt bekannten Resultate über überhitzte Dämpfe zusammengestellt. Den Schluss dieses Abschnittes bildet eine kurze Betrachtung über die physikalischen Vorgänge in der Dampfmaschine. Der sechste Abschnitt (S. 735—800), der letzte des ersten Bandes, beschäftigt sich mit der von Kirchhoff gegebenen Methode, die beiden Hauptsätze anzuwenden, welche im Wesentlichen auf dem Gedanken beruht, dass die Aenderung der inneren Energie eines Körpers nur vom Anfangs- und Endzustande, nicht aber von den Zwischenzuständen, die durchlaufen worden sind, abhängig sei. Eine Anwendung der Formeln auf die Auflösung von Gasen in Flüssigkeiten führt zu dem Resultate, dass bei Mischung sehr löslicher Gase mit Wasserdampf und bei Compression solcher Gemische Vorgänge eintreten müssen, welche den bei Bildung Chemischer Verbindungen stattfindenden sehr ähnlich sind, ein Ergebniss, das auch durch die Erklärung der Erscheinungen der Bildung und Dissociation chemischer Verbindungen aus der kinetischen Gastheorie äusserst wahrscheinlich gemacht wird. Bei ihrer Anwendung auf die Vorgänge bei Bildung von Salzlösungen und Mischung von Flüssigkeiten werden die Kirchhoff'schen Formeln wenigstens angenähert bestätigt.

Chemnitz. Richard Rühlmann.

Richard Rühlmann: Handbuch der mechanischen Wärmetheorie. Bd. 2. Lief. 1. 320 S. mit in den Text eingedruckten Holzstichen. Braunschweig, Vieweg & Sohn 1878.

Diese Lieferung enthält die kinetische Gastheorie und die Einleitung in die Thermochemie. Nach einigen allgemeinen Vorbemerkungen über die Beziehungen der Molecularhypothese zur mech. Wth. werden die von Clausius gegebenen Begriffe: Disgregation und Entropie erläutert und die mathematische und physikalische Bedeutung der wahren Wärmecapacität festgestellt. Hierauf folgt eine Geschichte der Moleculartheorie, insbesondere der Gase. Daran schliesst sich die Darstellung der Clausius'schen Gastheorie, welche wesentlich von der Annahme ausgeht, dass es in einer ersten Annäherung gestattet sei, die Geschwindigkeiten der Gasmolecüle als gleich gross anzusehen. Auch die Ableitung der neueren Clausius'schen Formel für die mittlere Weglänge, welche auf den von den Molecülen selbst ausgefüllten Raum und darauf Rücksicht nimmt, dass fortwährend eine Anzahl Molecüle nicht gegen andere Molecüle, sondern gegen die festen Winde des einschliessenden Gefässes stossen, ist mit aufgenommen worden.

Von den beiden Gastheorien Maxwell's ist nur die ältere wiedergegeben, da die neuere, welche eine abstossende Kraft umgekehrt proportional der fünften Potenz des Abstandes zwischen den Molecülen annimmt, ohne grössere Uebereinstimmung mit den Erfahrungsthatsachen zu ergeben, wesentlich complicirter ist. Auch scheint die Thatsache, dass es möglich ist, alle Gase zu condensiren, sowie mehrere andere Gründe gegen die Berechtigung einer derartigen Annahme zu sprechen.

Nach Ableitung der Theorie der inneren Reibung aus dem Maxwell'schen Vertheilungsgesetze der Geschwindigkeiten werden die O. E. Meyer'schen Pendelversuche zur Bestimmung der Coefficienten der inneren Reibung der Gase, die Versuche desselben Physikers, sowie die von Maxwell, von Kundt und Warburg und von Puluj mit schwingenden Scheiben zur Bestimmung dieser Constanten mitgetheilt und ihr Genauigkeitsgrad discutirt. Hieran schliessen sich die Bestimmungen dieser Constanten durch Transspirationsversuche von Graham, O. E. Meyer, Puluj, Obermayer und Holman und die Untersuchungen dieser letztgenannten Physiker über die Abhängigkeit dieser Coefficienten von der Temperatur. Es zeigt sich, dass die einfachen Grundlagen der Maxwell'schen Gastheorie nicht ausreichend sind, um die Abhängigkeit der Reibungs-

coefficienten, sowie auch der Wärmeleitungscoefficienten von der Temperatur ohne Hinzunahme neuer Hypothesen über die Beschaffenheit der Molecüle zu erklären. Das einfache Maxwell'sche Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten führt für den bei der absoluten Temperatur T gültigen Reibungscoefficienten η_T auf die Formel:

$$\eta_T = \eta_{T_0}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{2}},$$

während die Erfahrung:

$$\eta_T = \eta_{T_0}\left(\frac{T}{T_0}\right)^x$$

ergiebt, wobei x für verschiedene Gase verschieden ist und zwischen den Grenzen 0,70 (für Wasserstoff) und 0,98 (für Aethylchlorid) liegt.

Die kinetische Theorie der Diffussion ergiebt eine nahezu vollkommene Uebereinstimmung der theoretischen Resultate mit den Experimentaluntersuchungen von Loschmidt.

Bei Behandlung der Wärmeleitung der Gase werden zunächst die älteren Versuche von Magnus und hierauf die neueren Arbeiten von Narr, die epochemachenden Untersuchungen von Stefan auf diesem Gebiete, sowie die Versuche von Plank, von Kundt und Warburg und von Winkelmann mitgetheilt. Auch die Ergebnisse von Winkelmanns Messungen der Abhängigkeit der Wärmeleitungscoefficienten von der Temperatur werden berichtet. Die Theorie der Wärmeleitung ist nach Clausius gegeben, da diese Ableitung die leichtestverständlichste ist und ihre Resultate denselben Grad von Uebereinstimmung mit der Erfahrung zeigen, wie die Entwickelungen von Maxwell und O. E. Meyer. Die Arbeiten des letzteren erschienen auch erst, als die betreffenden Bogen des Buches bereits im Drucke beendet waren.

Im nächsten Capitel ist gezeigt, dass die kinetische Gastheorie auch geeignet ist, über die Fortpflanzung des Schalles Aufschluss zu geben. Die neueren Arbeiten von Roiti und Brussoti konnten leider nicht mehr berücksichtigt werden. Im letzten Capitel der Moleculartheorie sind mit Hilfe der bekannten Formel:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\delta^3}{\pi \cdot \varrho^2}$$

die Summen der Molecularquerschnitte für verschiedene Gase berechnet worden. In diesem Ausdrucke bezeichnet λ die mittlere Länge des Weges eines Molecüles, δ den mittleren Abstand zweier Molecüle, ϱ den Radius der Wirkungssphäre. Es ergiebt sich diese

Summe der Molecularquerschnitte, da $N \cdot \delta^3 = 1$, wenn N die Anzahl der Molecule in der Volumeneinheit ist:

$$\frac{N \cdot \varrho^2 \cdot \pi}{4} = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{2} \cdot \lambda}.$$

Das Resultat dieser Rechnung ist vielleicht nicht ohne einiges allgemeinere Interesse. Der Vergleich der gefundenen Zahlen zeigt nämlich gewisse, auffällige Beziehungen. Da aber nach dem Avogadro'schen Gesetze gleiche Volumina verschiedener Gase unter gleichen Druck und Temperaturverhältnissen gleichviel Molecüle enthalten, so sind die Verhältnisse der Querschnittssummen ohne Weiteres Verhältnisse der Querschnitte der Molecüle selbst. Mit Rücksicht hierauf wird man (da die durchschnittliche Genauigkeit der gefundenen Zahlen ungefähr 8 Procent beträgt) die für zweiatomige Molecüle, mit Ausnahme des Chlors, Wasserstoffs und Chlorwasserstoffs, gefundenen Zahlen als unter sich gleich und den Querschnitt des Wasserstoffmolecüles für halb und den des Chlors für doppelt so gross anzusehen berechtigt sein. Die dreiatomigen Molecüle der Kohlensäure, des Stickoxyduls, des Wasserdampfes und des Schwefelwasserstoffes besitzen wiederum gleiche Molecularquerschnitte und zwar verhalten sich dieselben zu denjenigen der Mehrzahl der zweiatomigen Gase wie 3 : 2, wie die Anzahl der Atome. Eine Ausnahme macht die schweflige Säure, deren Molecularquerschnitt gleich dem des Chlors ist. Eine besondere Stellung nehmen Ammoniak und Chlorwasserstoff ein, ihnen schliesst sich vielleicht auch Sumpfgas an, denn das Mittel dieser drei Zahlen verhält sich zum Molecularquerschnitt der zweiatomigen Molecüle ungefähr wie 4 : 3.

Ebenso ist man versucht, die Molecularquerschnitte des Aethylens, der schwefligen Säure, des Chlors und des Chlormethyls wiederum als gleich anzunehmen und für das Doppelte von denen der zweiatomigen Molecüle anzusehen.

Nachstehende Tabelle enthält für einige Gase die Querschnittssumme der Molecüle in Quadratcentimetern, bezogen auf die im Cubikcentimeter enthaltenen Gasmolecüle.

	Gas	Formel	Wert				
	Wasserstoff	H_2	9100	angenähert	gleich	9000	$= 1 \times 9000$
zweiatomig	Sauerstoff	O_2	16900	„	„	18000	$= 2 \times 9000$
	Stickstoff	N_2	18000	„	„	18000	
	Kohlenoxyd	CO	18200	„	„	18000	
	Stickoxyd	NO	18700	„	„	18000	

drei-atomig	Kohlensäure	CO_2	26700	angenähert gleich	27000	=3×9000
	Stickoxydul	N_2O	26800	„ „	27000	
	Wasserdampf	H_2O	26400	„ „	27000	
	Schwefelwasserstoff	H_2S	28600	„ „	27000	
	Sumpfgas(?)	CH_4	21600	„ „	24000	$=\frac{8}{3}\times 9000$
	Ammoniak	H_3N	23400	„ „	24000	
	Chlorwasserstoff	HCl	24300	„ „	24000	
	Aethylen (?)	C_2H_4	31600	„ „	36000	=4×9000
	schweflige Säure	SO_2	36700	„ „	36000	
	Chlor	Cl_2	36700	„ „	36000	
	Chlormethyl	CH_3Cl	39300	„ „	36000	

O. E. Meyer ist bekanntlich in seiner kinetischen Gastheorie bezüglich dieser Zahlen zu anderen Resultaten gelangt; er glaubt in denselben eine Bestätigung der Kekulé'schen Anschauung, nach welcher die Molecüle chemischer Verbindungen durch eine kettenartige Verknüpfung der Atome gebildet werden, erkennen zu sollen.

Den Bestimmungen der Verhältnisse der Volumina und Durchmesser der Molecüle aus den Summen der Molecularquerschnitte legen wir nur geringe Bedeutung bei, da deren theoretische Grundlagen ziemlich anfechtbar sein dürften.

Mit Hilfe der vollständigeren Formeln für die mittlere Weglänge der Molecüle, welche von Clausius, van der Waals und O. E. Meyer gegeben worden sind, gelingt es aus den von Regnault beobachteten Abweichungen der Gase vom Boyle-Mariotte'schen Gesetze und den Versuchen von Andrews und Cailletet über die kritischen Temperaturen, angenähert die absoluten Werthe der Durchmesser der Molecüle einiger Gase zu berechnen. Es findet sich:

der Durchmesser ρ eines Stickstoffmolecüles $= 34.10^{-9}$ cm.
„ „ ρ „ Kohlensäure „ $= 16.10^{-9}$ cm.
„ „ ρ „ Wasserstoff „ $= 41.10^{-9}$ cm.

Benutzt man diese Werthe für ρ, so kann man mit deren Hilfe aus den früher berechneten Querschnittssummen der Molecüle deren Anzahl bestimmen und zwar findet man, dass bei 0^0 und 760mm Druck ungefähr 100 Trillionen Gasmolecüle in einem Cubikcentimeter enthalten sind. Man findet ferner, dass unter diesen Umständen die Molecule selbst ungefähr den dreitausendsten Theil des

vom Gase erfüllten Raumes einnehmen. Clausius hatte (i. J. 1857), in einer Zeit, in welcher man die zu dieser Bestimmung nöthigen experimentellen Daten noch nicht kannte, mit genialem Vorausblick diesen Quotienten auf $\frac{1}{1000}$ geschätzt. Das absolute Gewicht eines Wasserstoffmolecüles ergiebt sich zu 15.10^{-23} g. und das specifische Gewicht desselben gleich 360.

Die Thermochemie, welcher der zweite Abschnitt dieses Bandes gewidmet ist, beginnt mit der Bestimmung der Atomgewichte, der Ableitung des Avogadro'schen Gesetzes aus der kinetischen Gastheorie und den bekannten Beziehungen zwischen Atomgewicht und specifischer Wärme. Es wird an der Hand der von Boltzmann gegebenen Gleichungen gezeigt, dass die wahre Wärmecapacität gleich dem Producte aus einer Constanten mit der Anzahl der in der Gewichtseinheit enthaltenen Atome ist. Daraus folgt, dass das Product aus wahrer specifischer Wärme und Atomgewicht eine Constante sein muss. Ferner hat Boltzmann nachgewiesen, dass bei festen Körpern, welche den normalen Elasticitätsgesetzen folgen, die wahre Wärmecapacität nahezu die Hälfte der durch Beobachtung gefundenen specifischen Wärme ist und damit ist das Dulong-Petit'sche, respective Neumann'sche Gesetz über specifische Wärme aus mechanischen Principien hergeleitet. Die selbstverständlich nur als erste rohe Annäherung gültige Behauptung, dass die wahre Wärmecapacität gleich der Hälfte der specifischen Wärme fester Körper sei, findet übrigens bei einigen Substanzen eine überraschende Bestätigung. Berechnet man nämlich nach den bekannten von Kopp und Lothar Meyer entwickelten Principien die specifische Wärme der starren Körper und vergleicht diese mit der specifischen Wärme der Gase bei constantem Volumen, welch' letztere bei vollkommenen Gasen mit der wahren Wärmecapacität identisch ist, so findet man zum Beispiel

	specifische Wärme	
	starr	gasförmig
Stickstoff	0,36	0,173
Chlor	0,18	0,093
Brom	0,084	0,042
Quecksilber . . .	0,032	0,015

Allerdings wollen wir nicht verschweigen, dass Sauerstoff und Wasserstoff zur Zeit noch als Ausnahmen erscheinen. Es ist:

	specifische Wärme		
	starr	gasförmig	Verhältniss
Wasserstoff	2,3	2,41	1 : 1
Sauerstoff	0,25	0,156	5 : 3

Mit Rücksicht auf den Clausius'schen Satz: „Die innere kinetische Energie eines Körpers ist lediglich eine Function der Temperatur und unabhängig von der Anordnung der Molecüle und der Anordnung der Atome in den Molecülen (Boltzmann)", ergiebt sich aus dem rationell begründeten Dulong-Petit'schen Gesetz als einfache Consequenz der bekannte Erfahrungssatz: Dem Moleculargewichte jeder Verbindung entspricht im festen Aggregatzustande eine specifische Wärme, welche angenähert gleich der Summe der specifischen Wärmen der im Molecüle enthaltenen Atome ist. Sämmtliche Erfahrungsthatsachen über gesetzmässige Beziehungen zwischen specifischen Wärmen und Atomgewichten finden also durch die mechanische Wärmetheorie, ausgehend vom Maxwell'schen Gesetze der Vertheilung der Geschwindigkeiten, ihre rationelle Begründung.

Den Schluss dieser Lieferung bildet eine Sammlung der wichtigsten Zahlwerthe über Verbindungswärmen, welche am Anfange der nächsten Lieferung noch vervollständigt werden wird.

Chemnitz. Richard Rühlmann.

S. Gundelfinger: Ueber die Transformation von Differentialausdrücken vermittelst elliptischer Coordinaten. (Borchardt's Journal, Bd. 85, S. 80 ff.)

Hesse hat in der 22. Vorlesung seiner analytischen Geometrie des Raumes ein Uebertragungsprincip angegeben, welches gewisse Differentialausdrücke der rechtwinkeligen Coordinaten in solche der elliptischen Coordinaten transformiren lehrt, indem man an den beim Hauptaxenproblem der Flächen zweiter Ordnung auftretenden Formeln passende Veränderungen vornimmt. Die Integration der Differentialgleichungen für die Krümmungscurven und die geodätischen Linien auf den letzterwähnten Flächen wird hierdurch fast ohne alle Rechnung geleistet. In der vorliegenden Arbeit ist gezeigt, dass die Integration dieser und verwandter Differentialgleichungen vermittelst eines ähnlichen Uebertragungsprincips sich auch knüpfen lässt an

das Hauptaxenproblem der ebenen Schnitte einer Oberfläche zweiter Ordnung:

$$(1)\qquad \begin{aligned} f(x,y,z) &\equiv a_{00}x^2 + 2a_{01}xy + \cdots + a_{22}z^2 \\ &\quad + 2a_{03}x + 2a_{13}y + 2a_{23}z + a_{33} \\ &\equiv \varphi(x,y,z) + 2a_{03}x + 2a_{13}y + 2a_{23}z + a_{33}. \end{aligned}$$

Es seien, um hierauf näher einzugehen, a, b, c die Cosinus der Winkel, welche die Normale der Fläche im Punkte x, y, z gegen die Coordinatenaxen bildet, sowie a', b', c' und a'', b'', c'' die Cosinus der Tangenten an die beiden durch diesen Punkt gehenden Krümmungslinien von (1). Diese drei Systeme von Cosinus lassen sich offenbar betrachten als die Coefficienten einer linearen homogenen, orthogonalen Substitution:

$$(2)\qquad \xi = aX + a'Y + a''Z \quad \eta = bX + b'Y + b''Z$$
$$\zeta = cX + c'Y + c''Z,$$

welche für beliebige, von den x, y, z unabhängige Werthe der ξ, η, ζ die Function $\varphi(\xi,\eta,\zeta)$ überführt in:

$$(2\text{a})\quad \varphi(\xi,\eta,\zeta) = \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2 + \mu X^2 - 2\mu' XY - 2\mu'' XZ.$$

Ueber eine derartige Substitution sind ausführliche Untersuchungen in der 28. Vorlesung von Hesse's Raumgeometrie mitgetheilt.* Insbesondere bedeuten nach denselben λ_1 und λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$D(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{00}-\lambda & a_{01} & a_{02} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ a_{10} & a_{11}-\lambda & a_{12} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22}-\lambda & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

während μ' und μ'' mit Anwendung des Zeichens

$$\varDelta(\lambda) \text{ für } \begin{vmatrix} a_{00}-\lambda & a_{01} & a_{02} \\ a_{11} & a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}$$

durch die Formeln gegeben sind:

$$\mu' = \sqrt{\varDelta(\lambda_1) : (\lambda_1 - \lambda_2)} \qquad \mu'' = \sqrt{\varDelta(\lambda_2) : (\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

Führt man ausserdem das Symbol ν durch die Gleichung ein:

$$\nu = \sqrt{-\Sigma \pm (a_{00}a_{11}a_{22}a_{33}) : (\lambda_1\lambda_2)},$$

so kann man das neue Uebertragungsprincip folgendermassen aussprechen:

Man denke sich aus den drei Gleichungen

$$D(\lambda_1) = 0 \quad D(\lambda_2) = 0 \quad f(x, y, z) = 0$$

die Coordinaten eines veränderlichen Punktes x, y, z auf der Fläche (1) als Functionen von λ_1 und λ_2 dargestellt. Alsdann ist es erlaubt, in der durch (2) und (2a) näher definirten orthogonalen Substitution, sowie in allen aus ihr folgenden Gleichungen an Stelle der Grössen:

$$\xi, \eta, \zeta; \quad X, Y, Z$$

beziehungsweise zu setzen:

$$dx, dy, dz; \quad 0, \quad d\lambda_1 \cdot (2\lambda_1 \mu' \nu)^{-1}, \quad d\lambda_2 \cdot (2\lambda_2 \mu'' \nu)^{-1}.$$

Wenn $\Sigma \pm (a_{00} a_{11} a_{22} a_{33})$, also auch eine Wurzel der quadratischen Gleichung $D(\lambda) = 0$ — etwa λ_2 — verschwindet, so ist in dieser Fassung des Uebertragungsprincips an Stelle von $(2\lambda_2 \mu'' \nu)^{-1} d\lambda_2$ zu substituiren: $\nu (2\lambda_1 \mu')^{-1} dB$,

$$4B = \varphi\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right](a_{00} + a_{11} + a_{22})$$

angenommen. Die Beweise, sowie mehrere Anwendungen sind in der Abhandlung ausführlich mitgetheilt.

Tübingen. S. Gundelfinger.

S. Günther: Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie. Halle, Nebert.

1. Heft. Die Lehre von der Erdrundung und Erdbewegung im Mittelalter bei den Occidentalen 1877.
2. Heft. Die Lehre von der Erdrundung und Erdbewegung im Mittelalter bei den Arabern und Hebräern 1877.
3. Heft. Aeltere und neuere Hypothesen über die chronische Versetzung des Erdschwerpunktes durch Wassermassen 1878.

Die beiden ersten Hefte bilden ein geschlossenes Ganze, welches sich möglichst an die analogen Untersuchungen von Ukert und Schiaparelli anzuschliessen bestimmt ist. Es wird demzufolge zuerst des trüben Zustandes des geographischen Wissens in der patristischen Periode gedacht, alsdann die Reform des Virgilius von Salzburg und Adam von Bremen geschildert und der endliche Durch-

bruch richtiger Anschauungen in seinen verschiedenen literarischen Aeusserungen (Omons, Sacrobosco) wie auch in den Erzeugnissen damaliger Kartographie verfolgt. Einzelne Spuren der Kenntniss von der Bewegung der Erde finden sich allerdings bereits bei den Scholastikern, wogegen Dante, dessen Kosmographie hier eingehend besprochen wird, sich noch durchaus conservativ verhält, obwohl er die Lehre des Philolaus kennt. Eine wirkliche Axendrehung der Erde lehrte Nicolaus Cusanus, dessen freisinnig kosmologischer Standpunkt hier zum ersten Male seinem wahren Werthe nach gewürdigt wird. Regiomontan und Domenica Maria können blos indirect unter den Vorläufern des Copernicus genannt werden, ebenso Fracastor, dessen Theorie homocentrischer Sphären auf Eudoxus zurücklenkt. Hingegen ist Lionardo da Vinci selbstständig auf die Bewegung der Erde gekommen, die er in mathematisch interessanter Weise behandelt. Als unmittetbare Vorcopernicaner erscheinen Widmannstadt und Celio Calcagnini. — Der zweite Abschnitt beginnt mit einer ausführlichen Besprechung der ersten arabischen Gradmessungen, beschäftigt sich weiter mit den Schriften jener Mathematiker, welche die Kugelgestalt der Erde wissenschaftlich behandelten, erörtert die graphischen Erddarstellungen jener Periode und zieht auch die besonders aus dem Compendium des Kazwîni zu entnehmenden unwissenschaftlichen Hypothesen orientalischer Schriftsteller bei. Die Drehung der Erde lehrte Ibn el Wardi, und Katibi setzt die für und gegen eine solche sprechenden Gründe ausführlich auseinander, ohne sich jedoch zu ihren Gunsten zu entscheiden. Hierauf wird ein Ueberblick über die entsprechenden Neuerungen auf theoretisch-astronomischem Gebiete gegeben; die sogenannte Trepidationstheorie, die Sphärenlehre des Alpetragius und die weniger energischen Angriffe des Arzachel und Geber gegen Ptolemaeus finden hier ihre Stelle. Den Schluss des Abschnittes bilden der bisher fast gar nicht bekannt gewordene Ibn Badja, der Excenter und Epicyklen verwarf, und König Alfons XII, in dessen „Libros del saber“ dem Planeten Mercur eine elliptische Umlaufsbahn zugewiesen wird. — Die Hebräer waren, wie aus den verschiedenen „Baraitha's“ hervorgeht, im achten Jahrhundert unserer Zeitrechnung gewiss vollkommen mit der wahren Gestalt des Erdkörpers bekannt. Im elften Jahrhundert schrieb Abraham ben Chija eine verdienstliche mathematische Geographie, deren Beweismethoden zum Theile heute noch von Werth sind, der Umfang der Erde war bekannt, und Schriften wie diejenigen des Esthori und

Isaak ben Joseph verrathen eine respectable Bekanntschaft mit geographischer Ortsbestimmung und Parallaxenrechnung. Andererseits freilich herrschten im Talmud und anderen religionsphilosophischen Schriften auch gar viele abenteuerliche Hypothesen, welche im Anschluss an den „Augenspiegel“ Asarja de Rossi's aus Mantua durchmustert werden. Anspielungen auf die Erdrotation finden sich bei Schemtob und im kabbalistischen Buch Sohar. Die Planetentheorie der älteren Juden endlich wird nach dem „Wegweiser der Irrenden“ von Maimonides dargestellt. Zu den beiden letzten Abschnitten hat Moritz Steinschneider in der von ihm redigirten „hebräischen Bibliographie“ einige Correctionen mitgetheilt, welche vielleicht bei späterer Gelegenheit passende Verwendung finden.

Das dritte Heft knüpft an eine im ersten gelegentlich besprochene mittelalterliche Hypothese an, welcher zufolge die Erde und die zu ihr gehörigen Wassermassen zwei excentrisch in einander geschobene Sphären darstellen sollten. Die ersten Keime dieser Irrlehre gehen bis ins Alterthum zurück, wo Strabo die Ansicht, als hätte das Meer nicht überall das gleiche Niveau, bekämpfen zu müssen glaubte. Seneca liess durch eine plötzliche Aenderung dieser Art seine Weltkatastrophen entstehen. Was die Scholastiker anlangt, so huldigten sie durchweg der richtigen Anschauung, dass das flüssige Element in Form einer concentrischen Kugelschale das feste umschliesse, erst Vincenz von Beauvais geht theilweise von ihr ab. Dazu kam, dass arabische Naturforscher eine Anziehung der Erdgewässer nach dem Südpol hin unter dem anziehenden Einfluss der in excentrischer Bahn die Erde umlaufenden Sonne postulirten. Auch Reiseberichte sprachen für eine centrale Anschwellung der Erdfeste in Hochasien, und so bildete sich die Meinung aus, unter dem reichgestirnten Nordhimmel strebe die feste Erde, unter dem sternarmen Südhimmel ein Wasserberg empor. Hiefür erklärten sich besonders Brunetto Latini und Ristoro von Arezzo, wogegen Dante die Ausschreitungen der Lehre energisch bekämpft und bei diesem Bestreben ansehnliche Kenntnisse in Physik und Mechanik an den Tag legt. Einzelne Gelehrte, wie Paulus Burgensis und Capuanus de Manfredonia sprechen sich noch im Sinne dieser Excentricitätshypothese aus, und der Naturphilosoph Patritius hat sich ein selbstständiges von derselben wenigstens nicht weit abweichendes System gebildet, ja Columbus glaubte am Orinoko jene locale Wasseranschwellung wirklich gefunden zu haben.

Gesund und von mathematischer Schärfe sind hier wie allenthalben die Ansichten Copernic's und Lionardo da Vinci's. Weiter wird auseinandergesetzt, wie im vergangenen Jahrhundert durch Lacaille die Vermuthung aufkam, dass die nördliche und südliche Erdhalbkugel sich nicht symmetrisch zu einander verhielten, wie diese Vermuthung in den Hypothesen Wrede's und Lamarck's einen Widerhall fand, welch letztere auf einem Auseinanderliegen des geometrischen und physischen Mittelpunktes beruhte. Endlich werden noch die bekannten zur Erklärung der Eiszeiten ausgesonnenen Theorien Adhémar's und Schmick's einer gedrängten Darlegung und Kritik unterzogen und besonders hervorgehoben, dass eine mathematische Prüfung der letzteren wesentlich den Punkt im Auge zu behalten hat, ob die durch die Attraction der nächsten Himmelskörper beeinflusste flüssige Hülle der Erde eine den Bedingungen der Niveaufläche genügende Oberfläche besitze, oder nicht.

Ansbach. S. Günther.

Der Thibaut'sche Beweis für das elfte Axiom, historisch und kritisch erörtert. (Ansbacher Gymnasialprogramm für 1876/77.)

Thibaut hatte in seinem genetischen Lehrbuche der Elementarmathematik zuerst den Satz von der Winkelsumme des Dreiecks dadurch bewiesen, dass er einen Strahl successive die drei Aussenwinkel durchlaufen und schliesslich nach einer Drehung von 360° in seine Anfangslage zurückkommen liess. Hier wird gezeigt, dass auf dieses Verfahren sowohl in einer selbstständigen Abhandlung von Germar, als auch in den Unterrichtswerken von Kunze und Fischer-Schröder die Parallelentheorie zu begründen versucht worden ist, und dass ihrerseits auch die „Ausdehnungslehre" Grassmann's von einem ganz ähnlichen Verfahren Gebrauch macht. Zum theoretischen Theile seines Planes übergehend weist der Aufsatz nach, dass der fragliche Beweis von einer bekannten die Vertauschung von Rotation und Translation betreffenden Wahrheit der Kinematik abhängig ist, welche selbst nur wieder mit Hülfe gewisser Eigenschaften des Parallelogramms bewiesen werden kann. Es empfiehlt sich deshalb, jenen Satz in axiomatischer Form an die Spitze des planimetrischen Unterrichtes zu stellen, denn derselbe hat gewiss in hohem Grade die Eigenschaft der Leichtverständlichkeit,

aber eine natürliche Consequenz der Anschauung unseres Raumes als einer in sich congruenten dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, wie von gewisser Seite behauptet werden wollte, ist er nicht. Dies wird durch ausführliche Erörterung der Bewegungsverhältnisse auf der Fläche von constanter negativer Krümmung dargethan. Man gelangt so von einer wesentlich anderen Seite her zu der freilich längst anderweit gewonnenen Ueberzeugung, dass die Forderung, durch ebene Constructionen die Parallelenlehre causal zu begründen, einen Widerspruch in sich schliesst.

Ansbach. S. Günther.

Grundlehren der mathematischen Geographie und elementaren Astronomie. (München, Ackermann.)

Obwohl speciell auf Wunsch bayerischer Collegen und für die Gymnasialverhältnisse des engeren Vaterlandes bearbeitet, sucht sich diese Schrift doch auch dadurch ein grösseres Publicum, dass sie den gewiss einzig correcten didactischen Gedanken, den historischen Entwickelungsgang der Astronomie auch beim Unterrichte zur Geltung zu bringen, consequenter durchführt, als dies in vielen Schriften von ähnlicher Tendenz geschieht. Sämmtliche Probleme werden stets dann behandelt, wenn die sämmtlichen empirischen Hülfsmittel zu ihrer Lösung bereit vorliegen. So tritt naturgemäss die sphärische Astronomie in den Vordergrund. Topographische Astronomie und Astrophysik, Chronologie und Kartenprojection werden mehr nur anhangsweise behandelt; überall tritt die mathematische Seite des Gegenstandes soweit hervor, als es die angenommenen Vorkenntnisse, darunter natürlich auch sphärische Trigonometrie, nur irgend gestatten. Verf. hat genau nach dem in diesem Buche eingehaltenen Lehrgang mehrfach akademische Vorlesungen gehalten und hält denselben in Folge dessen für vollkommen geeignet, auch diesem erweiterten Zwecke als erste Grundlage zu dienen.

Ansbach. S. Günther.

Ueber die Reduction elementarer astronomischer Probleme auf planimetrische Betrachtungen. (Erscheint in der „Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht".)

Bei der Ausarbeitung des vorstehend erwähnten Leitfadens drängte sich vielfach die Ueberzeugung auf, dass sehr häufig den meist etwas mechanischen Operationen der Raumtrigonometrie mit grossem Vortheil eine planimetrische substituirt werden könne. Die Note stellt fest, dass dies speciell bei solchen Aufgaben aus pädagogischen Gründen zu geschehen habe, in welchen Bögen kleiner Kugelkreise als integrirende Bestandtheile auftreten. Um einen Anhaltspunkt zu haben, wird eine ziemlich umfassende Aufgabe dieser Art (zur Zeit t nach dem Aufgang eines Gestirnes soll dessen Azimuth und Höhe gefunden werden) einerseits descriptiv, andererseits mit Hülfe der ebenen Trigonometrie behandelt und die Lösung mit der durch sphärische Trigonometrie erzielten in Parallele gesetzt.

Ansbach. S. Günther.

Ueber näherungsweise Kreistheilung. (Zeitschr. f. d. Realschulwesen, 3. Band.)

Eine eingehende Discussion der zur approximativen Einschreibung regulärer Vielecke einzig bekannten Generalregeln von Renaldin und von Herzog Bernhard von Sachsen-Weimar. Nachgewiesen wird, dass manche andere Methoden, welche anscheinend einen selbstständigen Charakter tragen, mit der erstgenannten identisch seien, so diejenige, welche Steczkowski im 25. Bande von Grunert's Archiv und diejenige, welche V. Schlegel im 22. Bande von Schömilch's Zeitschrift untersucht haben.*) Die Fehlercurven beider Verfahrungsweisen werden construirt und erklärt; beide bieten merkwürdige Erscheinungen.

Ansbach. S. Günther.

---

*) Als ein immerhin bemerkenswerther historischer Fund möge die bei diesem Anlass constatirte Thatsache bezeichnet werden, dass die Unrichtigkeit der Renaldin'schen Vorschrift nicht, wie man bisher allgemein annahm, zuerst von Jacob Bernoulli, sondern mehrere Jahre früher in einer Königsberger Dissertation bewiesen ward.

Die Anschauungen des Thomas von Aquin über die Grundsätze der mechanischen Physik. (Kosmos, 1. Jahrg. 3. Heft.)

Dass auch der in der Geschichte der Naturwissenschaften verhältnissmässig wenig genannte Schüler des Albertus Magnus, Thomas Aquinas, über gewisse Hauptfragen in einer überraschend richtigen Weise geurtheilt habe, diess zu zeigen ist der Endzweck dieser Note. Nachdem in kurzen Zügen das Wesen der aristotelischen Physik gekennzeichnet worden, wird Thomas' Stellung zu der Frage vom Perpetuum mobile als eine durchaus negative geschildert, hierauf wird nach den betreffenden Quellen erhärtet, dass er das Erwärmtwerden schnell bewegter Körper durchaus richtig „ex vehementia motus" ableitet und überhaupt die Wärme, die er als vom Lichte unzertrennlich betrachtet, als eine oscillatorische Bewegung definirt, eine Erklärungsweise, welche er der angeblich von Demokrit verfochtenen Emanationstheorie ausdrücklich gegenüberstellt.

Ansbach. S. Günther.

Antike Näherungsmethoden im Lichte moderner Mathematik. (Abhandlungen d. kgl. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften, 6. Folge, 9. Band.)

Diese Studie ist der weiteren Ausführung einer in der ersten Sektion der Münchener Naturforscherversammlung gegebenen und in deren Berichten enthaltenen Notiz gewidmet. Obschon auf historischem Boden beruhend ist sie gleichwohl selbst zunächst nicht geschichtlicher Natur, sondern sie soll lediglich ersehen lassen, wie die bei alten Mathematikern .vorkommenden Näherungswerthe heutzutage auf möglichst kurzem und elegantem Wege eruirt werden können. Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit der Sarosperiode der Babylonier und der altaegyptischen Verhältnisszahl $\pi = \frac{256}{81}$, der zweite mit den chronologischen Reformen des Cleostratus und Meton nnd besonders ausführlich mit den Quadratwurzeln des Heron Alexandrinus. Alsdann kommen die archimedischen Irrationalzahlen und diejenigen neueren Versuche an die Reihe, welche die Entstehung jener divinatorisch zu begründen bestimmt waren; dieselben rühren von Lagny, Hauber und Buzengeiger her und kommen sämmtlich in einer mehr oder minder versteckt liegenden

Kettenbruchentwickelung überein. Die sechzigtheilige Berechnung der Quadratwurzel, welche von Theon angegeben worden, wird, was bis jetzt noch niemals versucht worden zu sein scheint, in algebraische Formeln gekleidet. Zum Schlusse wird ein in den mathematischen Sammlungen des Pappus gelehrtes Constructionsverfahren zur Auflösung des delischen Problemes, resp. zur Extraction von Cubikwurzeln, analytisch untersucht und als ein consequent mit sehr rascher Convergenz fortschreitender Algorithmus erkannt.

Ansbach. S. Günther.

Ferrini: Fisica tecnologica — Elettricità e magnetismo. (Di Rinaldo Ferrini, prof. nel R. Istituto Tecnico Superiore di Milano. Milano, Hoepli 1878.)

Questo libro contiene l'esposizione delle principali applicazioni dell' elettricità e del magnetismo fondata sulla teoria dei potenziali che vi è premessa. L'autore ha cercato di mettersi a livello dello stato attuale della scienza e delle applicazioni, estendendosi particolarmente sui metodi di misurazione che offrono tanta importanza sia dal lato teorico che da quello pratico. Parecchie questioni sono trattate ex-novo.

Sulla resistenza delle eliche degli elettromagneti telegrafici. (Nota del prof. R. Ferrini letta al R. Istituto Lombardo di Scienze e lettere il 31 Gennajo 1878.)

Lo scopo di questa Nota è di mostrare che le divergenze tra i dettami della esperienza e quelli della teoria intorno la piú utile resistenza delle eliche degli elettromagneti telegrafici sono di pura apparenza e derivano dal modo improprio di calcolare la resistenza delle linee telegrafiche.

Mailand. Ferrini.

E. Bertini: Una nuova proprietà delle curve di ordine n con un punto $(n-2)^{\text{uplo}}$. (Transunti della R. Accad. dei Lincei, Vol. I, Serie III.)

La proprietà è la seguente: — Data una curva Γ d'ordine n $(\geq 2t)$ con un punto $(n-2)^{\text{uplo}}$ O, esiste un sistema $\Sigma^{(2t)}$ (lineare

∞^{n-2t}, di curve, di ordine $n-t$, aventi in O un punto $(n-t-2)^{\text{uplo}}$ e passanti pei punti di contatto delle tangenti a Γ partenti da O —.

Se Γ possiede punti doppï (oltre O) le curve del sistema $\Sigma^{(2t)}$ passano per essi ed hanno in ciascuno per tangente la conjugata armonica della retta che congiunge il punto doppio con O rispetto alle due tangenti nel punto doppio.

Pel sistema $\Sigma^{(2t)}$, delle condizioni espresse dai punti fissi comuni alle curve del sistema, $s-1$ sono conseguenza delle rimanenti.

E. Bertini: Sulle curve razionali per le quali si possono assegnare arbitrariamente i punti multipli. (Giornale di Matematiche. Vol. XV.)

1. La condizione necessaria e sufficiente affinché una curva razionale sia riducibile ad una retta per trasformazioni univoche (fra due piani), è che la curva goda della proprietà, che si possano assegnare arbitrariamente le posizioni di tutti i suoi punti multipli. Questo teorema racchiude i teoremi noti relativi alla riducibilità di un fascio e di una rete di curve razionali ad un fascio e ad una rete di rette.

2. Una curva dotata della precedente proprietà e inoltre di avere la somma delle moltiplicità dei tre punti multipli piùelevati eguale all' ordine accresciuto di 1, è necessariamente una della seguenti (oltre la retta):

Una curva di 5° ordine con sei punti doppï.

Una curva di 6° ordine con un punto triplo e sette punti doppï.

Una curva di 8° ordine con sette punti tripli;

Una curva di 11° ordine con sette punti quadrupli e un punto triplo;

Una curva del 17° ordine con otto punti sestupli;

Una curva del 20° ordine con otto punti settupli ed un punto triplo;

Una curva di ordine ν $(\nu > 1)$ con un punto $(\nu-1)^{\text{uplo}}$.

E. Bertini: Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano. (Annali di Matematica — Serie II, Tomo VIII).

Queste ricerche tendono alla soluzione del problema: — Indicare tutte le possibili trasformazioni involutorie nel piano che sono irri-

ducibili, cioè non possono dedursi l'una dall' altra per una trasformazione univoca —.

Premessi (§ 1) alcuni teoremi che riguardano la riducibilità di un sistema lineare ad ordine inferiore per trasformazioni univoche, si dimostra che:

1. Ogni trasformazione involutoria è deducibile per trasformazioni univoche da altre aventi i punti fondamentali a distanze finite (Appendice, No. 51).

2. Ogni curva fondamentale che passa α volte pel punto fondamentale a cui corrisponde (in una trasformazione involutoria avente i punti fondamentali a distanze finite) può essere considerata come posizione particolare di una curva variabile in un sistema lineare, ∞^{α}. Le curve di questo sistema sono di genere $\alpha - 1$, si tagliano in $2\alpha - 2$ punti variabili e sono corrispondenti fra loro o a sè medesime nella trasformazione involutoria. Per ciascuna trasformazione involutoria esiste sempre almeno uno di tali sistemi (§ 2).

3. Esaminando i casi $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha = 3$ (§ 3, 4, 5) e, nell' ipotesi che le curve del precedente sistema corrispondano a sè medesime, il caso $\alpha > 3$ (§ 6) le trasformazioni involutorie sono riducibili ai tipi seguenti:

a) Omologia armonica;

b) Trasformazioni involutorie (di Jonquières) di ordine $p + 2$ con $2p + 2$ punti semplici fondamentali distinti, aventi una curva punteggiata unita d'ordine $p + 2$, di genere p $(p > 0)$, con un (solo) punto p^{plo} nel punto $(p + 1)^{\text{uplo}}$ della trasformazione;

c) Trasformazione involutoria dell' 8^0 ordine con 7 punti tripli, avente una curva punteggiata unita di 6^0 ordine, per la quale quei sette punti sono doppï;

d) Trasformazione involutoria del 17^0 ordine con 8 punti sestupli, avente una curva punteggiata unita di 9^0 ordine, per la quale quegli otto punti sono tripli. —

A completare la ricerca rimangono a discutere le trasformazioni involutorie, per le quali, essendo $\alpha > 3$, si presentino soltanto sistemi di curve corrispondenti fra loro.

Pisa. E. Bertini.

Wilh. Fiedler. 1) Ueber die Symmetrie nebst einigen andern geometrischen Bemerkungen. Vierteljahrsschrift der Züricher Naturforschenden Gesellschaft. (Jahrg. 1876, p. 50—66.)

2) Geometrie und Geomechanik. Eine Uebersicht zur Kennzeichnung ihres Zusammenhanges nach seiner gegenwärtigen Entwicklung. (Ibid. Jahrg. 1876, p. 186—228.)

3) Die birationalen Transformationen in der Geometrie der Lage. (Ibid. 1876, p. 369—383.)

4) Zur Reform des geometrischen Unterrichts. (Ibid. 1877, p. 82—97.)

Die erste der vorgenannten kleinen Arbeiten ward veranlasst durch die mir auffallenden Mängel der elementaren Darstellungen der Symmetrielehre, nämlich durch ihre Unvollständigkeit — denn sie vernachlässigen sämmtlich eine mit den übrigen gleichberechtigte Art der Symmetrie räumlicher Figuren, diejenige in Bezug auf eine Axe — und die offenbare Ursache derselben —, nämlich den Mangel eines elementaren anschaulichen Nachweises aller möglichen Symmetrielagen von zwei gleichgebildeten Figuren von drei Dimensionen.

Einen solchen elementaren Nachweis habe ich gegeben. Für die ebenen Figuren genügt die zweimalige Darstellung eines Polygons aus den gleichen Bestimmungsstücken in derselben Aufeinanderfolge und die Untersuchung der möglichen Vereinigungen in derselben Ebene bei Deckung eines Paares ihrer entsprechenden Seiten: Vier Lagen, von denen eine die Deckung, zwei die Symmetrielagen mit Axe und die letzte die Symmetrielage mit Centrum bilden; jene Seite und ihre senkrechte Halbirungslinie sind die Axen, ihr Halbirungspunkt ist das Centrum der Symmetrie.

Für drei Dimensionen bildet man aus drei congruenten Exemplaren eines Oberflächennetzes, welches etwa zur Erleichterung der Anschauung ein Rechteck $ABCD$ enthält, zwei (congruente) Polyeder I, II durch Benutzung derselben Seite der Netzebene als Aussenfläche, ein drittes (symmetrisches) III mit seiner entgegengesetzten Seite. Von der Deckungslage von I und II aus sind dann für II drei Drehungen um 180° möglich um die Symmetrieaxen des Rechtecks und um die Normale seiner Ebene in seinem Mittelpunkte, so dass die neuen Lagen von II mit I axensymmetrisch sind, während die Flächen $ABCD$ vereinigt liegen. Und von der einfachsten möglichen Verbindung zwischen I und III bei Vereinigung dieser

Flächen unter Zusammenfallen ihrer gleichbenannten Ecken ausgehend erhält man durch die Drehung um 180° um dieselben Axen drei weitere symmetrische Lagen, wovon zwei mit Symmetrieebene und die dritte mit Symmetriecentrum. Die drei Axensymmetrielagen der gleichsinnig congruenten Figuren, die drei Ebenensymmetrielagen und die centrische Symmetrielage der ungleichsinnig congruenten bilden mit der Deckung der ersten die acht Lagen, welche den Octanten um einen Punkt im Raum von drei Dimensionen entsprechen.

In der Geometrie der Lage erscheinen die Typen der elementaren Symmetrie als Specialfälle der Involution gleichartiger Gebilde von ein, zwei, drei Dimensionen — insbesondere der übersehene Typus der Axensymmetrie für Figuren von drei Dimensionen als Specialfall der geschaarten Involution oder der Collineation der Räume mit zwei windschiefen sich selbst entsprechenden Geraden. Ich habe nicht unterlassen, die Vortheile hervor zu heben, welche der analoge stufenweise Aufbau der elementaren Untersuchung für die Entwickelung der Raumanschauung darbietet. In der allgemeinen Form der Involution sieht man zugleich, dass die sich selbst entsprechenden Elemente die möglichen Combinationen dualer Paare der Elemente erschöpfen: Punkt und Gerade, oder Ebene und Gerade (im Bündel) für zwei Dimensionen, Punkt und Ebene, Gerade und Gerade für drei.

Auf die Symmetrien ungleichartiger Gebilde, die vor Allem die Metrik der Elementargeometrie liefern, habe ich nur kurz hingewiesen, da sie dem elementaren Zweck nicht entsprechen.

Im Uebrigen enthält der Aufsatz einige Bemerkungen im Zusammenhang mit meinem Buche: „Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage“ (vergl. dieses Repertorium Bd. I, p. 205 f.); z. B. über metrische Specialisirungen der Construction projectivischer gerader Reihen und Strahlenbüschel; über die symmetrisch gleichen entsprechenden Reihen und Strahlbüschel in ebenen und über die symmetrisch gleichen entsprechenden Ebenen und Bündel in räumlichen centrisch collinearen Systemen. Eine derselben, über die Art, wie die Untersuchungen der Geometrie der Lage systematisch auf die eindeutigen Transformationen führen, habe ich in der unter 3) genannten Schrift etwas näher entwickelt: Es ist die Betrachtung des doppelt conjugirten Elements zu einem gegebenen bei in einander liegenden projectivischen Gebilden; man erhält alle Arten der birationalen Transformationen in der speciellen

Lage der Involution; die Projectivität der Räume führt besonders auf die Abbildungen des Punktraumes in den tetraedralen Complex — ohne jedoch Punktabbildungen auszuschliessen.

Ebenso schliesst sich das Schriftchen unter 4) an 1) an, die Erörterung meiner Ansicht über die wünschenswerthe Reform des gesammten geometrischen Unterrichts; veranlasst durch die zahlreichen neueren Veröffentlichungen in dieser Richtung, und insbesondere mit Bezug auf das Buch: „Geometrie der Ebene, systematisch entwickelt von Dr. F. Kruse“ (Berlin 1875). Das Wesentliche meiner Ansicht, dass die Geometrie darstellend-geometrisch verfahren, dass sie in der mathematischen Abstraction unserer faktischen Orientirung im Raume ihre leitenden Ideen suchen soll, so dass eine Reform am besten in der engeren Verbindung von reiner und darstellender Geometrie zu finden wäre, was Alles hier besonders auch dem erwähnten Buche gegenüber ausgeführt wird, will ich nicht näher erörtern, weil sich die Kürze des Schriftchens nicht wohl noch weiter kürzen lässt. Aus dem Buche von Herrn Kruse ist zur Erläuterung der Abschnitt von der Affingleichheit ebener Figuren herangezogen; derselbe giebt Anlass zu der Ausführung, dass die Affingleichheit zu dem überall vernachlässigten speciellen Fall der centrischen Collineation ebener oder räumlicher Figuren gehört, bei welchem das Centrum in der Collineationsaxe, resp. Collineationsebene liegt, und dass daher die affingleichen Gebilde mit den axen- resp. ebenensymmetrischen verbunden sind durch den Satz: Zwischen dem einen von zwei affingleichen Systemen und dem zum andern in Bezug auf die Axe oder Ebene orthogonalsymmetrischen System findet schräge Symmetrie in Bezug auf dieselbe Axe oder Ebene statt. Und allgemein, die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften dogmatisch einzuführen, anstatt sie aus ihrer natürlichen Quelle hervorgehen zu lassen, woraus sie auch historisch entsprungen ist, will mir als keine gute Reform erscheinen. Aber auch von systematischer Reform ganz abgesehen, will mich bedünken, dass zur Klärung und Festigung der Definitionen Uebungen ans dem Grenzgebiete zwischen der darstellenden Geometrie und dem Zeichnen etwa nach Stabmodellen höchst nützlich wären, wie diese: Eine drei- oder mehrseitige Ecke, ein Tetraeder, Parallelepided, Prisma, eine einfache oder Doppelpyramide etc. liegt etwa nach Stabmodell gezeichnet vor; man kennt von einer geraden Linie die beiden Punkte, in welchen sie zwei der zugehörigen Flächen durchstösst, von einer Ebene die Punkte auf drei Kanten, und soll die

Schnittpunkte der ersteren mit den übrigen Flächen resp. die vollständige Querschnittsfigur die letzteren verzeichnen; man soll durch einen Punkt in der in ersterer Weise bestimmten Geraden die Transversalen der Paare windschiefer Kanten des Körpers ziehen etc. in mannichfachen Variationen.

Die Schrift: „Geometrie und Geomechanik" unter 2) ist eine orientirende Uebersicht, gewissermassen auch Inhaltsangabe einer im Sommersemester 1876 zuletzt gehaltenen Vorlesung, über die Bedeutung der involutorischen Reciprocität des Nullsystems in der Statik, Kinematik und Dynamik, mit besonderem Bezug auf die seit 1871 veröffentlichten Arbeiten des englischen Gelehrten R. St. Ball. Ich habe mich bemüht, in Kürze möglichst klar und durch genaue Literaturnachweise genau verfolgbar den für diese Disciplinen wesentlichen Zusammenhang und seine allmählige Erkenntniss aufzuzeigen, welcher stattfindet zwischen der canonischen Form der Bewegung eines starren Systems, der durch ihre Axe, ihren Pfeil oder die Grösse der Verschiebung bei einer Drehung um die Winkeleinheit im Bogenmass, und ihre Amplitude bestimmten Schraubenbewegung oder der *Windung;* ferner der canonischen Form eines Systems von Kräften, dem durch die Axe der Einzelkraft, den Pfeil oder Quotienten aus dem Momente des in ihrer Normalebene wirkenden Paares durch die Intensität der Einzelkraft, und die Intensität der Letzteren bestimmten, gleichfalls unter dem Bilde der Schraube darstellbaren *Winder* und den rein geometrischen Beziehungen der einstimmigen Congruenz und des Nullsystems oder des linearen Complexes. Von Euler und d'Alembert ab bis auf die Gegenwart ist alles Wesentliche dieser Entwickelung aufgeführt und in der auf das Endziel weisenden Verbindung dargestellt. Dabei sind die geometrischen Consequenzen der Entwickelung nur historisch verzeichnet, während ihre Ausführung unterblieb — es ist ersichtlich, dass die zu sich selbst dualen Raumcurven, von denen in Bd. I, p. 224 berichtet ist, auch in ihre Reihe gehören —, um Raum zu haben für eine nähere Darlegung der Dynamik fester Körper von diesen Grundlagen aus, und für die verschiedenen Stufen der Bedingtheit resp. Freiheit der Bewegung, welche möglich sind. Auf die Lehre von der Zusammensetzung der Winder oder Windungen vermittelst des Cylindroids, einer metrisch specialisirten Regelfläche dritten Grades, und von der Reciprocität der Windungen und Winder oder der Involution der bezüglichen Schrauben oder linearen Complexe, folgt die Entwickelung der zweckmässigen Coordinatenbestim-

mung der Schrauben, in Bezug auf ein System von sechs reciprocalen Schrauben nämlich; dann treten mit der Einführung der Masse des Bewegten in die Untersuchung die Gruppen der materiell conjugirten oder der Hauptträgheitsschrauben, und der potentiell conjugirten Hauptschrauben, sowie schliesslich als zu beiden zugleich gehörig die der harmonischen Schrauben hervor. Die Ableitung der allgemeinen Differentialgleichungen der Dynamik unveränderlicher Systeme und die anschauliche Lösung des allgemeinen kinetischen Problems, sowie die nähere Erörterung des besonderen Falles, in welchem der Körper frei ist nach Windungen um alle Schrauben eines Systems dritter Stufe (was wieder die Rotation um einen festen Punkt als sehr speciellen Fall einschliesst), endigt die Abhandlung.

Ich wollte damit hauptsächlich der Verbreitung der vorgeführten Ideen dienen, an deren Weiterführung auf das Gebiet der Hydrodynamik etc. ich nicht zweifle, und mache daher keine Ansprüche auf Originalität. Immerhin glaube ich, dass mir der einfache Nachweis von der Existenz der Centralaxe einstimmig congruenter Räume durch Specialisirung der Collineation in Art. 1 angehört, aus dem die bekannte Chasles'sche Construction derselben aus zwei entsprechenden Dreiecken hervorgeht und dessen Grundidee zugleich die meisten der Sätze liefert, welche Chasles über die Bewegung starrer Systeme mitgetheilt hat.

Auch habe ich für die darstellend geometrische Behandlung des Cylindroids die zweckmässigsten Grundlagen und einen einfachen Beweis für seine wichtigste Eigenschaft gegeben, wonach die von einem Punkte aus auf seine geraden Erzeugenden gefällten Normalen — die Axen der zum Cylindroid reciproken Schrauben — einen Kegel zweiten Grades bilden, da ihre Fusspunkte in einer Ellipse liegen.

Einer meiner Herren Zuhörer in jener Vorlesung, Dr. A. Göbel, hat seither die Begründung der Lehre von der Zusammensetzung der Winder durch das Cylindroid vermittelst des Arbeitsprincips zum Gegenstand seiner Dissertation und einer besondern Veröffentlichung gemacht „Die wichtigsten Sätze der neuern Statik in elementarer Darstellung." Zürich 1877.

Zürich-Unterstrass. Wilh. Fiedler.

Albert Fliegner: Die Bergbahn-Systeme vom Standpunkte der theoretischen Maschinenlehre. Zürich, Orell, Füssli & Co. („Technishe Mitthlgn.“ 9. Heft.)

Die Arbeit ist ein vervollständigter Abdruck einer Reihe von Artikeln, die der Verfasser im VII. Bande der Zeitschrift „Die Eisenbahn“ veröffentlicht hatte.

Bei der Untersuchung und Vergleichung der verschiedenen Systeme ist auf die Anlage- und Unterhaltungskosten der Bahn keine Rücksicht genommen worden, da namentlich die letzte Grösse bei einigen Systemen noch nicht durch die Erfahrung festgestellt ist. Als Hauptfrage wurde vielmehr angesehen die Ausnutzung der an der Hauptwelle des Motors (Locomotive oder irgend eine stationäre Maschine) verfügbaren Arbeit auf Fortschaffung der Nutzlast, einschliesslich der Wagen. Es wurde daher bei den untersuchten Systemen das Verhältniss der Nutzleistung dividirt durch die effective Leistung des Motors, das sogenannte Güteverhältniss des Systems, ermittelt und zur besseren Uebersicht in einer Tabelle für einige Fälle berechnet.

Zunächst sind die Systeme mit beweglichem Motor untersucht, also die eigentlichen Locomotivbahnen (das gewöhnliche Adhäsionssystem, der Dampfomnibus, die Systeme von Flachat und Thouvenot, von Fell, das Zahnradsystem und das System Wetli). Auf einige andere hierher gehörende Systeme ist kurz hingewiesen. Bei allen diesen Systemen wird der Hauptarbeitsverlust hervorgebracht durch die Nothwendigkeit, die Locomotiven mit fortzubewegen. Das Güteverhältniss zeigt sich abhängig von Steigung und Geschwindigkeit, und zwar im Allgemeinen mit Zunahme dieser beiden Grössen abnehmend. Eine Vergleichung des Güteverhältnisses der einzelnen Systeme zeigt, dass wenn man die erhöhten Kosten des Oberbaues der Specialsysteme mit berücksichtigt, bis zu Steigungen von etwa 5% das gewöhnliche Adhäsionssystem (natürlich mit Tender-Locomotiven) den Vorzug verdient. Erst bei grösseren Steigungen ist man berechtigt und genöthigt, zu besonderen Systemen zu greifen. Mit diesen kann man dann noch bis zu Steigungen von etwa 30% gehen, bei noch grösseren wird die verfügbare Arbeit zu schlecht ausgenutzt. Mit Zunahme der Steigung ist übrigens eine Reduction der Geschwindigkeit nöthig.

Die zweite untersuchte Gruppe bilden die Drahtseilbahnen (das einfache Seil, das Doppelseil mit Berg- und Thalfahrt, dasselbe

mit Locomotivbetrieb, das Seil ohne Ende mit Bergfahrt allein, dasselbe mit Berg- und Thalfahrt, die Bahnen von Hodgson, Agudio und Handysides. Der Arbeitsverlust hat seinen Grund in den Bewegungswiderständen des Seiles, wozu bei den Bahnen, die nicht ein Seil ohne Ende anwenden, noch das Heben des Seilgewichtes kommt. Das Güteverhältniss wird in Folge dessen wesentlich mit von der Länge der Bahn abhängig; der Einfluss der Steigung bleibt auch bestehen. Die Geschwindigkeit dagegen fällt entweder ganz aus der Formel heraus, oder ist doch von nur untergeordneter Bedeutung.

Wenn solche Bahnen ausser Verbindung mit anderen stehen, so kann man besonderes Betriebsmaterial mit Sicherheitsvorrichtungen für den Fall eines Seilbruches voraussetzen. Dann stellen sie sich sehr günstig, namentlich bei gleichzeitiger Berg- und Thalfahrt, weil in diesem Falle der hinunterfahrende Zug einen sehr bedeutenden Theil der nöthigen Arbeit übernimmt und den Motor so entlastet, dass sich dann meistens Güteverhältnisse grösser als 100 % finden. Diese Arbeit der Schwerkraft am thalwärtsfahrenden Zuge wird sonst durch Bremsen vernichtet, ist also hier reine Ersparniss an Betriebskosten. In diesen Fällen kann man auch vertical fördern.

Sind Drahtseilbahnen dagegen Theilstrecken anderer Bahnen die gewöhnliches durchgehendes Betriebsmaterial befördern müssen, so sind für den Fall eines Seilbruches besondere Sicherheitsvorrichtungen nicht am Platze, es muss vielmehr die Sicherheit durch eine in genügendem Masse verfügbare Bremskraft geboten sein; dann werden solche Systeme aber wesentlich ungünstiger, sogar ungünstiger, als die Systeme mit beweglichem Motor. Höchstens etwa das System von Agudio, aber nur in Anwendung auf einen zahnstangenartigen Fortbewegungsmechanismus, und dann auch das Doppelseil mit Locomotivbetrieb könnten für Theilstrecken jenen gegenüber in Frage kommen.

Bei den zuletzt untersuchten atmosphärischen und pneumatischen Bahnen mit verdünnter oder comprimirter Luft zeigt sich die Steigung ohne Einfluss auf das Güteverhältniss, dagegen die Länge und die Geschwindigkeit. Dabei wächst das Güteverhältniss mit abnehmender Länge und zunehmender Geschwindigkeit. Die atmosphärischen Bahnen, bei denen sich die treibende Luft in einer engen Röhre ausserhalb des Zuges befindet, ergeben ein so geringes Güteverhältniss, dass ihnen jede Existenz-

berechtigung vom ökonomischen Standpunkte aus abgesprochen werden muss. Für die pneumatischen Bahnen dagegen, bei welchen der ganze Zug von der Röhre umschlossen wird, und die in Folge davon mit wesentlich geringerem Luftüberdrucke arbeiten können, stellt sich das Güteverhältniss günstiger, so dass sie in manchen Fällen neben den weniger guten Seilbahnen und auch neben den Systemen mit beweglichem Motor in Frage kommen könnten.

Zum Schlusse ist noch darauf hingewiesen, dass, wenn man die Arbeit untersucht, die zum Heben einer Last auf eine bestimmte Höhe nöthig ist, man bei allen Systemen eine günstigste Steigung findet, die beim Adhäsionssystem etwa 15‰ beträgt, bei anderen Bahnen dagegen oft so gering ist, dass bei ihr ein besonderes System keine Berechtigung hätte. Dann bestimmt sich die Steigung namentlich mit Rücksicht auf die Anlagekosten und auf die voraussichtliche Frequenz der Bahn.

Zürich, März 1878. Prof. Albert Fliegner.

Heinrich Streintz: „Berechnung der transversalmagnetisirenden Kraft eines einen Eisenstab durchfliessenden galvanischen Stromes".

Ich habe unter dem Titel „Die elektrischen Nachströme transversal-magnetisirter Eisenstäbe" in dem LXXVI Bande der Sitzungsberichte der k. Acad. d. Wiss. zu Wien eine Abhandlung veröffentlicht, welche zuerst die Berechnung der Kraft enthält, mit welcher ein einen Eisenstab durchfliessender galvanischer Strom dessen Molecularmagnete zu drehen bestrebt ist und dann die Resultate einer Experimentaluntersuchung mittheilt, die ich in Gemeinschaft mit meinem Vetter Dr. Franz Streintz ausgeführt und sich auf die durch Erschütterung eines transversalmagnetisirten Stabes erzeugten Nachströme bezieht.

Hier soll in Kürze nur von dem ersten Theile die Rede sein.

Um zu erfahren, welche Wirkung der den Eisenstab durchfliessende Strom auf einen Molecularmagnet ausübt, denke man sich den Strom aus einzelnen Stromfäden bestehend, von denen nun jeder den Moleculamagnet zu richten bestrebt ist. Derselbe würde sich, wenn er vollkommen frei beweglich wäre, transversal gegen die Richtung des Stromes stellen, da alle auf ihn wirkenden Strom-



fäden parallel sind. Um die Stellung der Molecularmagnete noch weiters zu bestimmen, genügt eine Construktion, welche leicht zeigt, dass sich dieselben in concentrischen Kreisen um die Axe des Stabes anordnen werden und zwar so, dass wir die Axe des Stabes verkehrt wie die Zeiger der Uhr umkreisen, wenn wir von einem Molecularmagnet zum nächsten übergehen und uns in den Molecularmagneten stets vom Süd gegen den Nordpol bewegen, und der Strom von unten nach oben geht.

Wirklich erreichen können die Molecularmagnete jene Stellung natürlich nicht, da ausser der inneren Reibung noch die von Weber mit D bezeichnete Directionskraft entgegenwirkt; sie werden sich aber umsomehr jener Grenzlage nähern, je grösser die Stromstärke des den Stab durchfliessenden Stromes ist.

Betrachtet man, was erlaubt ist, zur Berechnung der Kraft den Stab als unendlich lang, so bildet die Grundlage der Berechnung das Biot-Savart'sche Gesetz, nach welchem die Wirkung eines Stromfadens auf einen Pol eines Molecularmagnets verkehrt proportional ist dem Abstande des Pols vom Stromfaden; die an dem Pole angreifende Kraft steht senkrecht auf der durch den Leiter und den Pol bestimmten Ebene. Man kann sich nun auch denken, es befinde sich dort, wo das von dem Magnetpole auf den Stromfaden gefällte Perpendikel letzteren trifft, der Sitz der Kraft, welche nach dem obigen Kraftgesetze wirkt. Wenn wir dann weiteres von einem Stromfaden zu dem ganzen Strome übergehen, so werden wir für die Rechnung nur ein Problem der Ebene haben, nämlich die Wirkung eines Kreises (die untersuchten Stäbe hatten kreisförmigen Querschnitt) zu rechnen, dessen einzelne Punkte auf den in seiner Fläche gelegenen Magnetpol nach dem Kraftgesetze $\frac{C}{r}$ wirken.

Es ist aber dieses Kraftgesetz für die Ebene ein Analogon des Newton'schen Kraftgesetzes für den Raum. Eine gleichmässig mit Masse belegte Kreislinie wirkt auf einen Punkt im Inneren der Kreisfläche nicht, hingegen auf einen ausserhalb in derselben Ebene gelegenen gerade so, als wäre die Gesammtmasse der Kreislinie in deren Mittelpunkte vereinigt.

Befindet sich also der Magnetpol, dessen magnetische Masse μ sei, im Abstande r von der Achse des Stabes, so wirkt auf ihn nur derjenige Theil des Stromes, der durch den Querschnitt vom Radius r fliesst.

Ist die Stromstärke des den ganzen Stab durchfliessenden Stromes i, so fliesst durch den Querschnitt vom Radius r ein Strom von der Intensität $\frac{ir^2}{a^2}$, und die Kraft, mit welcher der Pol afficirt wird ist $\frac{k\mu ir}{a^2}$, worin a den Halbmesser des Querschnitts bedeutet. Nehmen wir nun an, in der Volumseinheit des Stabes seien n Molecularmagnete gelegen, so befinden sich in derselben auch n gleichnamige Pole und die Summe der auf alle gleichnamigen in dem Stabe enthaltenen Pole ausgeübten Richtkräfte wird $R = \frac{2}{3}\pi k n \mu i l a$, wenn l die Länge des Stabes ist.

Es kann selbstverständlich R auch als die Summe der Drehmomente angesehen werden, wenn man nur der Constanten k eine etwas andere Bedeutung beilegt. Es lassen sich aus diesem Ausdrucke auch leicht einige Folgerungen ziehen.

Graz. H. Streintz.

A. V. Bäcklund: Ueber partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung, die intermediäre erste Integrale besitzen. (Math. Annalen Bd. XI, p. 199—241.)

Diese Abhandlung beschäftigt sich einerseits mit den, in der vorangehenden Abhandlung desselben Verfassers im IX. Bd. der Math. Annalen skizzirten mehrdeutigen Flächentransformationen, andererseits mit denjenigen partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung, die solche intermediäre Integrale besitzen, die durch partielle Differentialgleichungen nächstniederer Ordnung sich ausdrücken.

Um zunächst das, was über die mehrdeutigen Flächentransformationen auseinandergesetzt wird, zu besprechen, will ich der Einfachheit wegen, nur den Fall von drei Variablen x, y, z d. i. einen Raum von drei Dimensionen, in Betracht ziehen. — Zu einer Flächentransformation eines Raumes von drei Dimensionen führt etwa folgende Ueberlegung: Es seien x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes des Raumes, dann ist die Gleichung $z = \varphi(x, y)$ der Repräsentant einer Fläche, und die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, etc. (wenn man in denselben für x, y irgend

ein beliebiges Werthsystem x^0, y^0 setzt) werden als Bestimmungsstücke der Fläche aufzufassen sein, indem die Reihe

$$z^0 + \frac{\partial z}{\partial x}(x - x^0) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - y^0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x - x^0)^2 + \text{etc.}$$

$\left(\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(x^0) \text{ etc.}\right)$ in dem Bereiche, in dem sie convergiert, mit der durch $\varphi(x, y)$ definirten Function zusammenfällt. Statt

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

ist geschrieben p, q, r, s, t bez. Es gilt dann immer folgende Regel: Von einem beliebigen Werthsysteme (z, x, y, p, q) aus kommt man zu den unendlich benachbarten Punkten $(z + dz, x + dx, y + dy)$ aller derjenigen Flächen, die im Punkte (zxy) jene Werthe p, q als Werthe von ihren $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ haben, wenn man dz bestimmt durch die Gleichung: $dz = pdx + qdy$. Und von einem beliebigen Werthsysteme (z, x, y, p, q, r, s, t) aus kommt man zu den unendlich benachbarten Werthsystemen $(z + dz, \cdots q + dq)$ aller derjenigen Flächen, die dieselben Werthe (z, p, q, r, s, t) für jenes Werthsystem von x, y haben, wenn man dz, dp, dq bestimmt durch die Gleichungen: $dz = pdx + qdy$, $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$.

Wird also verlangt zwischen den Figuren des Raumes eine solche Correspondenz zu etabliren, dass Flächen immer wiederum Flächen (oder Curven) entsprechen, und denkt man sich dabei den Raum zweifach von denselben Figuren erfüllt: einmal von den als bekannt gedachten Figuren, sodann von Figuren, die vermittelst der gesuchten Correspondenz aus diesen herzuleiten sind, so ist, wenn man die Bestimmungsstücke einer als bekannt gedachten Fläche durch

$$z, x, y, p, q, r, s, t, 3^{\text{te}}, 4^{\text{te}}, 5^{\text{te}} \text{ etc. Diffqu. v. } z;$$

und die Bestimmungsstücke der ihr correspondirenden durch

$$Z, X, Y, P, Q, R, S, T, 3^{\text{te}}, 4^{\text{te}}, 5^{\text{te}} \text{ etc. Diffqu. v. } Z$$

bezeichnet, die Correspondenz durch eine Reihe von Gleichungen zwischen jenen und diesen Bestimmungsstücken auszudrücken.

Aber diese Reihe von Gleichungen ist keineswegs eine beliebige. Sie muss vielmehr, falls die Correspondenz alle Flächen betreffen soll, nach dem eben Auseinandergesetzten so eingerichtet sein, dass man gleichzeitig hat

(1) $dz = pdx + qdy$, $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$, etc. in inf.

und

(2) $$dZ = PdX + QdY,\ dP = RdX + SdY,$$
$$dQ = SdX + TdY, \text{ etc. in inf.}$$

Also: drei Gleichungen

$$Z = F\,(z,\ x,\ y,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ 3^{\text{te}},\ 4^{\text{te}} \text{ etc. Diffqu. v. } z),$$
$$X = F_1(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad),$$
$$Y = F_2(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad),$$

(die Functionen F, F_1, F_2 ganz beliebig)

bestimmen vollständig eine Correspondenz der fraglichen Art. Sie wird als eine Transformation von Flächen in (zxy) in Flächen in (ZXY) bezeichnet. In der Regel ist dies eine mehrdeutige Flächentransformation; immer verwandelt sie eine jede Fläche in (zxy) in eine Fläche in (ZXY), aber umgekehrt werden einer Fläche in (ZXY) unendlich viele Flächen in (zxy) entsprechen. Z. B. die Transformation, die in der angeführten Abhandlung im IX. Bd. der Math. Ann. discutirt worden ist: $Z = q$, $X = x$, $Y = y$ lässt der Fläche $Z = F(X, Y)$ die Gesammtheit der Integralflächen der partiellen Differentialgleichung $q = F(x, y)$ entsprechen.

Insbesondere wird die Flächentransformation behandelt, die durch drei solche Gleichungen:

(3) $$Z = F\,(z,\ x,\ y,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t),$$
$$X = F_1(\qquad\qquad\qquad\qquad),$$
$$Y = F_2(\qquad\qquad\qquad\qquad),$$

bestimmt ist, dass man, bei Anwendung des Satzes von dem gleichzeitigen Bestehen der Relationen (1), (2) zu Werthen P, Q kommt, die nicht — wie dies für beliebige F, F_1, F_2 der Fall ist — dritte Differentialquotienten von z enthalten, so dass man erhält:

$$P = \varphi\,(z,\ x,\ y,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t),$$
$$Q = \psi(\qquad\qquad\qquad\qquad),$$

Es wird gezeigt, dass jede der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung: $F = C$, $F_1 = C$, $F_2 = C\ \infty^2$ erste Integrale besitzt, d. h. dass z. B. für $F = c^0$ eine Gleichungsschaar existirt:

$$f(z,\ x,\ y,\ p,\ q,\ \lambda,\ \mu) = 0,$$

(wo λ, μ willkührliche Constanten sind), die durch vollständige Differentiation in Bezug auf x, y Werthe für r, s, t giebt, die der Gleichung 2. O. $F = c^0$ genügen. Weiter müssen je zwei der Gleichungen

$F = c^0$, $F_1 = c'$, $F_2 = c''$ ∞^1 erste Integrale und alle drei ein erstes Integral gemeinsam besitzen. Dies sind für die Functionen F, F_1, F_2 nothwendige und hinreichende Bedingungen.

Aehnliche Beziehungen gelten für die Functionen F, F_1, F_2 einer Flächentransformation:

$$\begin{aligned} Z &= F\,(z,\ x,\ y,\ p,\ q\ 2^{\text{te}},\ 3^{\text{te}},\ 4^{\text{te}} \text{ etc. Diffqu. v. } z), \\ X &= F_1\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad), \\ Y &= F_2\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad), \end{aligned}$$

wenn die Gleichungen für P, Q nicht höhere Differentialquotienten von z enthalten sollen, als in F, F_1, F_2 vorkommen. Es wird gezeigt, dass niemals die zugehörigen Werthe von R, S, T nur diejenigen Differentialquotienten von z, die schon in F, F_1, F_2 eingehen, enthalten können (so dass sie von den höheren Differentialquotienten von z frei wären), — und daraus wird (S. 213) geschlossen, dass es keine anderen eindeutigen Flächentransformationen giebt, als diejenigen, die von Lie behandelt und von ihm mit dem Namen von Berührungstransformationen belegt worden sind. Die Lie'schen Berührungstransformationen sind sonach die einzigen Flächentransformationen, die nicht nur eine jede Fläche in (zxy) in eine Fläche in (ZXY),*) sondern auch umgekehrt eine jede Fläche in (ZXY) in nur eine Fläche in (zxy) überführen. (Geometrisch bewiesen in der Abh. im IX. Bd. der Annalen).

Die Flächentransformation (3) ist übrigens von der Beschaffenheit, dass sie die Flächen in (ZXY) in partielle Differentialgleichungen 1. O. in (zxy) verwandelt, so dass eine Fläche in (ZXY) allen denjenigen Flächen entspricht, die Integrale einer (entsprechenden) partiellen Differentialgleichung 1. O. sind. Darum führt sie eine jede partielle Differentialgleichung 1. O. in (ZXY) in eine partielle Differentialgleichung 2. O. in (zxy) über, die erste Integrale — durch partielle Differentialgleichungen 1. O. ausgedrückt, die den Integralflächen der partiellen Differentialgleichung 1. O. in (ZXY) entsprechen — besitzt. Angewandt auf eine partielle Differentialgleichung 2. O. dieser Art in (ZXY), führt die Transformation (3) auf eine partielle Differentialgleichung 3. O. in (zxy), die sowohl erste Integrale — durch partielle Differentialgleichungen 2. O. ausgedrückt — als auch zweite Integrale — durch partielle Differentialgleichungen 1. O. ausgedrückt — zu einer solchen Zahl besitzt, dass jede Integralfläche der Gleichung 3. O. in einem zweiten und, vermittelst desselben, in einem ersten Integrale enthalten ist.

*) Wegen dieser Ausdrucksweise vergleiche man das Vorhergehende.

Es wird nun weiter angedeutet, wie man die Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. in eine Integrationstheorie der genannten Gleichungen zweiter Ordnung transformiren kann, — aber diese Theorie wird gleich nachher unabhängig von der Theorie der Transformation (3) entwickelt.

Jetzt komme ich zu dem zweiten Abschnitte dieser Abhandlung und halte mich auch hier nur bei dem Falle von drei Variablen x, y, z auf.

Es werden r, s, t — die zweiten Differentialquotienten von z — als Coordinaten der Punkte eines Raumes R'_3 interpretirt. Dann stellt eine partielle Differentialgleichung 2. O. $f(z, x, y, p, q, r, s, t) = 0$ eine Schaar mit fünf willkürlichen Parametern (z, x, y, p, q) von Flächen in R'_3 dar; oder es wird durch die partielle Differentialgleichung 2. O. jedem Werthsysteme von z, x, y, p, q eine gewisse Fläche in R'_3 zugeordnet.

Soll die partielle Differentialgleichung 2. O. ein erstes Integral mit zwei willkürlichen Constanten (oder, kurz gesagt, ∞^2 erste Integrale) haben, so muss jede dieser Flächen eine Linienfläche sein. Die Erzeugenden der Fläche müssen dem speciellen Plücker'schen Complexe zweiten Grades:

$$(4) \qquad \varrho\tau - \sigma^2 = 0$$

angehören, wenn ϱ, σ, τ, α, β homogene Liniencoordinaten bedeuten, in denen die Punktgleichungen der Geraden sich so stellen:

$$\tau x = \varrho z + \alpha, \quad \tau y = \sigma z + \beta.$$

Schliesslich muss die von den Flächen gebildete fünffache Schaar (z, x, y, p, q variable Parameter der Schaar) folgende charakteristische Eigenschaft haben. Schreibt man (ich wende die in meiner Note über diesen Gegenstand in den Sitzungsberichten der phys.-medic. Societät zu Erlangen (6. März 1876) gebrauchte Bezeichnung an) die Gleichungen der bezeichneten Linienflächenschaar in Complexliniencoordinaten m, μ, ν*) so:

$$A(z, x, y, p, q, m, \mu, \nu) = 0,$$
$$B(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0,$$

und führt sodann statt x, y, z, p, q die Buchstaben x_1, x_2, x_3, ζ, x_4 ein und setzt $m = p_4$, $\mu = p_1 + \zeta p_3$, $\nu = p_2 + x_4 p_3$, wo $p_i = \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}$, so hat man die obigen Gleichungen $A = 0$, $B = 0$ in zwei partielle

*) Eine Linie des Complexes (4) ist in Punktcoordinaten so auszudrücken: $x = my + \mu$, $y = mz + \nu$; wo m, μ, ν beliebig sind.

Differentialgleichungen 1. Ordnung mit x_1, x_2, x_3, x_4 als unabhängigen Variablen verwandelt, und diese Gleichungen müssen ∞^2 gemeinsame Lösungen besitzen. Alle diese gemeinsamen Lösungen werden erste Integrale der partiellen Differentialgleichung 2. O., und hierauf beruht eben die Integration derselben.

Es werden ferner alle partiellen Differentialgleichungen 2. O. aufgestellt, deren Linienflächen einer und derselben beliebigen Congruenz des Complexes (4) zugehören, und ihr gegenseitiges Verhältniss untersucht; es wird gezeigt, dass die Gleichungen $F=c$, $F_1=c$, $F_2=c$, $\Phi=c$, $\Psi=c$, der Flächentransformation (3) zu (einer Gruppe in) einer und derselben Congruenz gehören. Auch wird bemerkt, dass die ersten Integrale einer solchen partiellen Differential-Gleichung 3. O., die, wie die oben betrachtete, sowohl erste als auch zweite Integrale zu einer grösstmöglichen Zahl besitzt, durch partielle Differential-Gleichungen 2. Ordnung ausgedrückt sind, die einer und derselben Congruenz angehören.

Zum Schluss wird das Problem von der Ermittelung der ersten Integrale einer partiellen Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit einer beliebigen Zahl von Variablen erledigt.

A. V. Bäcklund.

A. V. Bäcklund: Ueber partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung, die intermediäre erste Integrale besitzen. (Zweite Abhandlung. Math. Annalen Bd. XIII. p. 69—108.)

Diese zweite Abhandlung beschäftigt sich gerade so wie die eben angezeigte, sowohl mit der mehrdeutigen Flächentransformation (3)*), als auchmit den partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Die mehrdeutige Flächentransformation (3) ist in der ersten Abhandlung auf die Figuren in (ZXY) als primäre angewandt worden. Hier wird die Bestimmung derjenigen Figuren in (ZXY), die den Figuren in (zxy) entsprechen, an einigen Beispielen durchgeführt. — So stellt sich die partielle Differentialgleichung 1. O. $F(z,x,y,p,q)=0$ als Bild einer Configuration in (ZXY) dar, die analytisch durch zwei partielle Differentialgleichungen 2. O. definirt ist, die einem jeden Werthsysteme von (Z, X, Y, P, Q) einen gewissen gemeinsamen charakteristischen Streifen zuordnen.*) Je zwei Streifen,

*) Man vergleiche das vorangehende Referat.

**) Ein charakteristischer Streifen einer partiellen Differentialgleichung 2. O.

die bestimmt sind: der eine durch ein beliebiges Werthsystem (Z, X, Y, P, Q), der andere durch ein solches Werthsystem $(Z + dZ, X + dX, Y + dY, P + dP, Q + dQ)$ für welches $dZ = PdX + QdY$, $dP = RdX + SdY$, $dQ = SdX + TdY$, — unter R, S, T ein Werthsystem der zweiten Differentialquotienten von Z vestanden, das beide Gleichungen 2. O. erfüllt, — werden Streifen einer und derselben Fläche sein. In Folge dessen haben die beiden Gleichungen 2. O. eine unbegränzt unendliche Schaar **) von Integralflächen gemeinsam. Diese maçhen die Bilder der Integralflächen von $F(z, x, y, p\, q) = 0$ aus.

Dieses Paar von Gleichungen 2. O. gehört derjenigen Gattung von Gleichungspaaren an, die jedem gemeinsamen Werthsysteme von (z, x, y, p, q, r, s, t) ***) einen Streifen zuordnen, der ein für beide Gleichungen charakteristischer Streifen ist. Je zwei Gleichungen 2. O., die ein solches Paar bilden, haben unbegränzt unendlich viele Integralflächen gemein; und die Gleichungen 2. O. sind als erste Integrale verschiedener Schaaren einer und derselben partiellen Differential-Gleichung 3. O., die in den dritten Differentialquotienten (u, v, w, ω) von z von folgender Form ist:

$$Au + Bv + Cw + D\omega + E + F(uw - v^2) + G(u\omega - vw) + H(v\omega - w^2) = 0,$$

aufzufassen. Es werden nun, und das ist der Hauptgegenstand der Abhandlung, diejenigen partiellen Differential-Gleichungen höherer Ordnung untersucht, die solche erste Integrale besitzen, die durch partielle Differential-Gleichungen nächstniederer Ordnung von folgender Form sich ausdrücken:

(a) eine arb. Function von $(f_1(zxypqrst\ldots.), f_2(zxypqrst\ldots.)) = 0$, wo f_1, f_2 determinirte Functionen bezeichnen.

Folgender Satz wird (S. 98) beweisen:

Eine lineare partielle Differentialgleichung n. Ordnung kann n verschiedene Schaaren von ersten Integralen, jede Schaar durch eine

---

$F(Z, X, Y, P, Q, R, S, T) = 0$ wird analytisch durch folgendes Gleichungsystem definirt: $\frac{dY}{dX} = u$, $F'(R)u^2 - F'(S)u + F'(T) = 0$, $dZ = (P + Qu)\,dX$, $dP = (R + Su)\,dX$, $dQ = (S + Tu)\,dX$, $dR = (\frac{d^3Z}{dX^3} + \frac{d^3Z}{dX^2dY}u)\,dX$, etc. — für $R, S, T, \frac{d^3Z}{dX^3}$ etc. Werthe gesetzt, die der Gleichung $F = 0$ und ihren Derivirten in Bez. auf X, Y genügen. — Der Streifen wird geometrisch als ein unendlich schmales Stück von endlicher oder unendlicher Länge einer Fläche aufgefasst. Der Name rührt, wenn ich nicht irre, von Klein her.

**) Die Schaar wird als eine unbegränzt unendliche bezeichnet, weil sie eine arbiträre Function enthält.

***) Statt der grossen Buchstaben wende ich jetzt die kleinen an.

Gleichung (a) ausgedrückt, besitzen. Es ist möglich, das $n-k$ erste, zu $n-k$ verschiedenen Schaaren zugehörende Integrale ein durch eine partielle Differential-Gleichung k. O. ausgedrücktes Integral gemein haben. Wenn $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$ solche erste Integrale der partiellen Differential-Gleichung n. O. bezeichnen, die in je einer der übriggebliebenen k Integralschaaren enthalten sind, so steht die genannte partielle Differential-Gleichung k. O. in folgender Beziehung zu ihnen. Sie hat mit der Gleichung $n-1$ O., durch die irgend eins der φ ausgedrückt ist, unbegränzt unendlich viele Integralflächen gemein, und zwar so dass jedem gemeinsamen Werthsysteme von (z, x, y, p, q, r, s, t, 3te ... $n-1$ste Diffqu. v. z) der beiden Gleichungen k. und $n-1$. Ordnung charakteristische Richtungen zugeordnet werden, von denen $k-1$ für beide Gleichungen gemeinsame charakteristische Richtungen sind. Mit je $k-1$ der Gleichungen $n-1$. Ordnung, durch welche $k-1$ der φ ausgedrückt sind, hat die Gleichung k. O. ebenfalls unbegränzt unendlich viele Integralflächen gemein. Es giebt zu jedem gemeinsamen Werthsysteme von (z, x, y, p, q, 2te ... $n-1$ste Diffqu. v. z) der k Gleichungen einen ganz bestimmten charakteristischen Streifen. In Folge dessen wird die Bestimmung der genannten Integralflächen durch Systeme von $\varkappa$ gewöhnlichen Differentialgleichungen mit $\varkappa + 1$ Variablen erzielt. — Die analytischen Bedingungen einer solchen Gleichung k. O. werden ebenfalls (S. 98 die zweite Note) angegeben.

Die Beziehung dieser Untersuchung zu der von Darboux in den Comptes rendus etc. *T. LXX* dargelegten Theorie ist in der Abhandlung erwähnt.

Auch wird einer Erweiterung auf den Fall von n unabhängigen Variablen gedacht. A. V. Bäcklund.

A. V. Bäcklund: Ueber Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. (Math. Annalen. Bd. XI.)

Ausgehend von der Theorie der Lie'schen Berührungstransformationen erledigt der Verfasser das folgende Pfaff'sche Problem. Es sei vorgelegt das Gleichungssystem

$$(A)\qquad \begin{cases} f(z x_1 \ldots x_n p_1 \ldots p_n) = 0, \\ f_1(\qquad\qquad) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n-1}(\qquad\qquad) = 0, \end{cases}$$

man verlangt die Reduction des auf dasselbe sich beziehenden

Differentialausdrucks: $dz - p_1 dx_1 - \cdots p_n dx_n$ auf eine Form $U_1 du_1 + U_2 du_2 + \cdots$ mit der kleinstmöglichen Anzahl von Gliedern. Durch das Gleichungssystem $u_1 = C$, $u_2 = C$ etc. wird eine Integralmannigfaltigkeit der grösstmöglichen Dimensionszahl des Systemes (A) repräsentirt. In Zummenhange hiermit wird die allgemeinste Transformation angegeben, die das System (A) in irgend ein anderes System von P. Gleichungen 1. Ordnung so überführt, dass zu gleicher Zeit die Integralmannigfaltigkeiten grösstmöglicher Dimensionszahl des einen in die des anderen übergehen. A. V. Bäcklund.

A. V. Bäcklund: Zur Theorie der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. (Math. Annalen Bd. XIII.)

Der Verfasser giebt eine Erweiterung der für partielle Gleichungen 2. O. mit zwei unabhängigen Variablen bekannten Charakteristikentheorie auf partielle Gleichungen 2. Ordnung mit n unabhängigen Variablen. — Zum Schluss findet sich der Satz: Zwei partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung mit n unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots x_n$, von deren ersten Derivirten in Bezug auf $x_1 \ldots x_n$, die eine eine algebraische Folge der anderen ist, haben Integrale $z = \varphi(x_1, \ldots x_n)$ zu einer unbegränzt unendlichen Zahl gemein. Diese Integrale sind von, für beide Gleichungen gemeinsamen charakteristischen M_1 erzeugt.

Eine M_1 wird analytisch definirt durch ein Gleichungssystem von der Form:

$$(\alpha) \qquad dz = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \ldots p_n\, dx_n,$$

$$(\beta) \qquad dp_i = p_{i1}\, dx_1 + p_{i2}\, dx_2 + \ldots p_{in}\, dx_n,$$

$$(\gamma) \qquad dp_{ik} = p_{ik1}\, dx_1 + p_{ik2}\, dx_2 + \ldots . p_{ikn}\, dx_n,$$

wo jedes $\frac{dx_i}{dx_n}$ eine determinirte Function von (z, x, p_i, p_{ik}) ist, und unter p_i, p_{ik}, p_{ikl} die Differentialquotienten $\frac{dz}{dx_i}, \frac{d^2z}{dx_i\, dx_k}, \frac{d^3z}{dx_i\, dx_k\, dx_l}$, verstanden werden. Sie heisst eine für eine partielle Differential-Gleichung 2. Ordnung charakteristische M_1, falls, — wenn für die in ihren Gleichungen stehenden p_{ik} Werthe gesetzt werden, die der Gleichung 2. O. genügen, — alle Werthe der p_{ikl}, die die Gleichungen (γ) erfüllen, auch den ersten Derivirten der Gleichung 2. O. in Bez. auf $x_1, \ldots x_n$ genügen.

Lund. A. V. Bäcklund.

V. Schlegel. Hermann Grassmann. Sein Leben und seine Werke. (Leipzig. Brockhaus. 1878. M. 2. —.)

Versuch einer biographischen Darstellung, in welcher der Entwickelungsgang der mathematischen Studien Grassmanns verfolgt, und dargelegt wird, wie die Entdeckungen auf dem Gebiete der Ausdehnungslehre ihn veranlassten, seinem theologischen Berufe zu entsagen, wie der Mangel an Anerkennung seitens der Mathematiker ihn später den Sanskrit-Studien zuführte, und wie er erst in den letzten Jahren seines Lebens, in Folge des Umschwungs in der Beurtheilung seiner mathematischen Verdienste, zur Mathematik zurückkehrte. Es wird ausserdem gezeigt, wie auch einige wichtige physicalische Entdeckungen, die er schon in früheren Jahren veröffentlicht, unbeachtet blieben, und ebenfalls erst in der neuesten Zeit ans Licht gezogen, resp. von anderer Seite bestätigt wurden.

V. Schlegel. Lehrbuch der elementaren Mathematik. Erster Theil: Arithmetik und Combinatorik. (Wolfenbüttel. Zwissler. 1878. M. 2. 40.)

Auf dem Gebiete der Elementar-Mathematik hat die Literatur der letzten Jahrzehnte in pädagogischer Hinsicht die mannigfachsten Fortschritte aufzuweisen; gleichwohl ist, wie allseitig anerkannt, der gegenwärtige Stand dieses Fundamentes der Mathematik noch kein befriedigender, weil die wissenschaftliche Ausbildung desselben nur geringe Fortschritte gemacht hat. Den neuerdings mehrfach unternommenen Versuchen, diesem Mangel abzuhelfen, reiht sich, jedoch auf wesentlich neuen Principien beruhend, das oben genannte Buch an, in welchem die scheinbare Einfachheit der Euclid'schen Darstellungsweise durch die wahre Einfachheit des genetischen Verfahrens, und die Gruppirung des Stoffes nach äusserlichen Rücksichten durch Vertheilung desselben in ein logisch gegliedertes System ersetzt werden soll. Im Wesentlichen aus längerer Schulpraxis hervorgegangen, umfasst das Buch den Lehrstoff der höheren Schulen, zieht aber die Grenzen der Elemente mitunter etwas weiter. In erster Linie zum Schulbuch bestimmt, wird es auch dem Studirenden nützlich sein, insofern es ihn die Elemente von einer ebenso wissenschaftlichen Seite erfassen lehrt, wie er sie in den Darstellungen der höheren Mathematik kennen lernt. Dass aber der künftige Lehrer der Mathematik auch auf diesem elementaren Gebiete seine Studien mache, ist unerlässlich, wenn nicht noch auf

unabsehbare Zeit hinaus im mathematischen Unterrichte weitaus der meisten Schulen alles beim alten bleiben soll. — Hinsichtlich der speciellen Eigenthümlichkeiten des ersten Theiles wird an dieser Stelle auf den von der Verlagshandlung versendeten Prospect verwiesen.

Waren. V. Schlegel.

L. Koenigsberger: Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale. (Teubner 1878.)

Nachdem ich in den letzten Jahren eine Reihe von Arbeiten über die Theorie der hyperelliptischen Integrale veröffentlicht habe, welche die behandelten Gegenstände theils nur kurz und mit Voraussetzung von Verallgemeinerungen früher gegebener Sätze darstellten, theils auch nur die Resultate einzelner Untersuchungen brachten, hielt ich es für zweckmässig, meine Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale in zusammenhängender Darstellung zu veröffentlichen, um einerseits auch der Theorie der Integrale an sich und den mit ihnen zusammenhängenden Problemen der Integralrechnung einige Aufmerksamkeit zuzuwenden, andererseits aber auch dieselbe als Basis für eine grössere und eingehendere Bearbeitung der Theorie der hyperelliptischen Functionen benutzen zu können.

Ich will im Folgenden den Inhalt der einzelnen Vorlesungen skizziren und auf die über dieselben Gegenstände angestellten Untersuchungen anderer Mathematiker hinweisen.

Die gesammte Darstellung legt die von Riemann eingeführten Vorstellungen und allgemeinen Sätze aus der Theorie der Functionen, soweit sie in meiner Einleitung zu den „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen“ auseinandergesetzt worden, zu Grunde und ist in ihrem ersten Theile nur eine unmittelbare Verallgemeinerung der dort für elliptische Integrale entwickelten Sätze.

Nachdem in der ersten Vorlesung gezeigt worden, dass, wenn $R(z)$ ein Polynom $2p+1^{\text{ten}}$ oder $2p+2^{\text{ten}}$ Grades bedeutet, sich jede wie $\sqrt{R(z)}$ verzweigte Function rational aus z und $\sqrt{R(z)}$ zusammensetzen lässt, wird die Frage aufgeworfen, ob man für eine zu bildende, in z und $\sqrt{R(z)}$ rationale Function die Unstetigkeiten, welche für gewisse Punkte nur auf einem, für andere auf beiden Blättern stattfinden können, in ihrer Anzahl und Lage beliebig an-

nehmen kann, und man findet, dass, wenn die Function in ϱ Unstetigkeitspunkten in nur einem Blatte von der

$$m_1, m_2, \ldots m_\varrho^{\text{ten}}$$

Ordnung, in σ Unstetigkeitspunkten auf dem einen Blatte von der

$$n_1, n_2, \ldots n_\sigma^{\text{ten}},$$

auf dem andern Blatte von der

$$\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\sigma^{\text{ten}}$$

Ordnung, ferner in den Verzweigungspunkten von der

$$\frac{k_1}{2}, \frac{k_2}{2}, \ldots \frac{k_{2p+1}}{2}, \frac{k_{2p+2}}{2}^{\text{ten}}$$

Ordnung unendlich sein soll, worin, wenn das Polynom $R(z)$ vom $2p+1^{\text{ten}}$ Grade ist, $k_{2p+2}=0$ zu setzen ist, wenn die Function endlich der Bedingung unterworfen wird, dass sie im unendlich entfernten Punkte, wenn $R(z)$ vom $2p+2^{\text{ten}}$ Grade ist, auf dem einen Blatte vom τ_1^{ten}, auf dem andern von der τ_2^{ten} Ordnung unendlich wird, während sie, wenn $R(z)$ vom $2p+1^{\text{ten}}$ Grade ist, in dem unendlich entfernten Verzweigungspunkte von der $\frac{k}{2}^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich werden soll, — als nothwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer in z und $\sqrt{R(z)}$ rationalen und in der verlangten Weise unstetigen Function die folgenden:

I. wenn $R(z)$ vom $2p+2^{\text{ten}}$ Grade,

$$\sum_1^\varrho {}_r\, m_r + \sum_1^\sigma {}_r\, n_r + \sum_1^{2p+2} {}_r \left(\frac{k_r+1}{2}\right) + \tau_1 - p - 1 \geqq 0,$$

II. wenn $R(z)$ vom $2p+1^{\text{ten}}$ Grade,

$$\sum_1^\varrho {}_r\, m_r + \sum_1^\sigma {}_r\, n_r + \sum_1^{2p+1} {}_r \left(\frac{k_r+1}{2}\right) + \begin{cases} \left(\frac{k}{2}\right) - p - 1 & \text{wenn } k \text{ gerade,} \\ \left(\frac{k}{2}\right) - p & \text{wenn } k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

worin

$$\left(\frac{k_r+1}{2}\right)$$

die grösste in $\frac{k_r+1}{2}$ enthaltene ganze Zahl bedeutet.

Am Schlusse der Vorlesung wird die bekannte Umformung einer in ζ und $\sqrt{\varphi(\zeta)}$ rationalen Function, in welcher $\varphi(\zeta)$ ein Polynom vom $2p+2^{\text{ten}}$ Grade ist, in eine rationale Function von z und $\sqrt{R(z)}$ gegeben, worin $R(z)$ ein ganzes Polynom des $2p+1^{\text{ten}}$ Grades darstellt.

Die zweite Vorlesung beschäftigt sich unter Annahme eines unpaaren Grades $2p+1$ von $R(z)$ mit der Aufstellung der hyperelliptischen Integrale erster, zweiter und dritter Gattung nach den von Riemann für diese drei Gattungen gegebenen Definitionen, und man findet für die stets endlich bleibenden Integrale die schon von Jacobi hervorgehobenen Formen der Integrale erster Gattung

$$\int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}, \int \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}}, \ldots \int \frac{z^{p-1}dz}{\sqrt{R(z)}},$$

für das im Punkte z_1, $\varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}$, worin ε_1 die positive oder negative Einheit bedeutet, und nur in diesem algebraisch von der ersten Ordnung unendlich werdende Integral zweiter Gattung

$$E(z) = M\int \left[\frac{1}{(z-z_1)^2} + \frac{\frac{R'(z_1)}{2\varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}(z-z_1) + \varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}{(z-z_1)^2\sqrt{R(z)}}\right] dz + J(z),$$

worin M eine willkürliche Constante, und $J(z)$ das allgemeine hyperelliptische Integral erster Gattung bedeutet; endlich stellt sich das Integral dritter Gattung, welches für zwei beliebig gewählte Punkte der Fläche z_1 und z_2 logarithmisch unendlich wird und zwar wie die Unstetigkeitsfunctionen

$$A_1 \log(z-z_1) \text{ und } -A_1 \log(z-z_2),$$

in der Form dar

$$\Pi(z) = M\int \left[\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} + \frac{\frac{\varepsilon_2 R(z_2)^{\frac{1}{2}}}{z_2-z_1}(z-z_1) + \frac{\varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}{z_1-z_2}(z-z_2)}{(z-z_1)(z-z_2)\sqrt{R(z)}}\right] dz + J(z)$$

oder

$$\Pi(z) = M\int \left[\frac{R(z)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}{z-z_1} - \frac{R(z)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_2 R(z_2)^{\frac{1}{2}}}{z-z_2}\right] \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + J(z),$$

und das specielle Integral dritter Gattung, in welchem

$$M = \frac{z_1 - z_2}{2},$$

oder in welchem die Coefficienten der logarithmischen Glieder die positive oder die negative Einheit sind, wird das hyperelliptische Hauptintegral dritter Gattung genannt.

Die Form des Integrals zeigt unmittelbar, dass, wie Riemann für alle Abel'schen Integrale hervorhebt, und Weierstrass schon früher für die hyperelliptischen Integrale ausgesprochen, dass sich das allgemeine hyperelliptische Integral zweiter Gattung mit dem Discontinuitätspunkte erster Ordnung z_1 von einem Integrale erster

Gattung abgesehen als das Product einer Constanten in den nach z_1 genommenen Differentialquotienten eines hyperelliptischen Hauptintegrales dritter Gattung darstellen lässt, dessen zweiter logarithmischer Unstetigkeitspunkt ein völlig willkürlicher ist.

Aus diesen Integralen der drei Gattungen wird in der dritten Vorlesung die analytische Form desjenigen hyperelliptischen Integrales hergeleitet, welches in den ν Punkten $z_1, z_2, \ldots z_\nu$ und zwar in z_α wie

$$A_\alpha \log(z - z_\alpha) + B_\alpha(z - z_\alpha)^{-1} + C_\alpha(z - z_\alpha)^{-2} + \cdots + K_\alpha(z - z_\alpha)^{-k_\alpha}$$

unendlich wird, wobei die zur Existenz eines hyperelliptischen Integrales nothwendige Bedingung, wie sie Riemann für alle Abel'schen Integrale gibt,

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu = 0$$

vorausgesetzt wird; es bleiben in dem aus hyperelliptischen Integralen dritter Gattung und deren nach den Unstetigkeitspunkten genommenen Differentialquotienten der verschiedenen Ordnungen noch die Coefficienten der oben aufgestellten Fundamentalintegrale erster Gattung unbestimmt, und es wird gezeigt, dass man diese Coefficienten so bestimmen kann, dass das hyperelliptische Integral gegebene reelle Theile der $2p$ Periodicitätsmoduln oder gegebene p Periodicitätsmoduln an den a- oder an den b-Querschnitten besitzt; zugleich folgt aber auch, dass jede andere Function, welche alle diese Eigenschaften, welche die Unstetigkeitswerthe und Periodicitätsmoduln betreffen, mit dem hyperelliptischen Integrale gemein hat, sich von eben diesem Integrale nur um eine additive Constante unterscheiden kann. Dieser Satz ist für die vorgelegte Fläche die Darstellung und wirkliche Ausführung des von Riemann in die Functionentheorie eingeführten Dirichlet'schen Princips.

Nachdem noch die Form der in den Verzweigungspunkten algebraisch und logarithmisch unendlich werdenden Integrale aufgestellt worden, wird noch eine in dem oben gegebenen Beweise des Dirichlet'schen Princips gebliebene Lücke ausgefüllt, nämlich der Nachweis des Satzes, dass die Determinante des zur Bestimmung der Coefficienten der ersten Integrale aufgestellten linearen Gleichungssystems nicht verschwinden kann, und zwar wird, wie Riemann ebenfalls für alle Abel'schen Integrale nachgewiesen und Neumann für die hyperelliptischen Integrale ausgeführt hat, gezeigt, dass, wenn die Periodicitätsmoduln eines hyperelliptischen Integrales erster Gattung

$$\int \frac{C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots + C_{p-1} z^{p-1}}{\sqrt{R(z)}}\, dz$$

an den Querschnitten a_k in bestimmter Ueberschreitungsrichtung mit $\alpha_k + \gamma_k i$, an den Querschnitten b_k mit $\beta_k + \delta_k i$ bezeichnet werden, die Ungleichheit besteht

$$\sum_1^p (\alpha_\nu \delta_\nu - \beta_\nu \gamma_\nu) > 0.$$

Endlich werden in dieser Vorlesung noch die Periodicitätsmoduln durch Integrale, welche zwischen den Verzweigungspunkten auf der einfach zusammenhängenden Riemann'schen Fläche oder gradlinig zwischen diesen verlaufen, ausgedrückt, wie es zuerst von Prym in seiner „Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche" geschehen.

Die vierte Vorlesung beschäftigt sich mit der Reduction der allgemeinen hyperelliptischen Integrale auf drei Arten von Normalintegralen nach der von Weierstrass für elliptische Integrale in seinen Vorlesungen angegebenen Methode und führt, wenn $z_1, z_2, \ldots z_n$ die Unstetigkeitspunkte der Function $F(z)$ bedeuten, zu dem Resultate

$$\int \frac{F(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

$$= C_1 \int \frac{\sqrt{R(z_1)}\,dz}{(z-z_1)\sqrt{R(z)}} + C_2 \int \frac{\sqrt{R(z_2)}\,dz}{(z-z_2)\sqrt{R(z)}} + \cdots + C_n \int \frac{\sqrt{R(z_n)}\,dz}{(z-z_n)\sqrt{R(z)}}$$

$$+ l^{(0)} \int \frac{z^{2p-1}\,dz}{\sqrt{R(z)}} + l^{(1)} \int \frac{z^{2p-2}\,dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + l^{(p-1)} \int \frac{z^p\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

$$+ k^{(p)} \int \frac{z^{p-1}\,dz}{\sqrt{R(z)}} + k^{(p+1)} \int \frac{z^{p-2}\,dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + k^{(2p-1)} \int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$$

$$+ f(z)\sqrt{R(z)},$$

worin

$$\int \frac{z^{p-\alpha}\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

ein Integral erster Gattung,

$$\int \frac{z^{p+\alpha}\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

ein im unendlich entfernten Verzweigungspunkte von der $2\alpha + 1^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich werdendes Integral, endlich

$$\int \frac{dz}{(z-z_\varrho)\sqrt{R(z)}}$$

ein in $z = z_\varrho$ und zwar auf beiden Blättern logarithmisch unendlich werdendes Integral bedeutet; die Coefficienten der obigen Normalintegrale sind mit Anwendung des bekannten Zeichens für den Coefficienten einer bestimmten Potenz einer Reihenentwicklung durch die Ausdrücke bestimmt:

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} = C_\alpha$$

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} = l_\alpha^{(r)}, \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = l_0^{(r)},$$

worin $r = 0, 1, \ldots p-1$,

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} = k_\alpha^{(r)}, \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = k_0^{(r)},$$

wenn $r = p, p+1, \ldots 2p-1$, ferner

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} = f_\alpha(z), \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = f_0(z),$$

wenn

$$l_1^{(r)} + l_2^{(r)} + \cdots + l_n^{(r)} - l_0^{(r)} = l^{(r)}$$

$$k_1^{(r)} + k_2^{(r)} + \cdots + k_n^{(r)} - k_0^{(r)} = k^{(r)}$$

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) - f_0(z) = f(z)$$

gesetzt wird, und

$$R(z) = A_0 z^{2p+1} + B_0 z^{2p} + B_1 z^{2p-1} + \cdots + B_{2p-1} z + B_{2p},$$

$$F_r(t) = \frac{2p-2r-1}{2} A t^r + \frac{2p-2r}{2} B_0 t^{r-1} + \frac{2p-2r+1}{2} B_1 t^{r-2} + \cdots$$
$$+ \frac{2p-r-2}{2} B_{r-2} t + \frac{2p-r-1}{2} B_{r-1}$$

ist.

Eine genauere Discussion der Coefficienten der Normalintegrale führt zu dem Resultat, dass, wenn z_α einer der Verzweigungswerthe ist, $C_\alpha = 0$ wird, dass ferner das vorgelegte Integral gar kein Integral erster Gattung enthält, wenn $F(z)$ für keine Wurzel von $R(z)$ unendlich wird, in seinen Discontinuitätspunkten von der ersten Ordnung unendlich gross und zu gleicher Zeit echt gebrochen ist, dass ferner die in den Verzweigungswerthen algebraisch unendlich werdenden in der obigen Reductionsformel vorkommenden Normal-

integrale fehlen, wenn $F(z)$ für keine Lösung von $R(z)$ unendlich wird, für seine Discontinuitätspunkte von der ersten Ordnung unendlich gross, und der Grad des Zählers kleiner ist als der um p Einheiten vermehrte Grad des Nenners, dass endlich $f(z)$ eine rationale Function von z und z_α darstellt, welche verschwindet, wenn $F(z)$ in z_α von der ersten Ordnung unendlich wird, während die rationale Function $f_0(z)$ Null wird, wenn der Grad des Zählers nicht mindestens den des Nenners um die Zahl $2p$ übertrifft.

Endlich wird noch auf Grund dieser Reductionsformel eine für alle hyperelliptischen Integrale geltende Beziehung abgeleitet, die von Hermite und Thomae für die elliptischen Integrale erkannt worden, wonach, wenn

$$\int\frac{z^n dz}{\sqrt{R(z)}} = l_n^{(0)}\int\frac{z^{2p-1}dz}{\sqrt{R(z)}} + l_n^{(1)}\int\frac{z^{2p-2}dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + l_n^{(p-1)}\int\frac{z^p dz}{\sqrt{R(z)}}$$
$$+k_n^{(p)}\int\frac{z^{p-1}dz}{\sqrt{R(z)}} + k_n^{(p+1)}\int\frac{z^{p-2}dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + k_n^{(2p-1)}\int\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$$
$$+ f_n(z)\sqrt{R(z)}$$

gesetzt wird, zwischen den Coefficienten l und k dieser Reductionsformel und den Coefficienten der um den unendlich entfernten Punkt gültigen Reihenentwicklung bestimmter Integrale die Beziehung besteht: wenn $r = 0, 1, 2, \ldots p-1$

$$\int_\infty^t\frac{F_r(t)dt}{\sqrt{R(t)}} = -(t^{r-2p} + m_1 t^{r-2p-1} + \cdots + m_{r-1}t^{-2p})\sqrt{R(t)}$$
$$-\sqrt{R(t)}\sum_0^\infty{}' l_{2p+\nu}^{(r)} t^{-2p-\nu-1}$$

und, wenn $r = p, p+1, \ldots 2p-1$,

$$\int_\infty^t\frac{F_r(t)dt}{\sqrt{R(t)}} = -(n_0 t^{r-2p} + n_1 t^{r-2p-2} + \cdots + n_{r-1}t^{-2p})\sqrt{R(t)}$$
$$-\sqrt{R(t)}\sum_0^\infty{}' k_{2p-\nu}^{(r)} t^{-2p-\nu-1}.$$

Am Schlusse der Vorlesung wird das hyperelliptische Integral durch die lineare Transformation

$$\zeta = \frac{z-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}$$

in die Form

$$\int F\left(\zeta, \sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\varkappa_1^2\zeta)(1-\varkappa_2^2\zeta)\cdots(1-\varkappa_{2p-1}^2\zeta)}\right)d\zeta$$

umgesetzt.

Die von Legendre aufgestellte Beziehung zwischen den Periodicitätsmoduln der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung wurde bekanntlich von Weierstrass für alle hyperelliptischen Integrale erweitert, und Riemann führte zur Herleitung einer Beziehung für die Perioden der Abel'schen Integrale erster Gattung die Methode der Integration von

$$\int w\,dw'$$

ein, worin w und w' Abel'sche Integrale erster Gattung bedeuten, und die Integration über die gesammte Begränzung der Riemann'schen Fläche auszuführen ist; Clebsch und Gordan dehnen diese Methode auf zwei Integrale dritter Gattung aus, um unter anderem den Satz von der Vertauschung der Parameter und Unstetigkeitswerthe herzuleiten. In der fünften Vorlesung werden zwei allgemeine hyperelliptische Integrale

$$J(z,\ z_\alpha) \text{ und } J(z,\ \zeta_\alpha)$$

zu Grunde gelegt, von denen das erste in den Punkten

$$\mathfrak{z}_1,\ \mathfrak{z}_2,\ \ldots\ \mathfrak{z}_\mu,\ z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_m,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_{2p+1},\ \infty$$

unendlich werden soll, wie die Functionen

$$\mathfrak{A}_\varrho \log(z-\mathfrak{z}_\varrho) + \mathfrak{B}_\varrho(z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-1} + \mathfrak{C}_\varrho(z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-2} + \cdots + \mathfrak{K}_\varrho(z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-\mathfrak{l}_\varrho}$$

$$A_\varrho \log(z-z_\varrho) + B_\varrho(z-z_\varrho)^{-1} + C_\varrho(z-z_\varrho)^{-2} + \cdots + K_\varrho(z-z_\varrho)^{-k_\varrho}$$

$$a_\varrho \log(z-\alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}} + b_\varrho(z-\alpha_\varrho)^{-\frac{1}{2}} + c_\varrho(z-\alpha_\varrho)^{-\frac{2}{2}} + \cdots + h_\varrho(z-\alpha_\varrho)^{-\frac{\lambda_\varrho}{2}}$$

$$M_0 \log z^{\frac{1}{2}} + M_1 z^{\frac{1}{2}} + M_2 z^{\frac{2}{2}} + \cdots + M_\delta z^{\frac{\delta}{2}},$$

das zweite in den Punkten

$$\mathfrak{z}_1,\ \mathfrak{z}_2,\ \ldots\ \mathfrak{z}_\mu,\ \zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots\ \zeta_n,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_{2p+1},\ \infty$$

wie die Functionen

$$\mathfrak{A}'_\varrho \log(z-\mathfrak{z}_\varrho) + \mathfrak{B}'_\varrho(z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-1} + \mathfrak{C}'_\varrho(z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-2} + \cdots + \mathfrak{K}'_\varrho(z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-\mathfrak{l}'_\varrho}$$

$$A'_\varrho \log(z-\zeta_\varrho) + B'_\varrho(z-\zeta_\varrho)^{-1} + C'_\varrho(z-\zeta_\varrho)^{-2} + \cdots + K'_\varrho(z-\zeta_\varrho)^{-k'_\varrho}$$

$$a'_\varrho \log(z-\alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}} + b'_\varrho(z-\alpha_\varrho)^{-\frac{1}{2}} + c'_\varrho(z-\alpha_\varrho)^{-\frac{2}{2}} + \cdots + h'_\varrho(z-\alpha_\varrho)^{-\frac{\lambda'_\varrho}{2}}$$

$$M_0' \log z^{\frac{1}{2}} + M_1' z^{\frac{1}{2}} + M_2' z^{\frac{2}{2}} + \cdots + M'_\delta z^{\frac{\delta'}{2}},$$

und das Integral

$$\int J(z,\ z_\alpha)\, dJ(z,\ \zeta_\alpha)$$

ausgedehnt über die gesammte Begränzung der einfach zusammenhängenden Fläche, welche aus der durch die bekannten Querschnitte

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_p,\ b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_p,\ c_1,\ c_2,\ \ldots\ c_{p-1}$$

zerlegten Riemann'schen Fläche von $\sqrt{R(z)}$ durch neue

$$\mu + m + n + 2p + 2$$

Querschnitte entsteht, welche jeden der die Punkte

$$\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots \mathfrak{z}_\mu, z_1, z_2, \dots z_m, \zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n$$

umschliessenden unendlich kleinen einfachen Kreise und jeden der die Punkte

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2p+1}, \infty$$

umgebenden unendlich kleinen Doppelkreise mit demselben Punkte A der früher erhaltenen Begränzung verbinden.

Man findet, dass, wenn das Resultat der Integration ein endliches sein soll, $J(z, z_\alpha)$ in $\mathfrak{z}_\varrho$ nur algebraisch unendlich werden darf; nimmt man sodann die Entwicklung der Function $J(z, z_\alpha)$ in der Nähe der in Betracht kommenden singulären Punkte in der Form an

$$\mathfrak{A}_\varrho \log(z - \mathfrak{z}_\varrho) + \dots + \mathfrak{K}_\varrho (z - \mathfrak{z}_\varrho)^{-\mathfrak{t}_\varrho} + m_0^{(\varrho)} + m_1^{(\varrho)}(z - \mathfrak{z}_\varrho) + \dots$$
$$+ m_{\mathfrak{t}_\varrho'}^{(\varrho)}(z - \mathfrak{z}_\varrho)^{\mathfrak{t}_\varrho'} + \dots$$

$$A_\varrho \log(z - z_\varrho) + \dots + K_\varrho (z - z_\varrho)^{-\mathfrak{t}_\varrho} + \dots$$

$$p_0^{(\varrho)} + p_1^{(\varrho)}(z - \zeta_\varrho) + p_2^{(\varrho)}(z - \zeta_\varrho)^2 + \dots + p_{k_\varrho'}^{(\varrho)}(z - \zeta_\varrho)^{k_\varrho'} + \dots$$

$$a_\varrho \log(z - \alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}} + \dots + h_\varrho (z - \alpha_\varrho)^{-\frac{\lambda_\varrho}{2}} + \mu_0^{(\varrho)} + \mu_1^{(\varrho)}(z - \alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}} + \dots$$
$$+ \mu_{\lambda_\varrho'}^{(\varrho)}(z - \alpha_\varrho)^{\frac{\lambda_\varrho'}{2}} + \dots$$

$$M_0 \log z^{\frac{1}{2}} + \dots + M_\delta z^{\frac{\delta}{2}} + P_0 + P_1 z^{-\frac{1}{2}} + \dots + P_{\delta'} z^{-\frac{\delta'}{2}} + \dots,$$

die von $J(z, \zeta_\alpha)$ in der Form

$$\mathfrak{A}_\varrho' \log(z - \mathfrak{z}_\varrho) + \dots + \mathfrak{K}_\varrho'(z - \mathfrak{z}_\varrho)^{-\mathfrak{t}_\varrho'} + n_0^{(\varrho)} + n_1^{(\varrho)}(z - \mathfrak{z}_\varrho) + \dots$$
$$+ n_{\mathfrak{t}_\varrho}^{(\varrho)}(z - \mathfrak{z}_\varrho)^{\mathfrak{t}_\varrho} + \dots$$

$$\pi_0^{(\varrho)} + \pi_1^{(\varrho)}(z - z_\varrho) + \pi_2^{(\varrho)}(z - z_\varrho)^2 + \dots + \pi_{k_\varrho}^{(\varrho)}(z - z_\varrho)^{k_\varrho} + \dots$$

$$A_\varrho' \log(z - \zeta_\varrho) + \dots + K_\varrho'(z - \zeta_\varrho)^{-k_\varrho'}$$

$$a_\varrho' \log(z - \alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}} + \dots + h_\varrho'(z - \alpha_\varrho)^{-\frac{\lambda_\varrho'}{2}} + \nu_0^{(\varrho)} + \nu_1^{(\varrho)}(z - \alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}} + \dots$$
$$+ \nu_{\lambda_\varrho}^{(\varrho)}(z - \alpha_\varrho)^{\frac{\lambda_\varrho}{2}} + \dots$$

$$M_0' \log z^{\frac{1}{2}} + \dots + M_{\delta'}' z^{\frac{\delta'}{2}} + P_0' + P_1' z^{-\frac{1}{2}} + \dots + P_\delta' z^{-\frac{\delta}{2}} + \dots,$$

und bezeichnet die Stetigkeitssprünge von

$$J(z,\ z_\alpha) \text{ an } a_k \text{ mit } J_{a_k}, \text{ an } b_k \text{ mit } J_{b_k},$$

von

$$J(z,\ \zeta_\alpha) \text{ an } a_k \text{ mit } I_{a_k}, \text{ an } b_k \text{ mit } I_{b_k},$$

so erhält man die nachfolgende allgemeine Periodenrelation

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\sum_1^p{}_{\nu}(J_{a_\nu}I_{b_\nu}-J_{b_\nu}I_{a_\nu}) = &-\sum_1^{\mu}{}_{\varrho}\Big[n_1^{(\varrho)}\mathfrak{B}_\varrho+2n_2^{(\varrho)}\mathfrak{C}_\varrho+\cdots+\mathfrak{k}_\varrho n_{\mathfrak{k}_\varrho}^{(\varrho)}\mathfrak{K}_\varrho \\
&\quad + m_0^{(\varrho)}\mathfrak{A}'_\varrho - m_1^{(\varrho)}\mathfrak{B}'_\varrho - 2m_2^{(\varrho)}\mathfrak{C}'_\varrho - \cdots - \mathfrak{k}'_\varrho m_{\mathfrak{k}'_\varrho}^{(\varrho)}\mathfrak{K}'_\varrho\Big] \\
&-\sum_1^{n}{}_{\varrho}\Big[p_0^{(\varrho)}A'_\varrho - p_1^{(\varrho)}B'_\varrho - 2p_2^{(\varrho)}C'_\varrho - \cdots - k'_\varrho p_{k'_\varrho}^{(\varrho)}K'_\varrho\Big] \\
&-\sum_1^{m}{}_{\varrho}\Big[\pi_1^{(\varrho)}B_\varrho + 2\pi_2^{(\varrho)}C_\varrho + \cdots + k_\varrho \pi_{k_\varrho}^{(\varrho)}K_\varrho\Big] + \sum_1^m{}_{\varrho} A_\varrho\int_A^{z_\varrho} dJ(z,\ \zeta_\alpha) \\
&-\sum_1^{2p+1}{}_{\varrho}\Big[b_\varrho \nu_1^{(\varrho)} + 2c_\varrho \nu_2^{(\varrho)} + \cdots + \lambda_\varrho h_\varrho \nu_{\lambda_\varrho}^{(\varrho)} \\
&\quad + a'_\varrho \mu_0^{(\varrho)} - b'_\varrho \mu_1^{(\varrho)} - 2c'_\varrho \mu_2^{(\varrho)} - \cdots - \lambda'_\varrho h'_\varrho \mu_{\lambda'_\varrho}^{(\varrho)}\Big] \\
&+\sum_1^{2p+1}{}_{\varrho}\, a_\varrho\int_A^{\alpha_\varrho} dJ(z,\zeta_\alpha) - 2\pi i\sum_1^{2p+1}{}_{\varrho} a'_\varrho(A_1+A_2+\cdots+A_m+a_1+a_2+\cdots+a_{\varrho-1}) \\
&-[P_0M_0'+P_1M_1'+P_2M_2'+3P_3M_3'+\cdots \\
&\quad +\delta' P_{\delta'}M'_{\delta'} - P'_1M_1 - 2P'_2M_2 - \cdots - \delta P'_\delta M_\delta] \\
&-2\pi i M'_0(A_1+A_2+\cdots+A_m+a_1+a_2+\cdots+a_{2p+1}) - M_0\int_A^{\infty} dJ(z,\zeta_\alpha),
\end{aligned}$$

worin, wenn a_ϱ oder M_0 von Null verschieden,

$$a'_\varrho = b'_\varrho = \cdots = h'_\varrho = 0 \quad \text{resp. } M'_0 = M'_1 = \cdots = M'_{\delta'} = 0$$

anzunehmen sind.

Specialisirungen der gefundenen Periodenrelation liefern den Satz, dass zwei Hauptintegrale dritter Gattung, bei denen die Gränzen des einen die Parameter des andern sind, eine nur von den Periodicitätsmoduln abhängige Differenz besitzen, und dass sich ein Hauptintegral, welches an den p Querschnitten $a_1, a_2, \ldots a_p$ den Periodicitätsmodul Null hat, nicht ändert, wenn die Gränzen mit den Unstetigkeitspunkten vertauscht werden, ein schon von Jacobi bewiesenes Theorem.

Für zwei Integrale erster Gattung

$$J^{(\alpha)}(z) = \int \frac{z^{p-\alpha-1}dz}{\sqrt{R(z)}}, \quad J^{(\beta)}(z) = \int \frac{z^{p-\beta-1}dz}{\sqrt{R(z)}}$$

folgt aus der obigen allgemeinen Beziehung die Periodenrelation

$$\sum_{1}^{p} \left(J^{(\alpha)}_{a_\nu} J^{(\beta)}_{b_\nu} - J^{(\alpha)}_{b_\nu} J^{(\beta)}_{a_\nu}\right) = 0,$$

und für Integrale erster und zweiter Gattung, wenn

$$E^{(\alpha)}(z) = \int \frac{z^{p+\alpha}dz}{\sqrt{R(z)}}$$

gesetzt wird, und die Entwicklung der Integrale $J^{(\beta)}(z)$ und $E^{(\alpha)}(z)$ in der Umgebung des unendlich entfernten Punktes in der Form angenommen wird

$$E^{(\alpha)}(z) = M_{2\alpha+1} z^{\frac{2\alpha+1}{2}} + M_{2\alpha-1} z^{\frac{2\alpha-1}{2}} + \cdots + M_1 z^{\frac{1}{2}} + \cdots$$

$$J^{(\beta)}(z) = P'_{2\beta+1} z^{\frac{-2\beta-1}{2}} + P'_{2\beta+3} z^{\frac{-2\beta-3}{2}} + \cdots,$$

also, wenn

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}} = z^{-p-\frac{1}{2}} \{f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \cdots\}$$

gesetzt wird,

$$M_{2\alpha+1} = \frac{2f_0}{2\alpha+1}, \quad M_{2\alpha-1} = \frac{2f_1}{2\alpha-1}, \quad M_{2\alpha-3} = \frac{2f_2}{2\alpha-3}, \cdots$$

$$P'_{2\beta+1} = -\frac{2f_0}{2\beta+1}, \quad P'_{2\beta+3} = -\frac{2f_1}{2\beta+3}, \quad P'_{2\beta+5} = -\frac{2f_2}{2\beta+5}, \cdots$$

ist, die Periodenbeziehung:

I. $\alpha \geqq \beta$

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{1}^{p} \left(E^{(\alpha)}_{a_\nu} J^{(\beta)}_{b_\nu} - E^{(\alpha)}_{b_\nu} J^{(\beta)}_{a_\nu}\right)$$

$$= (2\beta+1)P'_{2\beta+1}M_{2\beta+1} + (2\beta+3)P'_{2\beta+3}M_{2\beta+3} + \cdots + (2\alpha+1)P'_{2\alpha+1}M_{2\alpha+1}$$

und

II. $\alpha < \beta$

$$\sum_{1}^{p} \left(E^{(\alpha)}_{a_\nu} J^{(\beta)}_{b_\nu} - E^{(\alpha)}_{b_\nu} J^{(\beta)}_{a_\nu}\right) = 0.$$

Endlich wird noch der Werth derjenigen Determinante untersucht, welche aus sämmtlichen Periodicitätsmoduln der $2p$ Integrale $J^{(\beta)}(z)$ und $E^{(\alpha)}(z)$ gebildet ist, und der später bei der Reduction

der hyperelliptischen Integrale auf niedere Transcendente zur Anwendung kommt. Dieser Werth ist zuerst von Fuchs für den Fall complexer Verzweigungswerthe von $\sqrt{R(z)}$ mit Hülfe der Differentialgleichungen, welchen die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale genügen, hergeleitet worden, ich wähle hier einen andern Weg, indem ich zuerst zeige, dass die Determinante eine eindeutige Function der Verzweigungswerthe ist, und indem ich nachweise, dass sie nie verschwinden kann, folgt aus einem bekannten Satze der Functionentheorie, dass die Determinante eine constante, von den Verzweigungswerthen unabhängige Grösse ist. Der constante Werth selbst wird, wie auch Fuchs gethan, durch die einfachsten hyperelliptischen Integrale derselben Ordnung also durch die Integrale mit der Irrationalität

$$\sqrt{z^{2p+1}-1}$$

bestimmt werden, und diese Bestimmung führe ich, um eine Anwendung der vorher entwickelten Periodenrelationen zu geben, mit Hülfe der früheren Formeln für die Verbindungen der Perioden der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung aus; es ergiebt sich das für reelle Verzweigungswerthe schon längst bekannte Resultat

$$\begin{vmatrix} J^{(0)}_{b_1} & J^{(0)}_{a_1} & J^{(0)}_{b_2} & J^{(0)}_{a_2} & \dots & J^{(0)}_{b_p} & J^{(0)}_{a_p} \\ J^{(1)}_{b_1} & J^{(1)}_{a_1} & J^{(1)}_{b_2} & J^{(1)}_{a_2} & \dots & J^{(1)}_{b_p} & J^{(1)}_{a_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ J^{(p-1)}_{b_1} & J^{(p-1)}_{a_1} & J^{(p-1)}_{b_2} & J^{(p-1)}_{a_2} & \dots & J^{(p-1)}_{b_p} & J^{(p-1)}_{a_p} \\ E^{(p)}_{b_1} & E^{(p)}_{a_1} & E^{(p)}_{b_2} & E^{(p)}_{a_2} & \dots & E^{(p)}_{b_p} & E^{(p)}_{a_p} \\ E^{(p+1)}_{b_1} & E^{(p+1)}_{a_1} & E^{(p+1)}_{b_2} & E^{(p+1)}_{a_2} & \dots & E^{(p+1)}_{b_p} & E^{(p+1)}_{a_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ E^{(2p-1)}_{b_1} & E^{(2p-1)}_{a_1} & E^{(2p-1)}_{b_2} & E^{(2p-1)}_{a_2} & \dots & E^{(2p-1)}_{b_p} & E^{(2p-1)}_{a_p} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{\frac{p}{2}} 2^{3p} \pi^p}{1.3\ldots(2p-1)}.$$

Die sechste Vorlesung behandelt das Abel'sche Theorem der hyperelliptischen Integrale zunächst für Integrale erster und dritter Gattung und leitet hieraus mit Hülfe der in der dritten Vorlesung ausgeführten Bildungsweise des allgemeinen Integrales aus den Integralen dieser beiden Gattungen den Abel'schen Satz in der nachfolgenden Form ab: Bezeichnet

$$J(z, c_1, c_2, \dots c_\nu)$$

ein hyperelliptisches Integral, welches in c_ϱ unendlich wird wie

$$A_\varrho \log(z-c_\varrho) + B_\varrho(z-c_\varrho)^{-1} + C_\varrho(z-c_\varrho)^{-2} + \cdots + M_\varrho(z-c_\varrho)^{-m_\varrho},$$

so wird sich die Summe von $2m$ solchen gleichartigen hyperelliptischen Integralen, deren obere Gränzen die Lösungen $z_1, z_2, \ldots z_{2m}$ der Gleichung

$$p^2 - q^2 R(z) = 0,$$

und deren untere Gränzen $z_1', z_2', \ldots z_{2m}'$ die Lösungen der Gleichung

$$p_1^2 - q_1^2 R(z) = 0$$

sind, worin p und p_1 beliebige ganze Polynome m^{ten} Grades, q und q_1 beliebige ganze Polynome höchstens vom $m-p-1^{\text{ten}}$ Grade sind, durch den Ausdruck darstellen lassen

$$\begin{aligned}\sum_1^{2m}{}_\alpha \int_{z_\alpha'}^{z_\alpha} dJ(z, c_1, c_2, \ldots c_\nu) = & \sum_1^{\nu}{}_\varrho A_\varrho \log\left\{\frac{p(c_\varrho) - q(c_\varrho)\varepsilon_\varrho\sqrt{R(c_\varrho)}}{p_1(c_\varrho) - q_1(c_\varrho)\varepsilon_\varrho\sqrt{R(c_\varrho)}}\right\} \\ & - \sum_1^{\nu}{}_\varrho B_\varrho \frac{d}{dc_\varrho}\log\left\{\frac{p(c_\varrho) - q(c_\varrho)\varepsilon_\varrho\sqrt{R(c_\varrho)}}{p_1(c_\varrho) - q_1(c_\varrho)\varepsilon_\varrho\sqrt{R(c_\varrho)}}\right\} \\ & - \sum_1^{\nu}{}_\varrho \frac{C_\varrho}{1}\frac{d^2}{dc_\varrho^2}\log\left\{\frac{p(c_\varrho) - q(c_\varrho)\varepsilon_\varrho\sqrt{R(c_\varrho)}}{p_1(c_\varrho) - q_1(c_\varrho)\varepsilon_\varrho\sqrt{R(c_\varrho)}}\right\} \\ & - \cdots - \sum_1^{\nu}{}_\varrho \frac{M_\varrho}{1\cdot 2\cdots(m_\varrho-1)}\frac{d^{m_\varrho}}{dc_\varrho^{m_\varrho}}\log\left\{\frac{p(c_\varrho) - q(c_\varrho)\varepsilon_\varrho\sqrt{R(c_\varrho)}}{p_1(c_\varrho) - q_1(c_\varrho)\varepsilon_\varrho\sqrt{R(c_\varrho)}}\right\},\end{aligned}$$

worin der Werth der zu den einzelnen z-Werthen gehörigen Irrationalität durch die Gleichung

$$\sqrt{R(z)} = \frac{p(z)}{q(z)}$$

bestimmt ist.

In anderer Form lässt sich dieses Resultat auch so aussprechen, dass sich $2m-p$ gleichartige hyperelliptische Integrale zu p eben solchen Integralen vereinigen lassen, deren Gränzen Lösungen von Gleichungen p^{ten} Grades sind, deren Coefficienten rational aus den $2m-p$ willkührlich angenommenen Gränzen und zugehörigen Irrationalitäten zusammengesetzt sind, und deren Irrationalitäten sich mit Hülfe der willkührlich angenommenen Gränzen und Irrationalitäten rational durch die entsprechende Gränze ausdrücken.

Schliesslich wird noch der Fall der gleichen Integralgränzen auf den früheren zurückgeführt.

Nachdem gezeigt worden, dass einer additiven Verbindung gleichartiger hyperelliptischer Integrale eine algebraische Beziehung

zwischen den oberen Gränzen dieser Integrale entsprechen kann, wird in der siebenten Vorlesung die Betrachtung auf die allgemeinsten algebraischen Beziehungen ausgedehnt, welche zwischen hyperelliptischen Integralen überhaupt bestehen können, sie mögen gleichartig oder ungleichartig sein, d. h. zu derselben oder verschiedenen Riemann'schen Flächen gehören, wenn auch zwischen den Gränzen dieser Integrale algebraische Beziehungen stattfinden sollen.

Es wird der Nachweis geführt, dass die allgemeinste Form einer algebraischen Beziehung zwischen n Integralen eine lineare Function dieser Integrale ist, deren Coefficienten constante Grössen sind, vermehrt um eine Grösse, welche von den Integralen frei ist, aber von den unabhängigen Variabeln algebraisch abhängen wird, und diese lineare Beziehung wird nun der weiteren Untersuchung zu Grunde gelegt.

Durch Erweiterung einer von Abel in der Transformationstheorie der elliptischen Integrale angewandten Methode wird gezeigt, dass die Beziehungsgleichung

$$\begin{aligned}
&\int^{z_{2p+1}^{(1)}} F_{2p+1}^{(1)}\left(z, \sqrt{R_{2p+1}^{(1)}(z)}\right) dz \\
&+\int^{z_{2p+1}^{(2)}} F_{2p+1}^{(2)}\left(z, \sqrt{R_{2p+1}^{(2)}(z)}\right) dz + \cdots \\
&+\int^{z_{2p+1}^{(a)}} F_{2p+1}^{(a)}\left(z, \sqrt{R_{2p+1}^{(a)}(z)}\right) dz \\
&+\int^{z_{2p-1}^{(1)}} F_{2p-1}^{(1)}\left(z, \sqrt{R_{2p-1}^{(1)}(z)}\right) dz \\
&+\int^{z_{2p-1}^{(2)}} F_{2p-1}^{(2)}\left(z, \sqrt{R_{2p-1}^{(2)}(z)}\right) dz + \cdots \\
&+\int^{z_{2p-1}^{(b)}} F_{2p-1}^{(b)}\left(z, \sqrt{R_{2p-1}^{(b)}(z)}\right) dz \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
&+\int^{z_3^{(1)}} F_3^{(1)}\left(z, \sqrt{R_3^{(1)}(z)}\right) dz \\
&+\int^{z_3^{(2)}} F_3^{(2)}\left(z, \sqrt{R_3^{(2)}(z)}\right) dz + \cdots \\
&+\int^{z_3^{(r)}} F_3^{(r)}\left(z, \sqrt{R_3^{(r)}(z)}\right) dz \\
&= u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\nu \log v_\nu ,
\end{aligned}$$

in welcher

$$R^{(1)}_{2p+1}(z) = (z-\alpha_1^{(1)})(z-\alpha_2^{(1)}) \cdots (z-\alpha^{(1)}_{2p+1})$$
$$R^{(2)}_{2p-1}(z) = (z-\beta_1^{(2)})(z-\beta_2^{(2)}) \cdots (z-\beta^{(2)}_{2p-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

ferner

$$F(z, \sqrt{R(z)})$$

eine rationale Function von z und $\sqrt{R(z)}$ bedeutet, endlich,

$$u, v_1, v_2, \ldots v_r$$

algebraische Functionen von

$$z^{(1)}_{2p+1} \ldots z^{(\alpha)}_{2p+1}, \quad z^{(1)}_{2p-1} \ldots z^{(\beta)}_{2p-1}, \quad \ldots z_3^{(1)} \ldots z_3^{(r)}$$

vorstellen, reducirt werden kann auf die ihr völlig aequivalente

$$\delta \int^{z^{(1)}_{2p+1}} F^{(1)}_{2p+1}\left(z, \sqrt{R^{(1)}_{2p+1}(z)}\right) dz$$
$$= -\sum_{1}^{p-k} \int^{\zeta^{(\varrho+1)}_{2p-2k+1}} F^{(\varrho+1)}_{2p-2k+1}\left(z, \sqrt{R^{(\varrho+1)}_{2p-2k+1}(z)}\right) dz - \cdots$$
$$-\sum_{1}^{p-k} \int^{\zeta^{(k)}_{2p-2k+1}} F^{(k)}_{2p-2k+1}\left(z, \sqrt{R^{(k)}_{2p-2k+1}(z)}\right) dz$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-\sum_{1}^{1} \int^{\zeta_3^{(1)}} F_3^{(1)}\left(z, \sqrt{R_3^{(1)}(z)}\right) dz - \cdots$$
$$-\sum_{1}^{1} \int^{\zeta_3^{(r)}} F_3^{(r)}\left(z, \sqrt{R_3^{(r)}(z)}\right) dz$$
$$+ U' + B_1' \log V_1' + B_2' \log V_2' + \cdots + B_\varrho' \log V_\varrho',$$

worin die zu je einer Summe gehörigen ζ-Werthe Lösungen von Gleichungen des durch die obere Gränze des Summationszeichens gegebenen Grades sind, deren Coefficienten rational aus den Grössen

$$z^{(1)}_{2p+1} \text{ und } \sqrt{R^{(1)}_{2p+1}(z^{(1)}_{2p+1})}$$

zusammengesetzt sind, und die Irrationalitäten sich mit Hülfe eben dieser Grössen rational durch die zugehörige ζ-Grösse ausdrücken lassen, während

$$U_1', V_1', V_2', \ldots V_\sigma'$$

rationale Functionen eben dieser Grössen sind.

Eine Reihe der eben charakterisirten Werthe, welche einer Gleichung

$$y^\sigma + f_1(z_1, \sqrt{R(z_1)})\,y^{\sigma-1} + \cdots + f_{\sigma-1}(z_1, \sqrt{R(z_1)})\,y + f_\sigma(z_1, \sqrt{R(z_1)}) = 0$$

genügen, und für welche

$$\sqrt{R_1(y_\alpha)}$$

sich als rationale Function von z_1, $\sqrt{R(z_1)}$ und y_α darstellen lässt, hat weiter die Eigenschaft, dass sie ein System von Differentialgleichungen der Form befriedigen

$$\frac{dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{F_0(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}},$$

$$\frac{y_1\,dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2\,dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{y_\sigma\,dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{F_1(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{y_1^{\sigma-1}\,dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2^{\sigma-1}\,dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{y_\sigma^{\sigma-1}\,dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{F_{\sigma-1}(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}},$$

also eine Transformationsbeziehung der zugehörigen Integrale erster Gattung liefern, oder wenn σ nicht kleiner als p ist, dem Systeme

$$\frac{dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} + \frac{dz_2}{\sqrt{R(z_2)}} + \cdots + \frac{dz_p}{\sqrt{R(z_p)}}$$

$$= \frac{f_0(Y_1)\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{f_0(Y_2)\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{f_0(Y_\sigma)\,dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}},$$

$$\frac{z_1\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} + \frac{z_2\,dz_2}{\sqrt{R(z_2)}} + \cdots + \frac{z_p\,dz_p}{\sqrt{R(z_p)}}$$

$$= \frac{f_1(Y_1)\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{f_1(Y_2)\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{f_1(Y_\sigma)\,dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{z_1^{p-1}\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} + \frac{z_2^{p-1}\,dz_2}{\sqrt{R(z_2)}} + \cdots + \frac{z_p^{p-1}\,dz_p}{\sqrt{R(z_p)}}$$

$$= \frac{f_{p-1}(Y_1)\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{f_{p-1}(Y_2)\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{f_{p-1}(Y_\sigma)\,dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}},$$

in welchen

$$Y_1,\ Y_2,\ \cdots\ Y_\sigma$$

die Lösungen einer Gleichung σ^{ten} Grades sein sollen, deren Coefficienten rational und symmetrisch aus

$$z_1,\ z_2,\ \cdots\ z_p,\ \sqrt{R(z_1)},\ \sqrt{R(z_2)},\ \cdots\ \sqrt{R(z_p)}$$

zusammengesetzt sind, während die zugehörigen Irrationalitäten mit Hülfe eben dieser Grössen rational mit den resp. Y zusammenhängen.

Doch lässt diese Form des Transformationsproblems der Integrale noch eine wesentliche Vereinfachung zu, indem sich durch einfache Betrachtungen zeigen lässt, dass das oben aufgestellte System hyperelliptischer Differentialgleichungen sich in allen Fällen durch das folgende

$$\frac{dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}} = 2\,\frac{F_0(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}$$

$$\frac{Y_1\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{Y_2\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{Y_\sigma\,dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}} = 2\,\frac{F_1(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{Y_1^{\sigma-1}\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{Y_2^{\sigma-1}\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{Y_\sigma^{\sigma-1}\,dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}} = 2\,\frac{F_{\sigma-1}(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}$$

ersetzen lässt, in welchem

$$Y_1,\; Y_2,\; \ldots\; Y_\sigma$$

die Lösungen einer algebraischen Gleichung

$$y^\sigma + \chi_1(z_1)\,y^{\sigma-1} + \cdots + \chi_\sigma(z_1) = 0$$

darstellen, deren Coefficienten rationale Functionen von z_1 sind, und

$$\sqrt{R_1(Y_1)},\; \sqrt{R_1(Y_2)},\; \ldots\; \sqrt{R_1(Y_\sigma)}$$

sich als rationale Functionen der zugehörigen Y-Grössen und z_1 ausdrücken lassen, multiplicirt mit $\sqrt{R(z_1)}$.

Naturgemäss schliesst sich an die Behandlung des Transformationsproblems die Frage nach den allgemeinsten Beziehungen der hyperelliptischen Integrale derselben Ordnung und algebraisch-logarithmischen Functionen, eine Frage, die von Abel in seiner unvollendet gebliebenen Arbeit für elliptische Integrale beantwortet worden, und die Anwendung des oben hervorgehobenen Satzes von der Vertauschung der Gränzen und Unstetigkeitspunkte der Hauptintegrale sowie des Abel'schen Theorems führt zu dem Resultat, dass diese allgemeinste Beziehung die Form haben muss

$$m_1\int_{\zeta_1}^{z_1}\frac{\pm\sqrt{R(a_1)}\,dz}{(z-a_1)\sqrt{R(z)}} + m_2\int_{\zeta_1}^{z_1}\frac{\pm\sqrt{R(a_2)}\,dz}{(z-a_2)\sqrt{R(z)}} + \cdots + m_r\int_{\zeta_1}^{z_1}\frac{\pm\sqrt{R(a_r)}\,dz}{(z-a_r)\sqrt{R(z)}}$$

$$+\beta_0\int_{\zeta_1}^{z_1}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + \beta_1\int_{\zeta_1}^{z_1}\frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + \beta_{p-1}\int_{\zeta_1}^{z_1}\frac{z^{p-1}\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

$$= \log\left\{\frac{f_\varrho(z_1) - g_\varrho(z_1)\sqrt{R(z_1)}}{f_\varrho(z_1) + g_\varrho(z_1)\sqrt{R(z_1)}}\cdot\frac{f_\varrho(\zeta_1) + g_\varrho(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}}{f_\varrho(\zeta_1) - g_\varrho(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}}\right\},$$

worin $m_1, m_2, \ldots m_r$ ganze Zahlen, $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_{r-1}$ Constanten vorstellen, deren Bedeutung dort näher angegeben wird.

Endlich wird noch die Frage aufgeworfen, ob in algebraische Relationen zwischen hyperelliptischen Integralen auch jene eindeutigen Umkehrungsfunctionen der Integrale niederer Gattung, also die Exponentialfunctionen, die trigonometrischen und elliptischen Functionen eintreten können, und zwar wird diese Frage mit Hülfe eines allgemeinen von mir aufgestellten Satzes über Differentialgleichungen beantwortet, der für den vorliegenden Zweck specialisirt folgendermassen lautet: wenn zwischen den Integralen

$$Z \text{ und } Z_1, Z_2, \ldots Z_r$$

der irreductibeln Differentialgleichungen

$$f\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right) = 0$$

nd

$$\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^{k_1} + \varphi_1(x, z_1)\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^{k_1-1} + \cdots + \varphi_{k_1-1}(x, z_1)\frac{dz_1}{dx} + \varphi_{k_1}(x, z_1) = 0$$

$$\left(\frac{dz_2}{dx}\right)^{k_2} + \psi_1(x, z_2)\left(\frac{dz_2}{dx}\right)^{k_2-1} + \cdots + \psi_{k_2-1}(x, z_2)\frac{dz_2}{dx} + \psi_{k_2}(x, z_2) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{dz_r}{dx}\right)^{k_r} + \chi_1(x, z_r)\left(\frac{dz_r}{dx}\right)^{k_r-1} + \cdots + \chi_{k_r-1}(x, z_r)\frac{dz_r}{dx} + \chi_{k_r}(x, z_r) = 0,$$

ein algebraischer Zusammenhang stattfindet, und man setzt statt der Grössen $Z_1, Z_2, \ldots Z_r$ r beliebige andere Integrale der Differentialgleichungen, so wird die algebraische Beziehung noch fortbestehen, wenn für Z ein gewisses anderes Integral Z' der ersten Differentialgleichung gesetzt wird.

Die Anwendung dieses Satzes führt die oben aufgeworfene Frage auf die Untersuchung von Functionalgleichungen zurück, und liefert das Resultat, dass weder die Exponentialfunction noch die trigonometrischen und elliptischen Functionen in jenen algebraischen Beziehungen vorkommen können.

Mit den vorausgegangenen Untersuchungen sind nun die Mittel gegeben, um die Beantwortung der Fragen der Integralrechnung anzugreifen, welche die Reduction der hyperelliptischen Integrale einer gewissen Ordnung auf solche niederer Ordnung zum Gegenstande haben, und zwar liefert die achte Vorlesung die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, unter denen ein hyperelliptisches Integral irgend welcher Ordnung auf algebraisch-logarithmische Functionen reducirbar ist, eine Frage, die für elliptische Integrale von

Tchebichef im Anschluss an die Untersuchungen von Abel, von Weierstrass mit Hülfe der Umkehrungsfunctionen behandelt worden ist.

Die Bedingungen dafür, dass das Integral

$$\int \frac{F(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

auf algebraische Functionen reducirbar ist, sind unter Benutzung schon oben in diesem Referate erklärter Zeichen die folgenden:

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} = 0, \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_2)^{-1}} = 0, \; \ldots \; \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_n)^{-1}} = 0,$$

$$\sum_{1}^{n}{}_{\alpha}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = 0,$$

worin $r = 0, 1, 2, \ldots 2p-1$ zu setzen ist; der algebraische Werth des hyperelliptischen Integrales ist dann durch den Ausdruck gegeben

$$\left\{\sum_{1}^{n}{}_{\alpha}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}\right\} \sqrt{R(z)}.$$

Weit schwieriger ist die Frage nach der Reducirbarkeit auf Logarithmen, und eine genaue Untersuchung der nothwendigen und hinreichenden Bedingungen liefert das folgende Verfahren zur Beantwortung der Frage, ob ein hyperelliptisches Integral von der Form

$$\int \frac{F(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

auf algebraisch-logarithmische Functionen reducirbar ist.

Man bilde die Gleichung

$$T_1 \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} + T_2 \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_2)^{-1}} + \cdots + T_n \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_n)^{-1}} = 0,$$

und suche dieselbe durch Systeme von ganzen Zahlen $T_1, T_2, \ldots T_n$ zu befriedigen; mögen sich nun $n-k$ solcher Systeme finden lassen

$$\begin{array}{llll} T_{11}, & T_{12}, & \ldots & T_{1n}, \\ T_{21}, & T_{22}, & \ldots & T_{2n}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{n-k\,1}, & T_{n-k\,2}, & \ldots & T_{n-k\,n}, \end{array}$$

welche von einander unabhängig sind, und mögen sich aus diesen $n-k$ Gleichungen die Relationen ergeben

$$D\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_{k+1})^{-1}} = \lambda_{11}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} + \cdots + \lambda_{1k}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_k)^{-1}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_n)^{-1}} = \lambda_{n-k\,1}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} + \cdots + \lambda_{n-k\,k}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_k)^{-1}},$$

so suche man den grössten gemeinsamen Theiler zwischen den Zahlen

$$D,\ \lambda_{1i},\ \lambda_{2i},\ \ldots\ \lambda_{n-k\,i},$$

worin i eine der Zahlen $1, 2, \ldots k$ bedeuten soll; sei derselbe δ_i, und werde

$$\frac{D}{\delta_i} = t_0^{(i)},\quad \frac{\lambda_{1i}}{\delta_i} = t_1^{(i)},\quad \frac{\lambda_{2i}}{\delta_i} = t_2^{(i)},\ \ldots\ \frac{\lambda_{n-k\,i}}{\delta_i} = t_{n-k}^{(i)}$$

gesetzt, so muss

$$t_0^{(i)} + t_1^{(i)} + \cdots + t_{n-k}^{(i)} > p$$

sein, wenn $R(z)$ vom $2p+1^{\text{ten}}$ Grade ist; lassen sich nun Gleichungen von der Form

$$P^{(1)^2} - Q^{(1)^2}R(z) = 0,\quad P^{(2)^2} - Q^{(2)^2}R(z) = 0,\ \ldots\ P^{(k)^2} - Q^{(k)^2}R(z) = 0$$

finden, welche ausser den resp. Werthen

$$\begin{array}{c} z_1,\ z_{k+1},\ \ldots\ z_n \\ z_2,\ z_{k+1},\ \ldots\ z_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_k,\ z_{k+1},\ \ldots\ z_n \end{array}$$

mit der entsprechenden Vielfachheit

$$\begin{array}{c} t_0^{(1)},\ t_1^{(1)},\ \ldots\ t_{n-k}^{(1)} \\ t_0^{(2)},\ t_1^{(2)},\ \ldots\ t_{n-k}^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ t_0^{(k)},\ t_1^{(k)},\ \ldots\ t_{n-k}^{(k)} \end{array}$$

nur noch die Verzweigungswerthe zu Lösungen haben, so bilde man die Summe

$$\frac{1}{t_0^{(1)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} \log\left(\frac{P^{(1)} - Q^{(1)}\sqrt{R(z)}}{P^{(1)} + Q^{(1)}\sqrt{R(z)}}\right) + \frac{1}{t_0^{(2)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_2)^{-1}} \log\left(\frac{P^{(2)} - Q^{(2)}\sqrt{R(z)}}{P^{(2)} + Q^{(2)}\sqrt{R(z)}}\right)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{t_0^{(k)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_k)^{-1}} \log\left(\frac{P^{(k)} - Q^{(k)}\sqrt{R(z)}}{P^{(k)} + Q^{(k)}\sqrt{R(z)}}\right) = L(z),$$

dann wird $L(z)$ das Aggregat der im reducirbaren hyperelliptischen Integrale vorkommenden logarithmischen Glieder darstellen; setzt man sodann

$$\frac{dL(z)}{dz} - \sum_1 \left[\frac{F(z)}{\sqrt{R(z)}}\right]_{z=z_\alpha} \cdots \frac{2R(z)\left(Q(z)\frac{dP(z)}{dz} - P(z)\frac{dQ(z)}{dz}\right) - P(z)Q(z)\frac{dR(z)}{dz}}{P(z)^2 - Q(z)^2 R(z)} \cdot \frac{1}{\sqrt{R(z)}}\Bigg|$$

$$= \frac{v(z)}{\sqrt{R(z)}},$$

so müssen ferner mit Zugrundelegung der früher eingeführten Bezeichnungen noch die Bedingungen befriedigt sein

$$\sum_1^n \left[\frac{F(z)}{\sqrt{R(z)}} \int_{z_\alpha}^{z} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{z=z_\alpha} - \left[\frac{F(z)}{\sqrt{R(z)}} \int_{z}^{z} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{r-1} = 0$$

für die Werthe 0, 1, 2, . . . $p-1$, und

$$\sum_1^n \left[\frac{F(t)-v(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha}^{z} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{z=z_\alpha} - \left[\frac{F(z)-v(z)}{\sqrt{R(z)}} \int_{z}^{z} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{r-1} = 0$$

für die Werthe $r = p, p+1, \ldots 2p-1$; sind alle diese Bedingungen erfüllt, so ist der Werth des algebraischen Theiles jenes hyperelliptischen Integrales

$$\left\{\sum_1^n \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha}^{z} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{z=z_\alpha} - \left[\frac{F(z)}{\sqrt{R(z)}} \int_{z}^{z} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{r-1}\right\} \sqrt{R(z)},$$

welcher mit $L(z)$ vereinigt die algebraisch-logarithmische Darstellung des gegebenen Integrales liefert.

Die Frage, welche hyperelliptische Integrale auf elliptische oder auf hyperelliptische niederer Ordnung reducirbar sind, ist in diesen Vorlesungen nicht behandelt; der vollständigen Beantwortung dieser Frage stehen noch grosse Schwierigkeiten im Wege, die sich möglicherweise nur mit Hülfe der Umkehrungsfunctionen der hyperelliptischen Integrale oder der ϑ-Functionen mit mehreren Variabeln werden überwinden lassen.

Endlich behandelt die neunte Vorlesung das Multiplicationstheorem — nichts anderes als das Abel'sche Theorem für gleiche Integrale und nur nach dem oben behandelten Transformationsprincip in verschiedenen Formen dargestellt — und das Divisionsproblem, das bereits von Hermite für hyperelliptische Integrale erster Ordnung und von Clebsch und Gordan für alle Abel'schen Integrale erledigt worden ist; ich beweise durch Verallgemeinerung der von Hermite befolgten Methode den bekannten Satz, dass die Grössen

$$x_1,\; x_2,\; \ldots\; x_p,$$

welche der Gleichung

$$\int^{x_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int^{x_p} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{n}\int^{\xi_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \frac{1}{n}\int^{\xi_p} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

genügen, die Lösungen einer Gleichung p^{ten} Grades sind, deren Coefficienten sich als lineare Functionen von n^{ten} Wurzeln aus Functionen darstellen lassen, welche rational aus

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots\ \xi_p,\ \sqrt{R(\xi_1)},\ \sqrt{R(\xi_2)},\ \ldots\ \sqrt{R(\xi_p)}$$

zusammengesetzt sind.

Am Schlusse dieser letzten Vorlesung wird gezeigt, dass das Theilungsproblem der Perioden, welches beim allgemeinen Divisionsproblem als gelöst betrachtet wird, sich auf die Theilung derselben durch eine einfache Primzahl zurückführen lässt, und dass für diesen Fall das Problem auf die Auflösung einer Gleichung

$$\frac{n^{2p}-1}{n-1}^{\text{ten}}$$

Grades zurückführbar ist, aus deren Lösungen sich durch Wurzelziehen die Coefficienten der verschiedenen Gleichungen p^{ten} Grades bilden lassen, deren Wurzeln die Grössen

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots\ \eta_p$$

sind, welche der Gleichung

$$m\left(\frac{\mu_1}{n}J_1 + \frac{\mu_2}{n}J_2 + \cdots + \frac{\mu_{k-1}}{n}J_{k-1} + \frac{1}{n}J_k\right)$$
$$= \int^{\eta_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \int^{\eta_2} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int^{\eta_p} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

genügen, in welcher

$$J_1,\ J_2,\ \ldots$$

die Periodicitätsmoduln, k jeden Werth von 1 bis $2p$, die Grössen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{k-1}$ alle Zahlen $0, 1, 2, \ldots (n-1)$ vorstellen, und m aus der Werthereihe $1, 2, \ldots n-1$ zu nehmen ist.

Die weiteren wesentlichen Punkte, welche die Theorie der allgemeinen hyperelliptischen Integrale und der Periodicitätsmoduln derselben betreffen, gehören naturgemäss in die Theorie der hyperelliptischen Functionen, welche sich bekanntlich als Integrale eines Systems von hyperelliptischen Differentialgleichungen ergeben und zu noch weit ausgedehnteren und für die Algebra und Zahlentheorie ebenso wichtigen Untersuchungen führen als es bei den elliptischen Functionen der Fall gewesen.

Wien. **Leo Koenigsberger.**

Chr. Wiener: Ueber die Stärke der Bestrahlung der Erde durch die Sonne in ihren verschiedenen Breiten und Jahreszeiten. (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 22. Bd. 1877.)

In dieser Abhandlung sind die Stärken der Sonnenbestrahlung eines Punktes der Erde unter verschiedenen Breitegraden, und zwar zu den verschiedenen Zeiten des Tages, an den verschiedenen Tagen des Jahres, in verschiedenen Abschnitten des Jahres, und endlich von ausgedehnten Theilen der Erdoberfläche in gewissen Abschnitten des Jahres bestimmt. Dabei ist die Bestrahlungsstärke der Flächeneinheit der überall horizontal gedachten Erdoberfläche nur von dem Einfallswinkel der Strahlen, von dem Abstande der Sonne und von der Bestrahlungsdauer abhängig gemacht, nicht aber von dem nicht sicher bekannten Einflusse der Atmosphäre. Dieser Gegenstand ist schon von Poisson, Lambert, Meech u. A. behandelt und von beiden letzteren bis zur Berechnung von Tabellen fortgeführt worden, aber in nicht so umfassender Weise, wie in der vorliegenden Arbeit; namentlich wurden dort keine andern Jahresabschnitte als die astronomischen Jahreszeiten gewählt, weil diese bedeutend weniger Schwierigkeiten bei dem Auswerthen der elliptischen Integrale bieten.

In der vorliegenden Abhandlung ist zuerst die verhältnissmässige Intensität der Bestrahlung eines Punktes der Erdoberfläche zu den verschiedenen Zeiten eines Tages bestimmt, welche durch den Cosinus des Einfallswinkels ausgedrückt und graphisch durch denjenigen Theil einer Cosinuslinie dargestellt ist, der dem Tagesbogen entspricht. Sodann ist die Stärke der Bestrahlung an einem Tage in den verschiedenen Breiten und zu den verschiedenen Zeiten des Jahres ermittelt. Es sind Tabellen für Breiteunterschiede von 10^0 und für 16 Tage des Jahres berechnet, für welche der Unterschied der Längen der Sonne je $22^1/_2{}^0$ beträgt. Danach sind zweierlei Curven construirt, welche die Abhängigkeit der Bestrahlungsstärke einmal von der wechselnden Breite an bestimmten Tagen, das anderemal von den wechselnden Tagen in bestimmten Breiten veranschaulichen. Es mögen einige der Ergebnisse angeführt werden. Die stärkste Sonnenbestrahlung innerhalb eines Tages (24 Stunden), welche überhaupt auf der Erde vorkommt, haben zur Zeit der Sonnenwende merkwürdiger Weise die Pole zu erleiden, und zwar der Südpol mit der Stärke 0,412 und der Nordpol mit 0,385, wenn man als Einheit

die Stärke der Bestrahlung innerhalb 24 Stunden bei stets senkrecht auffallenden Strahlen und bei dem mittleren Abstande der Sonne wählt. Am 21. Juni, an welchem Tage also die Stärke der Bestrahlung für den Nordpol = 0,385 ist, beträgt sie für einen Punkt des nördlichen Polarkreises 0,353, bei etwa 62° n. Breite 0,350 (ein Minimum), bei etwa $43\frac{1}{2}$° n. Breite 0,355 (ein Maximum), auf dem Aequator 0,283, am südlichen Polarkreis 0. Die stärkste Tagesbestrahlung auf dem Aequator findet in der Nähe der Zeit der Tag- und Nachtgleichen statt; sie steigt im October bis 0,317, im Februar bis 0, 321.

Die Bestimmung der Stärke der Bestrahlung innerhalb eines Abschnittes des Jahres führt auf elliptische Integrale, die von allen 3 Gattungen auftreten; dieselben wurden mit Hülfe des Legendre'schen Tafelwerkes berechnet, nachdem vorher der Weg der mechanischen Quadratur und der der Simpson'schen Regel, die wegen nicht ganz gleicher Abscissenabschnitte etwas modificirt werden musste, eingeschlagen worden war. Die dreierlei Ergebnisse stimmten gut überein. Es wurden die Berechnungen für die 8 nahezu gleichen Theile des Jahres vorgenommen, in denen die Länge der Sonne von 0° anfangend um je 45° zunimmt. Dabei schlägt der Verfasser vor, neben den 4 astronomischen Jahreszeiten als meteorologische diejenigen Abschnitte einzuführen, deren Grenzen in die Zeitpunkte fallen, in denen die Sonnenlängen 45, 135, 225, 315° sind. Nahezu in der Mitte des meteorologischen Sommervierteljahres läge dann der längste Tag. Als Einheit wurde die Stärke der Bestrahlung innerhalb eines ganzen Jahres bei stets senkrecht auffallenden Strahlen und dem mittleren Abstande der Sonne gewählt. Zunächst ergab sich, dass die Stärke der Jahresbestrahlung eines Punktes der Erde in nördlicher Breite genau eben so gross ist, wie die eines Punktes von gleicher südlicher Breite; dass die Bestrahlung eines nördlichen Punktes im astronomischen Frühlingsvierteljahre (20. März bis 21. Juni) gleich ist derjenigen im Sommervierteljahre (21. Juni bis 23. Sept.), gleich derjenigen eines Punktes von gleicher, aber südlicher Breite im Herbstvierteljahre (23. Sept. bis 21. Dec.) und im Wintervierteljahre (21. Dec. bis 20. März). Ausser den Zahlen zeigt auch die Theorie, dass sich die Wirkung der längeren Dauer des nördlichen Sommerhalbjahres ($7\frac{1}{2}$ Tage länger) mit der des grösseren Sonnenabstandes während desselben vollkommen ausgleicht. Die Bestrahlungsstärke im ganzen Jahre ist für einen Punkt in der nördlichen oder süd-

lichen Breite von 0, 30, 60, 90° der Reihe nach 0,305; 0,268; 0,174; 0,127. Besonders bemerkenswerth sind die Bestrahlungsstärken in den meteorologischen Vierteljahren; sie ist z. B. für Punkte unter den nördlichen oder südlichen Breiten von 90, 60, 30, 0° im Frühlings- oder Herbstvierteljahr der Reihe nach 0,019; 0,041; 0,068; 0,078; für die Breiten (+ = nördlich) + 90, + 60, + 30, 0, — 30, — 60, — 90 im Sommervierteljahr der Reihe nach 0,089; 0,084; 0,088; 0,074; 0,043; 0,007; 0. Die letztere Reihe zeigt, dass nicht nur an unserem längsten Sommertage, sondern auch während des ganzen Sommervierteljahres die Sonnenbestrahlung des Nordpoles grösser ist als diejenige irgend eines andern Punktes der Erde; und es rührt dies daher, dass in diesem Quartale die tägliche Sonnenbestrahlung in 56 Tagen am Pole grösser ist, als die gleichzeitige an irgend einem andern Punkte der Erde.

Es ist dann noch die Stärke der Bestrahlung von Theilen der Erdoberfläche während gewisser Abschnitte des Jahres bestimmt und dabei z. B. gefunden, dass die auf die ganze Erde fallende Strahlenmenge mit der Zunahme der Länge der Sonne proportional, also für alle astronomischen und meteorologischen Vierteljahre dieselbe ist; dass die auf die nördliche und südliche Erdhälfte auffallenden Strahlenmengen in deren Sommer- und Wintervierteljahren sich nahezu wie 5 : 3 verhalten.

Carlsruhe. Chr. Wiener.

Edm. Hess. Ueber vier Archimedeische Polyeder höherer Art. (Kassel. Th. Kay. 1878.)

In der genannten Abhandlung werden zwei Methoden kurz entwickelt, welche zu der Bestimmung der Arten und Varietäten der gleichflächigen, sowie der gleicheckigen Polyeder dienen, und von denen jede, je nachdem sie auf die ersteren oder die letzteren Körper bezogen wird, wiederum zwei besondere Arten des Verfahrens ergibt.

Die erste Methode besteht darin, die entsprechenden Körper erster Art als bekannt vorauszusetzen und die vollständigen Raumfiguren zu betrachten, welche bei den gleichflächigen Polyedern durch die Ebenen der Grenzflächen, bei den gleicheckigen durch die Eckpunkte gebildet werden.

Im ersteren Falle kann man ein sehr einfaches, rein constructives Verfahren benutzen, indem man auf einer der gleichen Grenzflächen die Schnittlinien (Spuren) sämmtlicher übrigen Grenzflächen construirt. Im zweiten Falle — für die gleicheckigen Polyeder — lässt sich die analoge Untersuchung ebenfalls sehr anschaulich durchführen, wenn man die sphärischen Figuren und Netze betrachtet, welche durch Verbindung der auf einer Kugelfläche liegenden Eckpunkte durch Hauptkreise entstehen.

Eine zweite Methode gründet sich darauf, dass die gleicheckigen Polyeder durch Abstumpfung der Ecken und Kanten der regulären Polyeder sich erhalten lassen, dass dieselben also Combinationsgestalten von regulären und von bestimmten einfachen gleichflächigen Polyedern sind, während die gleichflächigen Körper durch bestimmte Combinationen der Eckpunkte von regulären und von einfachen gleicheckigen Polyedern hergeleitet werden können.

Diese beiden Methoden werden nun zur Herleitung von vier Archimedeischen Polyedern höherer Art, nämlich der beiden höheren Arten des Triacontaeders und der beiden diesen polar entsprechenden gleicheckigen Polyeder angewendet.

Man erhält auf diese Weise ausser dem Triacontaeder der 1ten Art, das passend als

$T_1 \cdots$ (12 + 20-)eckiges 30-Flach der 1ten Art

bezeichnet wird, einmal ein Triacontaeder der 3ten Art oder ein

$T_3 \cdots$ (stern-12 + 12-)eckiges 30-Flach der 3ten Art;

welches 12 regulär-fünfflächige Ecken der 2ten Art (Sternecken) und 12 regulär-fünfflächige Ecken der 1ten Art hat und von 30 congruenten Rhomben begrenzt ist. Zweitens resultirt ein Triacontaeder der 7ten Art oder ein

$T_7 \cdots$ (stern-12 + 20-)eckiges 30-Flach der 7ten Art

mit 12 regulär-fünfflächigen Ecken der 2ten Art und 20 regulär-dreiflächigen Ecken, das ebenfalls von 30 congruenten Rhomben begrenzt ist.

Die beiden Polyeder T_3 und T_7 sind sowohl nach der ersten Methode, vermöge welcher auch leicht die vollständigen Figuren der Grenzflächen gezeichnet werden können, als auch mit Benutzung der zweiten Methode hergeleitet, nach welcher sich dieselben durch bestimmte Combinationen der Eckpunkte eines Icosaeders mit den Eckpunkten eines Kepler'schen 12-eckigen Stern-12-Flachs der 3ten Art und ebenso mit denen eines Kepler'schen 20-eckigen Stern-12-Flachs der 7ten Art ergeben.

Endlich sind auch die Werthe für die Flächenwinkel, Kanten, Radien der umgeschriebenen Kugeln, Oberflächen und cubischen Inhalte der 3 Triacontaeder T_1, T_3, T_7 kurz zusammengestellt.

Den beiden Polyedern T_3 und T_7 entsprechen polar (in Beziehung auf eine concentrische Kugel) zwei gleicheckige Polyeder $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_7$, welche die beiden höheren Arten des dem Triacontaeder 1ter Art polar entsprechenden Polyeders, nämlich des

$\mathfrak{T}_1 \cdots$ (12 + 20-)flächigen 30-Ecks

darstellen.

Das Polyeder

$\mathfrak{T}_3 \cdots$ das (stern-12 + 12-)flächige 30 Eck der 3ten Art

ist von 12 regulären Fünfecken der 2ten Art und von 12 regulären Fünfecken der 1ten Art, deren Ebenen bezüglich zu denen der ersteren parallel sind, begrenzt und hat 30 congruente vierflächige Ecken.

Das dem Polyeder T_7 polar entsprechende

$\mathfrak{T}_7 \cdots$ das (stern-12 + 20-)flächige 30-Eck der 7ten Art

ist von 12 regulären Fünfecken der 2ten Art und 20 regulären Dreiecken begrenzt und hat ebenfalls 30 congruente 4flächige Ecken.

Diese beiden Polyeder $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_7$ werden direct unter Angabe ihrer wichtigsten Eigenschaften einmal aus den bezüglichen sphärischen Netzen, nämlich aus der Figur eines sphärischen sogenannten 10fach Brianchon'schen Sechsecks hergeleitet, dessen ebene Projection gelegentlich anderer Untersuchungen von Clebsch*) und neuerdings von Herrn F. Klein**) betrachtet wurde.

Andererseits wird auch die zweite Art der Entstehung der Polyeder $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_7$ kurz erwähnt, nach welcher dieselben resultiren, wenn beziehungsweise die Ecken eines Poinsot'schen 12flächigen Stern-12-Ecks 3ter Art und ebenso die eines Poinsot'schen 20flächigen Stern-12-Ecks 7ter Art durch die Flächen eines Pentagondodecaeders bis zum Verschwinden der Kanten abgestumpft werden.

Ueber zwei concentrisch-regelmässige Anordnungen von Kepler-Poinsot'schen Polyedern. (Sitzungsber. der Gesellsch. z. Beförd. d. gesammt. Naturwissensch. zu Marburg. Mai 1878. S. 16—23.)

In Folge der von dem Verfasser aufgestellten Erweiterung des Begriffs eines regelmässigen Körpers — als eines zugleich gleicheckigen und gleichflächigen — (vgl. Repertorium Band I. S. 227 ff.) ergibt sich, dass nur solche concentrische Gruppirungen dieser Polyeder als regelmässige anzusehen sind, bei welchen der innere Kern ein gleichflächiges, die äussere Hülle ein gleicheckiges Polyeder der ersten Art ist.

Die hiernach möglichen concentrischen Gruppirungen der regelmässigen Körper erster Art sind, wie schon bei anderer Gelegenheit gezeigt wurde, einmal diejenigen von regulären Tetraedern zu 2, 5 und 10, ferner die von je 5 Würfeln und von 5 regulären Octaedern und endlich zahlreiche Anordnungen von tetragonalen und rhombischen Sphenoiden.

Die vorliegende Mittheilung bezieht sich auf zwei bisher nicht bekannte concentrisch regelmässige Anordnungen von zweien der Kepler-Poinsot'schen Polyeder. Der Verfasser wurde auf dieselben durch eine genauere Betrachtung der Figur eines sphärischen 10fach Brianchon'schen Sechsecks geführt. (Vgl. den vorhergehenden Bericht.)

---

*) Mathem. Annalen IV S. 336 - 338.

**) Mathem. Annalen XII S. 530 ff.

Die durch jene Figur, sowie durch die ihr polar entsprechende, bestimmten sphärischen Netze bedingen zum Theil neue Lösungen des Problems der Kugeltheilung, mit welchen dann die Construction gleichflächiger und gleicheckiger Polyeder in engem Zusammenhange steht. (Vgl. auch Schwarz: Borchardts Journal Bd. 75 S. 321 ff.)

In der angegebenen Figur treten u. A. 60 (durch F bezeichnete) Schnittpunkte auf, die wie die Eckpunkte eines bestimmten gleicheckigen Polyeders (eines (12 + 20 + 30) flächigen 60 Ecks) liegen, und denen 30 (durch f bezeichnete) Hauptkreise als Aequatoren entsprechen.

Es ergibt sich nun, dass diese 60 Punkte F die Eckpunkte zweier concentrischen Systeme von 5 Kepler'schen 12 eckigen Stern-12-Flachen und von 5 Poinsot'schen 12 flächigen Stern-12-Ecken sind. Denn bei beiden Systemen liegen die 60 fünfflächigen Ecken wie die Eckpunkte des angegebenen gleicheckigen Polyeders, und die 60 fünfeckigen Grenzflächen, welche parallel zu den Ebenen der 30 Hauptkreise f sind, schliessen als inneren Kern ein bestimmtes gleichflächiges Polyeder (ein (12 + 20 + 30)-eckiges 60 Flach, ein Deltoidhexecontaeder) ein. Dabei entspricht der innere Kern bei jedem dieser beiden Systeme, die sich polar entsprechen, auch polar der äusseren Hülle.

Bemerkenswerth erscheint noch, dass das System von 5 concentrischen Pentagondodecaedern, das durch die Grenzflächen jener beiden Systeme gebildet wird, und ebenso das System von 5 concentrischen Icosaedern, dessen Eckpunkte mit denen jener beiden Systeme zusammenfallen, keine in dem angegebenen Sinne regelmässigen Anordnungen darstellen, indem für jedes immer nur eine der beiden oben aufgestellten Bedingungen erfüllt ist.

Marburg. Edm. Hess.

Milinowski: „Zur synthetischen Behandlung der ebenen Curven III. O". und „Zur synthetischen Behandlung der ebenen Curven IV. O.". (Zeitschrift für Mathematik und Physik.)

Seit dem Erscheinen der v. Staudt'schen Geometrie der Lage hat sich in der Geometrie das Bestreben geltend gemacht, die geometrischen Wahrheiten ohne jede Rechnung, ohne irgendwelche Massbeziehungen, also ohne Benutzung des Gleichheitszeichens abzuleiten. Für die Gebilde II. O. war dieses Streben vom durch-

schlagendsten Erfolge begleitet, für die Gebilde höherer Ordnung aber eine rein synthetische Theorie noch nicht gegeben. Die fundamentalen Sätze wurden entweder der analytischen Geometrie entlehnt oder durch Rechnung bewiesen oder geradezu als Grundsätze aufgestellt, so in den bekannten Werken von Durège: „Die ebenen Curven III. O.“ und Cremona: „Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven“. Durège benutzt die analytische Geometrie, Cremona leitet die Theorie der harmonischen Mittelpunkte aus den Beziehungen zwischen den Wurzeln und Coefficienten einer algebraischen Gleichung her und aus ihr dann die Theorie der Polaren der algebraischen Curven. Von diesen nimmt er als selbstverständlich an, dass die Zahl ihrer Schnittpunkte nur von ihrer Ordnung abhängig, also gleich dem Product ihrer Ordnungszahlen ist. Auf fast gleiche Weise wird die Anzahl der Punkte gefunden, welche eine Curve bestimmen. Weil n Gerade, die sich in einem Punkte treffen, als eine Curve n^{ter} O. mit einem $n$fachen Punkte angesehen werden können, ein $n$facher Punkt aber für $\frac{1}{2}n(n+1)$ Bedingungen gilt, und die Geraden sämmtlich bestimmt sind, sobald von jeder noch ein weiterer Punkt gegeben ist, so ist eine Curve n^{ter} O. durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte bestimmt. Einen weiteren Hauptsatz für die Theorie der Curven, dass durch die Schnittpunkte zweier Curven von gleicher Ordnung sich unzählig viele Curven von derselben Ordnung legen lassen, beweist Cremona analytisch. Man ersieht, dass die Methoden Cremonas von den Forderungen der Geometrie der Lage vollständig abweichen und seine Theorie im Sinne der letzteren keine geometrische Theorie ist. — Der Zweck beider Abhandlungen ist nun der, die genannten fundamentalen Sätze allein mit denjenigen Hilfsmitteln, welche die Geometrie der Lage gestattet, für Curven III. O. und IV. O. abzuleiten. Es liegt im Wesen dieser Geometrie, dass diese Herleitung nur eine Folge der Erzeugung der Curven sein kann. Ausgegangen bin ich bei den Curven III. O. von der Chasles'schen Erzeugungsart vermittelst zweier projectivischen Büschel II. und I. O. und habe zuerst den Fundamentalsatz bewiesen: „Jede Curve III. O., welche durch zwei projectivische Büschel II. und I. O. erzeugt ist, kann auf unendlich viele Arten durch zwei solche Büschel erzeugt werden, wobei 4 Grundpunkte auf der Curve beliebig gewählt werden können.“ — Hier muss ich bemerken, dass Reye in seiner „Geometrie der Lage“ II. Theil, Seite 188 und 189 einen Beweis dieses Satzes gibt. Derselbe beruht aber auf räumlichen Betrachtungen und ist nicht all-

gemein, denn die Grundpunkte des Kegelschnittbüschels sind von einander abhängig. Die Fläche F III. O. ist der Ort der Schnittpunkte homologer Ebenen dreier Strahlenbündel, die collinear auf einander bezogen sind; drei projectivische Ebenenbüschel derselben erzeugen eine auf F liegende Raumcurve k III. O. Jeder ebene Schnitt von F ist eine Curve C III. O., in deren Punkten sich homologe Strahlen von 3 collinearen ebenen Systemen treffen. Die Schnittpunkte der Ebene von C mit der Raumcurve k erscheinen (vgl. Ueber eine reciproke Verwandtschaft II. Grades von Milinowski, Crelle-Borchardt. Bd. 79) als sich selbst entsprechende Punkte zweier der unendlich vielen collinearen Systeme, welche C erzeugen oder, in bekannterer Weise ausgedrückt, als Tripel, wenn man C als Tripelcurve betrachtet (vgl. Steiners Vorlesungen, herausgegeben von Schroeter, II. Th., Seite 500, 504). Die von Reye zum Beweise (vgl. Seite 189, a. a. O., vorletzte und letzte Zeile) hervorgerufene Collinearität der 3 Bündel S, S_1, S_2 scheint im Allgemeinen unmöglich, da diese Bündel 3 gegebene projectivische Strahlenbüschel als entsprechende haben und die nach 3 gegebenen Punkten (PQR) gezogenen Strahlen, also $SP, S_1P, S_2P — SQ, S_1Q, S_2Q — SR, S_1R, S_2R$ homologe sein sollen. — Ein synthetischer Beweis des genannten Satzes war demnach noch nicht vorhanden. In meiner Abhandlung gebe ich zwei Beweise desselben, den einen Seite 434—435, den anderen Seite 427—433, in welchem ich zugleich nachweise, dass jede auf die Chasles'sche Art erzeugte Curve III. O. als Tripelcurve angesehen und umgekehrt jede Tripelcurve durch 2 projectivische Büschel II. und I. O. erzeugt werden kann, von deren Grundpunkten 4 beliebig auf der Curve gewählt werden können. — Einen anderen Weg die Identität beider Arten von Curven III. O. nachzuweisen, habe ich in dem Programme des Weissenburger Gymnasiums vom Jahre 1875 in der Abhandlung „Ueber die Haupterzeugungsarten der ebenen Curven III. O.“ eingeschlagen. — Ein vereinfachter Beweis des obigen Fundamentalsatzes soll in der Zeitschrift für Mathematik und Physik veröffentlicht werden. Aus diesem Satze lassen sich für Curven III. O. jene eingangs erwähnten Sätze leicht folgern. (vgl. Reye, Geometrie der Lage.)

In Nr. 10 der ersten Abhandlung habe ich die Erzeugung der ebenen Curve III. O. durch 2 projectivische Kegelschnittbüschel besprochen und die Identität der auf diese Art erzeugten Curve mit der auf die Chasles'sche Art entstandenen nachgewiesen. Auf Seite 433 muss dabei von der vierten Zeile an verbessert werden in:

„Ebenso müssten die Polaren von O nach k_n^2 und λ_n^2 in eine Gerade o_n zusammenfallen, so dass also O und der Schnittpunkt $(o_m\, o_n)$ conjugirte Punkte für beide Büschel wären."

Der zweite Theil der Abhandlung leitet auf rein synthetischem Wege die Hauptpolareigenschaften der Curven III. O. ab. Im Beweise des Satzes 12 kommt ein falscher Schluss vor, auf den mich Herr Professor Sturm in Darmstadt aufmerksam gemacht hat. Derselbe hat gleichzeitig den Beweis richtig gestellt und soll die Correctur in der Zeitschr. für Mathem. und Phys. erfolgen. — In der Herleitung des Satzes 23, welcher die Hauptpolareigenschaft eines Büschels III. O. enthält, ist in der 5, 27, 28ten Zeile g statt l zu lesen.

Die zweite Abhandlung hat den Zweck einige fundamentale Sätze aus der Theorie der Curven IV. O. synthetisch abzuleiten, nämlich die Sätze:

1. Ist eine Curve IV. O. durch 2 projectivische Büschel II. O. erzeugt, so kann sie auf unzählige Arten durch 2 solche Büschel erzeugt werden. Die sämmtlichen Grundpunkte des einen und einer des anderen sind auf der Curve beliebig anzunehmen.

2. Ist eine Curve IV. O. durch 2 projectivische Büschel I. und III. O. erzeugt, so kann sie auf unzählige Arten durch 2 solche Büschel erzeugt werden. Der Grundpunkt des Büschels I. O. und 6 Grundpunkte des Büschels III. O. sind beliebig auf der Curve anzunehmen.

3. Eine Curve IV. O., welche durch 2 projectivische Büschel II. O. erzeugt ist, kann auch durch 2 projectivische Büschel I. und III. O. erzeugt werden — und umgekehrt.

4. Alle auf eine der beiden Arten erzeugten Curven IV. O., welche 13 Punkte gemeinschaftlich haben, gehen ausserdem noch durch dieselben 3 Punkte.

5. Eine Curve IV. O. ist durch 14 Punkte bestimmt.

Synthetische Beweise dieser Sätze sind mir nicht bekannt geworden. „Der strenge Beweis des ersten Satzes (vgl. Kortum: Ueber geometrische Aufgaben III. und IV. Grades) mit allen seinen speciellen Fällen würde eine vollständige geometrische Theorie der Curven IV. O. involviren, also eine Arbeit, welche immer noch zu wünschen bleibt." Die eben genannte Schrift von Kortum, im Jahre 1868 mit dem Steiner'schen Preise gekrönt, löst die Aufgabe: „Durch 14 Punkte vermittelst zweier projectivischen Büschel II. O. eine Curve IV. O. zu legen" und benutzt dazu den Hilfssatz: „Legt

man durch die Schnittpunkte der homologen Kegelschnitte projectivischer Büschel andere Kegelschnittbüschel, so lassen sich die Kegelschnitte derselben unendlich oft so zu neuen Büscheln gruppiren, dass zu jedem solchen aus jedem der vorigen Büschel ein Kegelschnitt gehört." Der Beweis desselben stützt sich auf den oben angegebenen ersten Satz von den Curven IV. O., den sie durch die analytische Geometrie als bewiesen voraussetzt. Die synthetische Geometrie muss den umgekehrten Weg einschlagen und jenen Hilfssatz aus den Eigenschaften der Kegelschnitte ableiten, was in Nr. 7 meiner Abhandlung geschehen ist. Zu bemerken ist, dass derselbe Satz sich auch für Curven höherer Ordnung aus den Eigenschaften des Curvennetzes ableiten lässt; für Curven III. O. ist diese Ableitung in Nr. 28 ausgeführt. Uebrigens ist zu erwähnen, dass jener Hilfssatz von den Kegelschnittbüscheln den anfangs genannten Hauptsatz aus der Theorie der Curven III. O. unmittelbar folgern lässt, wenn das eine Kegelschnittbüschel in ein Strahlenbüschel und eine Gerade degenerirt. — Um zu dem Satze 1. zu gelangen, musste ich aber einen Umweg einschlagen; es ist mir nicht gelungen, ihn wie den genannten Hilfssatz, nur aus den Eigenschaften der Kegelschnitte abzuleiten; ich musste Curven III. O. zu Hilfe nehmen. Zunächst zeige ich, dass der Ort der Schnittpunkte homologer Curven zweier projectivischen Büschel III. O. eine Curve VI. O. ist; dass zwei projectivische Büschel I. und III. O. eine Curve IV. O. erzeugen, welche auch in eine Gerade und eine Curve III. O. oder in zwei Curven II. O. zerfallen kann; dass diese Curve IV. O. auf unzählige Arten durch zwei projectivische Büschel I. und III. O. oder II. und II. O. erzeugt werden könne. In Verbindung mit diesem Satze folgt dann aus der Auflösung der Aufgabe: Durch 14 Punkte vermittelst zweier projectivischen Büschel I. und III. O. oder II. und II. O. Curven IV. O. zu legen, die Identität dieser Curven und somit der Satz 1. Eine weitere Ausführung einer geometrischen Theorie der Curven IV. O. würde nachweisen müssen, dass jede auf irgend eine Art entstandene Curve IV. O. durch projectivische Büschel I. und III. oder II. und II. O. erzeugt werden kann, da die Zurückführung auf dieselbe Erzeugungsart das einzige geometrische Mittel ist, die Identität zweier Curven nachzuweisen. Für die beiden Haupterzeugungsarten ist mir diese Umformung gelungen. Daraus aber ergeben sich die Sätze 4. und 5.

Die angewendeten Methoden gestatten eine Erweiterung auf Curven beliebiger Ordnung und so gelang es, folgende Sätze zu beweisen:

Ist eine Curve C n^{ter} O. durch zwei projectivische Büschel I. und $(n-1)^{\text{ter}}$ O. erzeugt, so kann sie auf unzählige Arten durch zwei solche Büschel oder auch durch zwei projectivische Büschel II. und $(n-2)^{\text{ter}}$ oder III. und $(n-3)^{\text{ter}}$ O. erzeugt werden und ist durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte bestimmt.

Könnte man die Zahl der Schnittpunkte zweier Curven von beliebiger Ordnung bestimmen, so würde man den letzten Satz so erweitern können, dass die Curve C auch durch projectivische Büschel m^{ter} und $(n-m)^{\text{ter}}$ O. erzeugt werden kann. Es springt hier die Tragweite des Satzes, dass zwei Curven p^{ter} und q^{ter} O. pq Schnittpunkte haben den Cremona als Grundsatz aufstellt, hervor.

Den Schluss der zweiten Abhandlung bildet wieder die synthetische Ableitung einiger Haupteigenschaften der Polaren einer Curve IV. O., die sich jedoch auf gleiche Art auch auf Curven beliebiger Ordnung übertragen lassen, weil man zu ihrer Herleitung den Satz von der Anzahl der Schnittpunkte zweier Curven nicht braucht.

Weissenburg. Milinowski.

L. Fuchs: Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles, auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces. Extrait d'une lettre adressé à M. Hermite. (Borchardt's Journal der Mathematik B. 83 p. 13.)

1.

Der Verfasser behandelt zunächst nach den Principien seiner Abhandlung (Borchardts Journal B. 71 p. 91) die beiden Perioden des elliptischen Integrals erster Gattung als Functionen eines unbeschränkt veränderlichen Moduls k. Diese Functionen werden als Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher sie bekanntlich genügen, definirt. Es sei nämlich $k^2 = \frac{1}{u}$ und es seien v_{01}, v_{02}; v_{11}, v_{12}; $v_{\infty 1}, v_{\infty 2}$ Fundamentalsysteme von Integralen der Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad 2u(u-1)\frac{d^2\eta}{du^2} + 2(2u-1)\frac{d\eta}{du} + \tfrac{1}{2}\eta = 0,$$

welche resp. zu den singulären Punkten $u = 0$, $u = 1$, $u = \infty$

gehören (im Sinne der Arbeit des Verfassers Borchardts Journal B. 66 p. 139), so ergeben sich die folgenden gleichwerthigen Definitionen der Functionen K und K'

$$K = \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\cdot\eta_1\,; \qquad K' = \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\cdot\eta_2$$

(B) $\eta_1 = -\, v_{12}\,, \qquad \eta_2 = \pi v_{11}$

(C) $\eta_1 = \pi v_{\infty 1}\,, \qquad \eta_2 = -\, v_{\infty 2}$

(D) $\eta_1 = \pi v_{01} + i v_{02}\,, \quad \eta_2 = v_{02}.$

Diese Relationen werden unter Zuhülfenahme der Arbeiten des Verfassers Borchardts Journal B. 75 p. 177 nach den Principien seiner Arbeiten B. 66 und B. 71 desselben Journals entwickelt. Dieselben gewähren die Möglichkeit den Verlauf der Functionen η_1, η_2, für die ganze u Ebene festzustellen. Es ergiebt sich danach, dass, wenn zu einem beliebigen u die Werthe η_1, η_2 gehören, die Gesammtheit der zu demselben Werthe u gehörigen Werthe resp.

(E) $\lambda\eta_1 + \mu i \eta_2\,, \quad \nu i \eta_1 + \varrho\eta_2$

sind, wo λ, μ, ν, ϱ reale ganze Zahlen sind, welche der Gleichung

(F) $\lambda\varrho + \mu\nu = 1$

genügen.

Für die Function $H = \frac{\eta_2}{\eta_1}$ wird aus diesen Resultaten gefolgert, dass dieselbe für $u = 0$, $u = 1$, $u = \infty$, und für beliebige Wege, auf welchen u zu einem dieser Werthe gelangt, resp. die allgemeine Form:

$$\frac{\nu - \varrho}{\lambda - \mu}\cdot i\,, \quad \frac{\nu}{\lambda}\cdot i\,, \quad -\frac{\varrho}{\mu}\cdot i$$

annimmt, demzufolge die Werthe der Function $q = e^{-\pi H}$ für $u = 0$, und $u = 1$ und für beliebige Wege von u einen Modul gleich der Einheit besitzen, während der Modul von q für $u = \infty$ entweder verschwindet oder der Einheit gleich wird.

Es wird hierauf nachgewiesen, dass das Vorzeichen des realen Theiles von H für einen beliebigen Werth von u von dem Wege unabhängig ist, auf welchem man dahin gelangt. Insbesondere ist der reale Theil von H für einen beliebigen Punkt je einer der Umgebungen f_0, f_1, f_∞ der drei singulären Punkte 0, 1, ∞ positiv oder Null, also der Modul von q kleiner oder gleich der Einheit, unabhängig von dem Wege, auf welchem u zu einem dieser Punkte gelangt.

Hat k einen bestimmten Werth, und werden K und K', wie es in der Theorie der elliptischen Functionen geschieht, als be-

stimmte Integrale gegeben, und wird $q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$ gesetzt, so ist bekannt, dass der Modul von q kleiner ist als Eins. Dieser Satz ist jedoch nur ein besonderer Fall des in der vorliegenden Arbeit gegebenen, insofern hier K und K' als Functionen der unbeschränkt Veränderlichen k aufgefasst werden. Der Beweis des allgemeineren Satzes enthält aber zu gleicher Zeit einen neuen Beweis dieser Thatsache der Theorie der elliptischen Functionen, welche daselbst nach Riemann durch die Theorie der Integrale algebraischer Functionen hergeleitet wird.

Es wird hierauf u als Function von q betrachtet, und mit Hülfe der Differentialgleichung

$$\text{(G)} \qquad \frac{du}{dq} = -\frac{u(u-1)}{\pi^2 q} \eta_1^2$$

gezeigt, dass innerhalb eines um den Punkt $q = 0$ mit dem Radius gleich der Längeneinheit beschriebenen Kreises $\mathfrak{K}$ u eine eindeutige und ausser für $q = 0$, wo $u = \infty$, im Inneren überall stetige Function von q ist, und keinen Werth annimmt, für welchen η_1 verschwindet. Innerhalb $\mathfrak{K}$ gilt die Gleichung

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{u} = 16q + q^2\varphi(q),$$

wo $\varphi(q)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von q fortschreitende Reihe darstellt.

Es ergiebt sich weiter die folgende merkwürdige Eigenschaft dieser Function. Wenn q von $q = 0$ ausgehend einen beliebigen Radius des Kreises $\mathfrak{K}$ durchläuft, so geht u von $u = \infty$ aus und gelangt schliesslich zu einem der Werthe $u = 0$, $u = 1$ gleichzeitig, wenn q die Peripherie von $\mathfrak{K}$ erreicht.

Hieraus wird gefolgert, dass eine stetige Fortsetzung des Integrals der Differentialgleichung (G), welches für $q = 0$ unendlich wird, über die Peripherie von $\mathfrak{K}$ hinaus nicht möglich ist, und nachgewiesen, dass jedem endlichen oder unendlich grossen Werthe von u Werthe von q innerhalb $\mathfrak{K}$ oder auf der Peripherie von $\mathfrak{K}$ entsprechen.

Wird auch η_1 als Function von q aufgefasst, so ergiebt sich, dass η_1^2 innerhalb $\mathfrak{K}$ eine eindeutige, endliche und stetige Function von q ist, und dass η_1 von Null verschieden ist für alle Punkte des Innern von $\mathfrak{K}$, mit Ausnahme von $q = 0$, dagegen unendlich für jeden Punkt der Peripherie von $\mathfrak{K}$, was auch so ausgedrückt werden kann, dass η_1 als Function von u nur für $u = \infty$ ver-

schwindet und für $u = 0$, $u = 1$ unendlich wird, für jeden Weg auf welchem u zu einem dieser Punkte gelangt ist.

Aus der Gleichung (1) lässt sich der bekannte Ausdruck

$$\text{(2)} \qquad \sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}}\, \frac{(1+q^2)(1+q^4)\cdots}{(1+q)(1+q^3)\cdots}$$

(Jacobi Fundamenta p. 89) herleiten.

Herr Hermite macht an dieser Stelle die folgende Anmerkung: N'y aurait-il point lieu d'observer qu'en faisant $k^2 = f(H)$, il résulte de votre analyse que toutes les solutions de l'équation $f(H) = f(H_0)$ sont donnéeš par la formule

$$H = \frac{\nu i + \varrho H_0}{\lambda + \mu i H_0}$$

en insistant sur l'extrême importance de ce résultat, pour la détermination des modules singuliers de M. Kronecker, et en remarquant que les belles découvertes de l'illustre géomètre, sur les applications de la théorie des fonctions elliptiques à l'arithmétique, paraissent reposer essentiellement sur cette proposition, dont la démonstration n'avait pas encore été donnée?

Es werden ferner zwei Wege angegeben, um den Ausdruck von η_1 als Function von q gültig innerhalb $\mathfrak{K}$ herzuleiten. Es ergibt sich hierbei die Gleichung

$$\text{(3)} \qquad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots$$

(Jacobi Fundamenta p. 184).

2.

Die beiden Perioden des elliptischen Integrals zweiter Gattung werden alsdann als Functionen der unbeschränkt veränderlichen Grösse k durch Vermittelung der bereits in ihrem Verhalten als Functionen von u erforschten Functionen η_1, η_2, definirt. Es ergibt sich nämlich, wenn man setzt

$$J = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \zeta_1, \quad J' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \zeta_2,$$

$$\text{(H)} \quad \zeta_1 = 2\psi(u)\frac{d\eta_1}{du} + u\eta_1; \quad \zeta_2 = 2\psi(u)\frac{d\eta_2}{du} + u\eta_2, \quad \psi(u) = u(u-1),$$

Gleichungen, aus welchen sich unmittelbar die Legendre'sche Relation

$$KJ' - K'J = \frac{\pi}{2}$$

ergibt.

Die Function $q\zeta_1^2$ von q ist innerhalb des Kreises $\mathfrak{K}$ eindeutig und continuirlich.

Die Functionen ζ_1, ζ_2 bilden ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung

$$(1) \qquad 2u(u-1)\frac{d^2\zeta}{du^2} + 2u\frac{d\zeta}{du} - \tfrac{1}{2}\zeta = 0$$

(s. die bereits citirte Abhandlung B. 71 p. 91).

Sind wiederum ω_{01}, ω_{02}; ω_{11}, ω_{12}; $\omega_{\infty 1}$, $\omega_{\infty 2}$ resp. die zu den singulären Punkten $u = 0$, $u = 1$, $u = \infty$ gehörigen Fundamentalsysteme von Integralen derselben, so ergiebt sich

$$(K) \qquad \begin{aligned} \zeta_1 &= \pi\omega_{01} + i\omega_{02}, \quad \zeta_2 = \omega_{02} \\ \zeta_1 &= -\omega_{12}, \quad \zeta_2 = \pi\omega_{11} \\ \zeta_1 &= \pi\omega_{\infty 1}, \quad \zeta_2 = -\omega_{\infty 2} \end{aligned}$$

und für $\quad u = 0 \quad \zeta_1 = 2i, \quad \zeta_2 = 2$

für $\quad u = 1 \lim \zeta_1 = -2 + 4\log 2 - \lim\log(u-1), \; \zeta_2 = \pi$

für $\quad u = \infty, \quad \zeta_2 = 0, \quad \zeta_2 = \infty.$

Es wird hierauf

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = Z, \quad e^{-\pi Z} = s$$

gesetzt.

Bedeutet alsdann Z_0 einen der Werthe von Z für ein beliebiges u, so sind die den verschiedenen Wegen von u entsprechenden Werthe von Z in der Form

$$\frac{\lambda + \mu i Z_0}{\nu i + \varrho Z_0}$$

enthalten. Insbesondere ist für $u = 0$ $Z = -\frac{\lambda - \mu}{\nu + \varrho}i$, für $u = 1$ $Z = \frac{\mu}{\varrho}i$ oder gleich einer Zahl, deren realer Theil positiv und unendlich ist, endlich für $u = \infty$ $Z = -\frac{\lambda}{\nu}i$, so dass die Moduln aller Werthe von s für $u = 0, 1, \infty$ der Einheit gleich werden, den Werth $s = 0$ für $u = 1$ ausgenommen.

Es wird hierauf gezeigt, dass der Modul von s in einem Punkte der Umgebung sowohl von $u = 0$ als von $u = \infty$ bald grösser bald kleiner als die Einheit werden kann, je nach dem Wege, auf welchem u zu einem dieser Punkte gelangt. Dagegen für die Punkte in der Umgebung von $u = 1$ ist der Modul von s für einen beliebigen Weg von u kleiner als die Einheit.

Es ergiebt sich analog der Gleichung (G)

$$(G^1) \qquad \frac{du}{ds} = \frac{(u-1)\zeta_2^2}{\pi^2 s}.$$

Aehnlich wie u als Function von q behandelt wurde, wird jetzt u als Function von s untersucht. Diese Function erweist sich als eindeutig und stetig innerhalb eines mit dem Radius Eins um $s = 0$ beschriebenen Kreises $\mathfrak{L}$. Für keinen Werth innerhalb $\mathfrak{L}$ erlangt u einen Werth, für welchen ζ_2 verschwindet.

Die der Gleichung (1) analoge Gleichung

$$(1^1) \qquad u - 1 = e^{4\log 2 - 2} \cdot s + s^2 h(s)$$

stellt u als Function von s innerhalb $\mathfrak{L}$ dar, wo $h(s)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von s fortschreitende Reihe bedeutet.

Aehnlich wie für die Function H ergibt sich, dass das Vorzeichen des realen Theiles von Z für einen beliebigen Werth von u unabhängig ist von den Umläufen, welche u um die Punkte $u = 0$, $u = 1$, $u = \infty$ vollzogen hat, wenn es zu jenem Werthe gelangt.

Die durch die Gleichung $e^{-\pi Z} = s$ definirte Function $u - 1$ von s, welche für $s = 0$ verschwindet, und innerhalb $\mathfrak{L}$ durch die Gleichung (1^1) dargestellt wird, kann auf stetige Weise über die Peripherie von $\mathfrak{L}$ hinaus fortgesetzt werden. Die Werthe von u, welche den Werthen von s innerhalb $\mathfrak{L}$ entsprechen, erschöpfen nicht die ganze u Ebene. Setzt man u über die Peripherie hinaus stetig fort, und verbleibt alsdann im Aeusseren von $\mathfrak{L}$, so ist u eindeutig und stetig innerhalb eines Theiles der s Ebene, welcher zwischen der Peripherie von $\mathfrak{L}$ und derjenigen eines concentrischen Kreises enthalten ist, dessen Radius einen beliebigen die Einheit überschreitenden Werth hat.

Heidelberg. L. Fuchs.

A. Minin: Ueber die numerischen Reihen, welche mit numerischen Integralen verbunden sind. (Vorgetragen in der Moskauer Mathematischen Gesellschaft.)

In der von mir soeben herausgegebenen Broschüre „Ueber die mit numerischen Integralen verbundenen numerischen Reihen“ weise ich auf die numerischen Reihen solcher Gestalt:

$$(1) \quad F(n) = Q(1)\varphi(n,1) + Q(2)\varphi(n,2) + Q(3)\varphi(n,3) + \cdots + Q(k)\varphi(n,k),$$

wo $F(n)$ eine solche Function ist, welche $= 0$ für $n = 0$; $\varphi(n, k)$ — die numerische Function von n und k; $Q(1)$, $Q(2)$, $Q(3) \ldots$ — die Coefficienten der Entwickelung.

Jede Function $F(n)$, die $= 0$ für $n = 0$, kann für alle ganzen und positiven Werthe des Argumentes in die erwähnten Reihen entwickelt werden. Einige particuläre Formen solcher Reihen kann man aus der einfachen von mir gefundenen Identität:

$$(2) \quad F(n) = \xi_1^{-1} Q(x) + \xi_2^{-1} Q(x) + \xi_3^{-1} Q(x) + \cdots + \xi_n^{-1} Q(x),$$

wo ξ_n^{-1} das von mir eingeführte Symbol der numerischen Integrale ist, erhalten.

Ich weise auf einige Eigenschaften der Reihen (1) und ich erhalte aus der Identität (2) zwei Reihen:

$$F(n) = Q(1)n + Q(2)(n-1) + Q(3)(n-2) + \cdots + Q(k)(n+1-k) + \cdots,$$

$$F(n) = Q_1(1)E\frac{n}{1} + Q_1(2)E\frac{n}{2} + Q_1(3)E\frac{n}{3} + \cdots + Q_1(k)E\frac{n}{k} + \cdots$$

Moskau. A. Minin.

D. Tessari: La Teoria delle Ombre e del Chiaro-scuro. Fascicolo I. pag. 168 in 8.; fig. 81 su 14 tavole. Torino 1878. Camilla e Bertolero Editori. Lire 6.

I pochi Trattati speciali, relativi alla teoria delle ombre, come quelli di Tramontini, Bordoni, Vallée, Hachette, Olivier, Leroy, Adhemar, Hummel, Burg, Schreiber, Warren, per citare solo i principali, o di maggior mole*), lasciano a quanto mi sembra, alcunchè a desiderare, per ciò che riguarda l'esposizione scientifica della materia.

Questi libri, per quanto a me pare, difettano di quei principii generali, di quelle vedute sintetiche, della teoria indiscorso, le quali, come tanti fari, possano orientare e dirigere, chi si accinge alla risoluzione dei problemi delle ombre, negli innumerevoli, anzi infiniti casi particolari, che si presentano, o che si possono presentare nella pratica. Se io non m'inganno, manca in codesti libri una

---

*) Le opericciuole di Landriani, Giamb. Berti, Astori Peri, Cicconetti, Pillet, Appel, Raetz, Weishaupt, Dietzel, Klingenfeld, Kreuszel, sebbene più o meno discrete per lo scopo a cui sono destinate, sono però troppo piccole, perchè io le possa quì sopra annoverare.

Tralascio pure di citare per il momento, le bellissime opere di Tilscher, Burmester, Riess, Delabar, che trattano soltanto la teoria del chiaroscuro, e delle quali discorrerò nel secondo fascicolo della sopra indicata mia opera, d'imminente pubblicazione, e nel relativo cenno bibliografico che ne farò per questo Repertorium.

partizione razionale, organica, sistematica della materia; per cui avviene che in alcuni di essi, sono trattate a bel principio delle quistioni complesse, che secondo me, solo più tardi, potrebbero essere svolte ampiamente; e per converso, talune delle quistioni più semplici e rudimentali, sono trattate appena nel mezzo, o verso il fine. Codesti libri non dànno secondo il mio modo di vedere, un esame abbastanza minuto e particola-reggiato delle varie linee d'ombra, si proprie come portate; e neppure le regole più convenienti per poterle tracciare con sicurezza, anche con soli pochi dei loro punti principali.

In nessuno di questi libri è fatto, nè poteva farsi, stante le loro rispettive date, il benchè minimo o fugace cenno degli ultimi risultati della geometria moderna, i quali tanto giovano a semplificare le operazioni, ed a renderle così eleganti.

Pertanto io sono convinto, che deve essere attesa con grande impazienza, e vivamente desiderata, sia dai dotti come dagli studiosi di tale materia, un' opera, la quale fosse possibilmente immune dagli accennati inconvenienti.

A soddisfare tanto legittimo desiderio vorrebbe aspirare il sopra indicato mio libro, del quale ora esce alla luce il primo fascicolo. Lascio ai competenti nella materia il portare un giudizio su questo mio lavoro; io mi accontenterò di dare quì una succinta idea di questo primo fascicolo.

Nella Introduzione a tutta l'opera, parlo dello scopo della teoria delle ombre e del chiaro-scuro; e delle due parti principali in cui essa naturalmente si divide, cioè in quella che tratta delle ombre lineari, ed in quella che tratta del chiaro-scuro.

Il Capitolo I della *Prima parte*, dà le nozioni generali, sulle quali si fonda tutta la teoria delle ombre lineari. Definisco gli importanti concetti, di ombra; d'ombra propria e portata; della separatrice; del contorno dell' ombra portata; del cono o cilindro d'ombra; e della penombra.

Il Capitolo II tratta dell' ombra dei punti. Faccio vedere dapprima in generale, come si possa ottenere l'ombra portata da un punto materiale sopra un corpo qualunque, ed applico poscia questa regola a varii casi particolari, i quali dànno luogo a diversi Problemi, cioè: *di determinare l'ombra portata da un punto*, 1°, sopra i piani di projezione; 2°, sopra un piano qualunque; 3°, sopra un poliedro; 4°, sopra un cono o cilindro; 5°, sopra una sfera; e 6° finalmente, sopra una superficie di rivoluzione qualunque.

Nel Capitolo III tratto dell' ombra delle rette. Definito il piano d'ombra corrispondente ad una data retta, passo a dimostrare, che l'ombra portata da questa retta, è una parte della intersezione di quel piano d'ombra, cogli oggetti circostanti. In seguito a ciò, risolvo i problemi dell'ombra portata da una retta, sopra i piani di projezione; sopra un piano qualunque; su di un poliedro qualunque; sopra un cono od un cilindro; sopra una sfera; e finalmente sopra una superficie di rivoluzione.

Il Capitolo IV tratta dell' ombra dei poligoni e delle curve. Dò in primo luogo il concetto della piramide o del prisma d'ombra corrispondente ad un dato poligono, dal che risulta immediatamente la definizione dell' ombra portata dal poligono stesso, sopra i corpi circostanti.

Dimostro che l' ombra portata da un poligono piano, sopra un piano di projezione, è un poligono *affine* alla projezione omonima di quel poligono. E più in generale, che le ombre portate da una figura obbiettina qualunque, sopra i due piani di projezione, sono due figure *affini*. Passo in seguito allo studio delle ombre delle curve, stabilendo anche quì gli analoghi concetti del cono o del cilindro d'ombra corrispondente ad una data curva, dai quali scaturisce poi la definizione dell' ombra portata dalla curva medesima sopra gli oggetti circostanti. Indico il modo di determinare le tangenti alle linee d'ombra portate dalle curve. Faccio vedere come si possano costruire i punti d' ombra portata da una curva, sopra un' altra curva.

Premessi questi principii per le curve in generale, passo in seguito a trattare particolarmente dell' ombra portata da un circolo sopra i piani di projezione. Suppongo in primo luogo, che il dato circolo sia orizzontale, talchè la sua ombra portate sul piano verticale risulta una ellisse. Espongo un modo semplicissimo di determinare direttamente gli assi della ellisse predetta. In secondo luogo suppongo il dato circolo perpendicolare alla linea di terra. Finalmente lo suppongo disposto in modo qualunque nello spazio. Indico le costruzione più adatte ai differenti casi, traendo alcune utili semplificazioni alle operazioni, dietro *l'affinità* esistente tra l'ombra del dato circolo, ed il circolo stesso ribaltato. Mostro particolarmente anche qui il modo di trovare direttamente gli assi della ellisse, formante l'ombra portata dal dato circolo. Quindi passo allo studio dell'ombra portata da un' elica cilindrica, sopra di un piano perpendicolare all' asse, la quale ombra è una cicloide

allungata, ordinaria, od accorciata, a norma della inclinazione dei vaggi luminosi.

Occupatomi cosi come dissi, nei precedenti Capitoli, con la ricerca dell' ombra portata dai punti e dalle linee, passo nei successivi Capitoli allo studio delle ombre cagionate dai corpi.

Nel Capitolo V tratto dell' ombra dei poliedri. Esamino dapprima quella linea poligonale, che separa la parte illuminata del poliedro, da quella che rimane nell' ombra propria del medesimo, e che chiamo *separatrice.* Stabilita l' idea della separatrice, riesce facilissimo il concetto della piramide o del prisma d'ombra corrispondente ad un dato poliedro. Ricavo poi l'altro concetto importante dell' ombra portata, ossia sbattimento, di un poliedro; e dimostro come il contorno di detta ombra, risulti determinato dalla intersezione del prisma d' ombra cogli oggetti circostanti. Da ciò s'inferisce che il problema dell' ombra portata da un poliedro, è ridotto ad uno dei problemi trattati nel principio del Capitolo IV, quando però bene inteso, si sappia determinane previamente la separatrice di quel poliedro qalunque. Di quest' ultimo problema mi occupo con la dovuta estensione, prima in generale, e poscia in particolare ai prismi ed alle piramidi. Considerati dapprima i poliedri isolatamente, li passo dappoi ad esaminare raggruppati variamente tro loro, lo che mi porge occasione ad alcuni studii speciali d' ombre, importantissimi nellà pratica. Termino questo capitolo accennando anche al modo di trovave l' ombra portata da un poliedro, sopra una superficie curva qualunque.

Il Capitolo VI tratta dell' ombra delle superficie curve in generale. Anche qui stabilisco dapprima il concetto, tanto importante della separatrice, cioè di quella linea che divide la parte illuminata, da quella in ombra della superficie data. Poscia l' idea del cilindro d' ombra corrispondente ad una data superficie. Dopo ciò nasce immediatamente l' idea del contorno dell' ombra portata da una superficie qualunque, sopra gli oggeti circostanti. Espongo in via generale i varii metodi stati proposti dai geometri, per costruire la separatrice di una data superficie, cioè il metodo dei *piani seganti*; quello dei *piani tangenziali*; quello delle *superficie invilluppate*; e quello finalmente delle *projezioni oblique*, o *centrali.*

Parlo del modo di determinare la tangente in un dato punto qualunque della separatrice, serverdomi del teorema delle tangenti conjugate di Dupin.

Esposte succintamente in questo capitolo le nozioni generali,

relative alle ombre di una superficie qualsivoglia, ne faccio nei seguenti, le applicazioni alle principali famiglie di superficie.

Nel Capitolo VII tratto dell' ombra delle superficie sviluppabili. Di mostro che la separatrice delle superficie sviluppabili, è formata in generale, da un determinato numero di generatrici rettilinee delle medesime.

Considero in primo luogo il cilindro in varie posizioni, e ne determino l'ombra portata sui piani di projezione. Determino l'ombra portata da un semicilindro cavo, sopra se stesso. Infine studio le ombre portate da cilindri variamente combinati tra loro.

In secondo luogo considero il cono, del quale determino l'ombra portata sui piani di projezione; e poi l'ombra portata da un mezzo cono cavo sopra se stesso. Quindi esamino le ombre portate da varii coni e cilindri raggruppati in diversi modi tra loro.

Per ultimo passo allo studio delle ombre delle superficie sviluppabili generali, facendo uso del cono direttore delle medesime.

Il Capitolo VIII tratta dell' ombra della sfera, e dell' ellissoide.

Dopo di aver dimostrato che la separatrice di una sfera è un circolo, insegno a determinare codesto circolo con due procedimenti diversi. Ottenuta la separatrice di una data sfera, insegno a trovarne l'ombra portata sui piani di projezione, e sopra di un cono. Passo in seguito ad esaminare le cavità sferiche, e qui mi si presenta l'occasione di trattare dell' ombra della nicchia e della cupola sferica.

Termino questo capitolo mostrando un modo semplicissimo di determinare la separatrice di un ellissoide qualunque, che è la ellise situata nel piano diametrale conjugato alla direzione dei raggi luminosi.

Il Capitolo IX tratta dell' ombra delle superficie di rivoluzione.

Incomincio ad esporre succintamente i tre metodi di determinare la separatrice delle superficie di rivoluzione servendosi: 1⁰ dei *coni tangenti*; 2⁰ dei *cilindri tangenti*, e 3⁰ delle *sfere tangenti*. Questi tre metodi vengono in seguito applicati a particolari superficie di rivoluzione, e specialmente a quelle del secondo ordine. Discorro in seguito della simmetria della separatrice. Mostro di poi anche l'uso delle projezioni obblique, o centrale, per determinare la separatrice di una superficie di rivoluzione, lo che mi offre l'occasione di parlare di un bellissimo teorema dovuto a Dunesme.

Passo in seguito allo studio della separatrice del *toro*, considerato come la superficie inviluppante delle consecutive posizioni di una sfera, che ruota intorno ad una netta fissa, applicando il me-

todo delle superficie inviluppate. E con tale ricerca finisce il **primo** fascicolo.

Il secondo ed ultimo fascicolo dell' opera, che uscirà **tra breve**, conterrà il seguito dell' ombra delle superficie di rivoluzione; **nonchè** due Capitoli consacrati alle ombre delle superficie elicoidali, e **delle** superficie gobbe; ed oltre a ciò la trattazione completa **della** seconda parte dell' opera, cioè: del chiaro-scuro.

Torino, 15. Giugno 1878. Ing. D. Tessari,
Prof. al R. Museo Industriale di Torino.

A. Brill: Ueber die Hesse'sche Curve. Aus den Mathematischen Annalen Bd. XIII. p. 175.

Vorliegende Note beschäftigt sich mit den Eigenschaften des Schnittpunktsystems der Hesse'schen Curve H einer algebraischen Curve f in einem mehrfachen Punkt der Letzteren. Es wird namentlich das Verhalten bestimmt, welches in diesem Punkt einer anderen (etwa auch zerfallenden) Curve φ vorgeschrieben werden muss, damit dieselbe durch die Hesse'sche Curve an dieser Stelle „ersetzt“ werden könne, d. h. damit in der Umgebung des betreffenden Punktes die Identität bestehe:

$$H \equiv \alpha \cdot \varphi + \beta \cdot f,$$

wo $\alpha = 0$, $\beta = 0$ irgend andere Curven sind. In einem Doppelpunkt D z. B. von f hat φ die gewünschte Eigenschaft, wenn $\varphi = 0$ durch D überhaupt nicht oder nur ein- oder zweimal hindurchgeht. Besitzt φ in D einen dreifachen Punkt, so haben die Tangenten einer gewissen involutorischen Bedingung zu genügen.

Für die rationale Curve 4. Ordnung erfüllt diese Bedingung das Product aus den Verbindungslinien der drei Doppelpunkte in einen gewissen durch dieselben gehenden Kegelschnitt. Man kann hier die obige in der Nähe der Doppelpunkte erfüllte Identität durch einen linearen Factor, den man H noch zufügt, in eine für die ganze Curve geltende verwandeln. $\alpha = 0$ ist dann die Gleichung eines durch die übrigen Schnittpunkte von H mit f, d. h. durch die sechs Wendepunkte der rationalen Curve 4. Ordnung gehenden Kegelschnitts.

Hiermit ist ein früher von dem Verfasser gelegentlich gefundener Satz auf directem Wege bewiesen.

Mathematische Modelle in Gips, nach den im mathematischeu Institut der k. technischen Hochschule zu München ausgeführten Originalen. Mit begleitendem Text. Verlag von L. Brill in Darmstadt.
Serie I. Ausgeführt unter Leitung von Prof. Brill.
Serie II. Ausgeführt unter Leitung der Professoren Brill und Klein.

Diese von Studirenden der Mathematik angefertigten Modelle (die Autoren zugleich auch der beigefügten erläuternden Abhandlungen sind: J. Bacharach, A. v. Braunmühl, W. Dyck, K. Rohn, L. Schleiermacher) verdanken ihre Entstehung dem Wunsche, die Theilnehmer an den mathematischen Seminarien zu möglichst vollständiger, auch numerischer Durchführung eines und des anderen der behandelten Probleme anzuregen und so rückwirkend ein eingehenderes Studium desselben überhaupt zu veranlassen. Die Aufgaben, an welche die Modelle anknüpfen, sind dem Lehrstoff verschiedener Vorlesungen entnommen, welche an der technischen Hochschule gehalten werden. Die Modelle erheben also nicht den Anspruch, etwas in sich Abgeschlossenes zu geben, noch wollen sie allen Anforderungen eines weiteren Gesichtskreises genügen. Bei dem fühlbaren Mangel jedoch an derartigen Anschauungsmitteln konnte gegen eine von Seiten des Verlegers angebotene Vervielfältigung und Verbreitung der Modelle nichts erinnert werden, zumal da dieselben auch in dieser Form wohl manches Neue und des Interesses Werthe bieten, wie denn die beigefügten Abhandlungen zum Theil wirklich selbständige Untersuchungen darstellen.

München, im Juni 1878. A. Brill.

L. Koenigsberger: Reduction des Transformationsproblems der hyperelliptischen Integrale. (Clebsch's Annalen B. 13.)

In der im Journal für Mathematik B. 81. H. 3 veröffentlichten Arbeit „über die allgemeinsten Beziehungen zwischen hyperelliptischen Integralen“ zeigte ich, dass, wenn zwischen hyperelliptischen Integralen verschiedener Ordnung irgendeine in den Integralen lineare Relation mit constanten Coefficienten besteht (und diese ist nach dem von mir in demselben Journale B. 84. H. 4 bewiesenen allgemeinen Satze „über die algebraischen Beziehungen zwischen In-

tegralen verschiedener Differentialgleichungen der allgemeinsten algebraischen Relation zwischen jenen Integralen aequivalent), für je zwei solche in der angenommenen Beziehung vorkommende hyperelliptische Integrale

$$\int^{z_1} f(z, \sqrt{R(z)})\,dz \quad \text{und} \quad \int^{y} F(y, \sqrt{R_1(y)})\,dy,$$

in denen

$$\sqrt{R(z)} = \sqrt{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_{2p+1})}$$
$$\sqrt{R_1(y)} = \sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{2\sigma+1})}$$

ist, zwischen den Differentialien der zugehörigen hyperelliptischen Integrale erster Gattung die Relation stattfindet

$$\frac{dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{F_0(z_1)dz_1}{\sqrt{R(z_1)}},$$
$$\frac{y_1 dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2 dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{y_\sigma dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{F_1(z_1)dz_1}{\sqrt{R(z_1)}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{y_1^{\sigma-1} dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2^{\sigma-1} dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{y_\sigma^{\sigma-1} dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{F_{\sigma-1}(z_1)dz_1}{\sqrt{R(z_1)}};$$

in derselben bedeuten

$$F_0(z_1),\ F_1(z_1),\ \ldots\ F_{\sigma-1}(z_1)$$

ganze Functionen $\sigma - 1^{\text{ten}}$ Grades von z_1,

$$y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_\sigma$$

Lösungen einer algebraischen Gleichung

$$(2) \qquad y^\sigma + f_1(z_1, \sqrt{R(z_1)})y^{\sigma-1} + \cdots + f_\sigma(z_1, \sqrt{R(z_1)}) = 0,$$

in welcher

$$f_1,\ f_2,\ \ldots\ f_\sigma$$

rationale Functionen von z_1 und $\sqrt{R(z_1)}$ vorstellen, und

$$\sqrt{R_1(y_1)},\ \sqrt{R_1(y_2)},\ \ldots\ \sqrt{R_1(y_\sigma)}$$

lassen sich mit Hülfe eben dieser Grössen z_1 und $\sqrt{R(z_1)}$ rational durch die resp. y in der Form

$$(3) \qquad \sqrt{R_1(y_r)} = \varphi(y_r,\ z_1,\ \sqrt{R(z_1)})$$

ausdrücken.

Die Beziehungen zwischen den Integralgränzen lassen sich jedoch noch vereinfachen, und die folgende Reduction des Problems führt zu einem Ergebniss, welches weitere Einsicht in die allgemeine

Transformationstheorie gestattet und mir für die Behandlung der Frage der Integralrechnung, welche hyperelliptische Integrale irgend einer Ordnung auf solche von niederer Ordnung reducirbar sind, wesentlich zu sein scheint.

Es lässt sich nämlich dadurch, dass in der Gleichung

$$\frac{y_1^k dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2^k dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{y_\sigma^k dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{F_k(z_1) dz_1}{\sqrt{R_1(z_1)}}$$

die Irrationalität

$$-\sqrt{R(z_1)} \quad \text{statt} \quad \sqrt{R(z_1)}$$

gesetzt wird, durch Verbindung der so entstehenden Gleichung

$$\frac{\eta_1^k d\eta_1}{\sqrt{R_1(\eta_1)}} + \frac{\eta_2^k d\eta_2}{\sqrt{R_1(\eta_2)}} + \cdots + \frac{\eta_\sigma^k d\eta_\sigma}{\sqrt{R_1(\eta_\sigma)}} = -\frac{F_k(z_1) dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}$$

mit der vorigen mit Hülfe unmittelbarer Anwendung des Abel'schen Theorems nachweisen,

dass sich das oben aufgestellte System hyperelliptischer Differentialgleichungen in allen Fällen durch das folgende:

$$\frac{dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}} = \frac{2F_0(z_1) dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}$$

$$\frac{Y_1 dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{Y_2 dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{Y_\sigma dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}} = \frac{2F_1(z_1) dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{Y_1^{\sigma-1} dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{Y_2^{\sigma-1} dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{Y_\sigma^{\sigma-1} dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}} = \frac{2F_{\sigma-1}(z_1) dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}$$

ersetzen lässt, in welchem

$$Y_1, \; Y_2, \cdots Y_\sigma$$

die Lösungen einer algebraischen Gleichung darstellen, deren Coefficienten rationale Functionen von z_1 sind, und

$$\sqrt{R_1(Y_1)}, \; \sqrt{R_1(Y_2)}, \; \ldots \; \sqrt{R_1(Y_\sigma)}$$

sich als rationale Functionen der zugehörigen Y-Grössen und z_1 ausdrücken lassen, multiplicirt mit $\sqrt{R(z_1)}$,

ein Satz, der auch aus der Transformation der ϑ-Functionen der hyperelliptischen Integrale hergeleitet werden kann.

Wie die eben besprochene Vereinfachung des Transformationsproblems zur Herstellung beliebig vieler hyperelliptischer Integrale verwendet werden kann, die auf ebensolche Integrale niederer Ordnung reducirt werden können, ist leicht einzusehen; ich referirte

im vorigen Hefte des Repertoriums über eine Untersuchung, in welcher ich eine Anwendung des obigen Satzes auf die Ermittelung von hyperelliptischen Integralen gab, welche auf elliptische Integrale zurückführbar sind.

Wien. **Leo Koenigsberger.**

F. Klein: Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades.
(Math. Ann. Bd. XIV. p. 111 ff.)

Durch meine „*Untersuchungen über das Ikosaeder*" (Math. Ann. XII) und Gordans eng damit zusammenhängende Arbeit „*Ueber die Auflösungen der Gleichungen 5. Grades*" (ebenda, Bd. XIII), sind zunächst nur die *algebraischen* Methoden, deren man bei Behandlung der allgemeinen Gleichungen fünften Grades bedarf, in neuer Klarheit dargelegt und weiter entwickelt worden. Ich wünschte in ähnlich anschaulicher Weise die Rolle zu kennzeichnen, welche die *elliptischen Functionen* in dieser Theorie spielen, und so ist die Abhandlung entstanden, über welche ich heute zu berichten habe. Zunächst bestimmt, meine früheren Untersuchen über Gleichungen fünften Grades zu vervollständigen, soll sie zugleich den Zugang zu umfassenderen Fragen eröffnen und also eine Vorarbeit für weitere Untersuchungen sein. Ich darf in dieser Beziehung anführen, dass ich in den Erlanger Berichten (März und Mai 1878) bereits zwei Noten über diejenigen Gleichungen *siebenten* Grades veröffentlichte, welche die Gruppe der Modulargleichung haben.

Mein Ausgangspunkt ist der, dass ich die functionentheoretische Abhängigkeit zwischen dem Periodenverhältniss $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ des elliptischen Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$ und der absoluten Invariante $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$ der binären biquadratischen Form $f(x)$ in geometrisch anschaulicher Weise erfasse. Durchläuft J seine positive, oder negative Halbebene, so bewegt sich ω über ein Kreisbogendreieck, das Winkel $= \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 0$ besitzt, welche $J = 0, 1, \infty$ entsprechen. Derartiger Dreiecke legen sich in der ω-Ebene unbegränzt viele nach dem Principe der Symmetrie lückenlos und einfach nebeneinander, wie es neuerdings auch von Hrn. Dedekind in seinem Aufsatze über

Modulfunctionen (Borchardt's Journal, Bd. 83) nachgewiesen ist, — und nun ist mein Grundgedanke, diese „Dreiecksfigur" in ähnlicher Weise, zunächst für die Transformationstheorie, zu benutzen, wie man es seit langer Zeit in der Theorie der doppeltperiodischen Functionen mit den aneinander gereihten Parallelogrammen macht. Es sei J' die Invariante eines elliptischen Integrals, welches aus dem ursprünglichen durch Transformation n^{ter} Ordnung hervorgeht, wo n eine Primzahl bedeuten mag. Dann ist J' mit J, wie bekannt, durch eine Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades verbunden. Um sie zu gewinnen, studire ich vor allen Dingen, mit Hülfe der Dreiecksfigur, die *Verzweigung*, welche J' als Function von J besitzt. Dabei erweist sich das Geschlecht p der betreffenden Riemann'schen Fläche gleich *Null* für $p = 2, 3, 5, 7, 13$, und man kann also in diesen Fällen J und J' als rationale Functionen eines Parameters τ aufstellen. Nun sind diese rationalen Functionen, wie sich zeigt, durch die Vielfachheit gewisser Factoren völlig bestimmt — und es liegt also hier ein neuer Weg zur Aufstellung dieser Transformationsgleichungen vor, der ebensowohl von der Integrationsvariablen des elliptischen Integrals als auch von den Reihenentwickelungen absieht, welche J mit ω verknüpfen. Ich stelle hier meine Formeln für $n = 5, 7, 13$ zusammen. Der Symmetrie wegen sind J und J' jedesmal durch zwei Grössen τ und τ' in durchaus gleicher Weise rational ausgedrückt, und dann die Relation zwischen τ und τ' angegeben.*)

1) *Transformation fünfter Ordnung.*

$$(1)\begin{cases} J:J-1:1=(\tau^2-10\tau+5)^3:(\tau^2-22\tau+125)(\tau^2-4\tau-1)^2:-1728\tau, \\ J' \text{ ebenso in } \tau', \\ \tau\tau'=125 \end{cases}$$

2) *Transformation siebenter Ordnung.*

$$(2)\begin{cases} J:J-1:1=(\tau^2+13\tau+49)(\tau^2+5\tau+1)^3 \\ \qquad :(\tau^4+14\tau^3+63\tau^2+70\tau-7)^2 \\ \qquad : 1728\tau, \\ J' \text{ ebenso in } \tau', \\ \tau\tau'=49 \end{cases}$$

*) Eben diese Formeln theilte ich am 10. Mai 1878 der London Mathematical Society mit.

3) *Transformation dreizehnter Ordnung.*

$$(3)\begin{cases} J:J-1:1=(\tau^2+5\tau+13)(\tau^4+7\tau^3+20\tau^2+19\tau+1)^3 \\ \qquad :(\tau^2+6\tau+13)(\tau^6+10\tau^5+46\tau^4+108\tau^3+122\tau^2+38\tau-1)^2 \\ \qquad : 1728\tau, \\ J' \text{ ebenso in } \tau', \\ \qquad \tau\tau' = 13. \end{cases}$$

Will man τ auf transcendentem Wege, als Function von $q = e^{i\pi\omega}$, berechnen, so ergibt sich für 1), 2), 3) bezüglich:

$$\tau = 125M^3,\ 49M^2,\ 13M,$$

wo

$$M = \frac{1}{n} \cdot \frac{q^{\frac{1}{6n}} \cdot \Pi(1-q^{\frac{2\nu}{n}})^2}{q^{\frac{1}{6}} \cdot \Pi(1-q^{2\nu})^2}.$$

Die Frage, die ich nun vor Allem ins Auge fasse, ist diese: *Was haben die Jakobischen Gleichungen sechsten Grades, was hat weiterhin die Ikosaedergleichung mit der für $n = 5$ gewonnenen Transformationsgleichung (1) zu thun?*

Der Uebergang zu den Jakobischen Gleichungen sechsten Grades wird am einfachsten durch die Formel angegeben. Man setze in (1) $\tau = 125M^3 = \mathfrak{z}^3$. So kommt:

$$\mathfrak{z}^6 - 10\mathfrak{z}^3 + 12\frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}\cdot\mathfrak{z} + 5 = 0$$

und diess ist ohne Weiteres die Jakobische Gleichung mit „$A = 0$", welche Kronecker bei seiner Auflösung der Gleichungen fünften Grades benutzte. Sie erscheint bei ihm nur desshalb unter etwas complicirterer Form, weil er sich statt der rationalen Invarianten g_2, Δ des Moduls k^2 bediente.

Die *Ikosaedergleichung* aber erweist sich als *einfachste Form, deren die Galois'sche Resolvente der Transformationsgleichung (1) fähig ist.* Auch hier wieder untersuche ich zunächst, wie die Wurzel der Galois'schen Resolvente als Function von J verzweigt ist. Man erhält eine 60-blättrige Fläche, deren Blätter bei $J = 0$ zu je 3, bei $J = 1$ zu je 2, bei $J = \infty$ zu je 5 zusammenhängen. In Folge dessen ist wieder $p = 0$, und man wird also die Galois'sche Resolvente in einfachster Form gewinnen, wenn man diejenige Function η als Unbekannte einführt, welche in der Riemann'schen Fläche jeden Werth nur einmal annimmt. Das aber liefert genau die *Ikosaedergleichung*:

$$J : J - 1 : 1 = 1728\,H^3(\eta) : \tfrac{1}{12}\,T^2(\eta) : f^5(\eta),$$

wo f, homogen geschrieben, $= \eta_1\eta_2(\eta_1^{10} + 11\eta_1^5\eta_2^5 - \eta_2^{10})$ ist und H die Hesse'sche Form von f, T die Functionaldeterminante beider bedeutet. — Durch die Symmetrieebenen des Ikosaeders wird die Kugeloberfläche in 120 Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{5}$ zerlegt. Die Beziehung zwischen η und ω ist dann, geometrisch ausgesprochen, einfach die, dass sich η über eins der 120 Dreiecke bewegt, wenn ω ein Dreieck der zu Eingang beschriebenen Art durchwandert. Analytisch aber erhält man:

$$\eta = q^{-\frac{2}{5}}\,\frac{1 + q^2 - q^6 - q^{14} - q^{16} - q^{28} + q^{40} + \cdots}{-1 + q^{10} + q^{20} - q^{50} + \cdots},$$

$$= -\,q^{-\frac{2}{5}}\,\frac{-1 + q^{10} + q^{20} - q^{50} + \cdots}{-1 + q^2 - q^4 + q^8 + q^{22} - q^{30} + q^{36} - q^{46} + \cdots}.$$

Ist so die Bedeutung, welche die Ikosaedergleichnng für die Transformation fünfter Ordnung (oder diese für jene) besitzt, scharf gekennzeichnet, so wende ich mich zum Schlusse dazu, diejenigen Formeln, welche Hermite und Brioschi bei der Auflösung der Gleichungen fünften Grades durch elliptische Functionen benutzen, vom Ikosaeder aus abzuleiten. Ich bedarf dabei des Nachweises, dass für die Ikosaederirrationalität *Modulargleichungen* bestehen und dass diese in den einfachsten Fällen auf Grund der Gordan'schen Untersuchungen (s. o.) ohne Weiteres hervorgehen. Sind J und J' durch Transformation n^{ter} Ordnung verknüpft, wo n eine von 5 verschiedene Primzahl ist, so besteht zwischen den zugehörigen Ikosaederirrationalitäten η, η' eine Gleichung vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade. Nimmt man insbesondere $n = 2$, so kommt eine Gleichung dritten Grades, und eben diese ist es, deren man beim Uebergang zur Jerrard'schen Form bedarf.

Wegen der näheren Ausführung und mannigfacher sich anknüpfender Fragestellungen muss ich auf die Arbeit selbst verweisen.

München, den 5. Juli 1878. F. Klein.

M. Noether: Zur Theorie der Thetafunctionen von vier Argumenten. (Mathem. Annal. XIV.)

Ich löse in dieser Abhandlung die Aufgabe, das Additionstheorem für die allgemeinen ϑ-Functionen von vier Argumenten in expliciter Form aufzustellen. Man kennt bisher das Theorem

für die hyperelliptischen ϑ-Functionen, nach Weierstrass (Königsberger, Transformation der Abel'schen Functionen, Borch. J. 64), und für die allgemeinen ϑ-Functionen von drei Argumenten durch Weber (Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3). Es hat sich nun darum gehandelt, die Theorie der Gruppirung der Charakteristiken der verschiedenen ϑ-Functionen, welche in beiden Fällen zur Coefficientenbestimmung in dem Theorem geführt hat, weiter auszubilden.

Herr Weber hat die Charakteristiken

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

wo die n_a und m_a nur die Werthe 0 oder 1 annehmen, in Systeme von 7 geordnet, von folgenden Eigenschaften: Die Summe von irgend 3 oder 7 des Systems soll gerade, jede und die Summe von irgend 5 ungerade sein. Dabei ist unter Summe zweier Charakteristiken eine solche verstanden, deren Elemente die Summen entsprechender Elemente der beiden (mod. 2) sind, und (α) ist gerade oder ungerade, je nachdem $\Sigma n_a m_a$ gerade oder ungerade ist.

Ich erkenne nun überhaupt diesen Charakter des Geraden oder Ungeraden für die Summe irgend einer ungeraden Anzahl von Charakteristiken als die wesentliche Eigenschaft aller Charakteristikensysteme. Hierdurch werde ich dazu geführt, 7-Systeme und 8-Systeme ungerader vierreihiger Charakteristiken

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{pmatrix}$$

zu betrachten, welche genau dieselben Eigenschaften haben, wie die ebengenannten 7-Systeme dreireihiger Charakteristiken. Für Summen einer geraden Anzahl von Charakteristiken ist nur eine gewisse Gruppenbeziehung zwischen zwei solchen Summen wesentlich; und man kommt hierbei zu $\frac{255 \cdot 64}{2}$ Systemen von je 28 ungeraden Charakteristiken, welche alle in ihren Gruppirungen völlig identisch sind mit denjenigen der 28 überhaupt existirenden ungeraden dreireihigen Charakteristiken. Von den genannten 8-Systemen existiren $255 \cdot 64 \cdot 36$ Systeme, die in 255 Gruppen, jede von 36 Klassen, jede dieser wieder von 64 Systemen zerfallen; und um alle Charakteristiken auszudrücken, genügte es, ein 8-System zu kennen, was von 3 Gleichungen der Grade 255, 36, 64 die Aufsuchung je einer Wurzel und die Lösung einer Gleichung 8ten Grades verlangt.

Unter Zugrundelegung von ϑ-Functionen, deren Indices mit diesen 8-Systemen zusammenhängen, nimmt nun das Additionstheorem eine sehr einfache Gestalt an. Man erhält

$$\vartheta(u+v+w)\ \ \vartheta(u-v)$$

linear ausgedrückt durch 16 ϑ-Producte

$$\vartheta_\alpha(u+w)\cdot\vartheta_\alpha(u),$$

mit Coefficienten von der Form

$$B\cdot\vartheta_\beta(v+w)\,\vartheta_\beta(v)+C\cdot\vartheta_\gamma(v+w)\,\vartheta_\gamma(v),$$

während die B, C nur von w abhängen. Durch Specialisirung von w kann man auch alle 16 Coefficienten eingliedrig machen, wodurch dann die Analogie mit den früher bekannten Theoremen vollständig wird. Für die 8-fach periodischen Functionen

$$\frac{\vartheta_\alpha(u+v)}{\vartheta(u+v)}$$

kann man dagegen diese Eingliedrigkeit nicht mehr für alle Coefficienten in Zähler und Nenner erzielen, wenn der Nenner der Ausdrücke für alle 256 Indices (α) derselbe sein soll.

Von besonderen Formeln, welche die allgemeine Theorie ergibt, sind besonders die Relationen zwischen vier Thetaproducten für die Argumente 0 hervorzuheben. Sie zeigen z. B., dass das Verschwinden von irgend drei geraden ϑ-Functionen mit Nullargumenten, für welche die Summe der drei Charakteristiken ungerade ist, schon das Verschwinden von 7 weiteren solchen Functionen bewirkt, also hinreichend ist, dass die ϑ-Functionen hyperelliptische werden.

Es scheint mir noch der Beachtung werth, dass der Hinweis auf die Gruppirungen unter den Charakteristiken, durch die allein die Aufstellung der Additionstheoreme der ϑ-Functionen ermöglicht ist, durchaus von algebraischer Seite her erfolgt ist. Zunächst durch die Berührungsprobleme von Clebsch (vgl. C. Jordan's „traité des substitutions“, p. 229 ff.); die 7-Systeme für $p=3$ durch die 7-Systeme von Doppeltangenten bei Curven 4[ter] Ordnung, die Aronhold (Monatsber. d. Berl. Akad. 1864) gefunden hat; die Systeme 4-reihiger Charakteristiken endlich durch algebraische Untersuchungen an speciellen Curven vom Geschlecht 4, die ich zum Theil schon in einer Note (Erlanger Berichte, vom Januar 1878) mitgetheilt habe, auf die ich aber erst bei einer anderen Gelegenheit zurückkommen werde.

Erlangen. M. Noether.

August Weiler: Nachträge zu meinen Abhandlungen über Integration partieller Differentialgleichungen der ersten Ordnung. (Zeitschrift für Math. und Physik. 1877. S. 100—125.)

1. Die Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung habe ich auf Betrachtungen gegründet, welche zum Theil verschieden sind von den Jacobi'schen. Zwei wichtige Resultate, zu welchen ich gelangt bin, liegen der Jacobi'schen Methode fern. Ich habe dieselben in diesem Repertorium Bd. I, S. 293—298 mitgetheilt. Es sind aber unterdessen Urtheile über meine Methode laut geworden, welche einen weniger günstigen Eindruck machen, und haben mich dieselben veranlasst, die oben erwähnten Nachträge zu schreiben.

Dem Leser des Repertoriums ist es bekannt, was Herr Mayer Bd. I, S. 75 über meine Methode gesagt hat. In seinem umfänglichen Werke über partielle Differentialgleichungen beabsichtigt Herr Mansion einen vollständigen Bericht über die bekannten Methoden zu geben. Der Verfasser kennt aber meine Methode nur aus der von Clebsch gegebenen Darstellung. Er würde dieser Darstellung sonst nicht ein so grosses Lob ertheilt haben (vgl. Repertorium Bd. I, S. 38, ferner 1875 §. 6). Auch anderseits ist es als ein Mangel erkannt worden, dass Herr Mansion meine Methode nicht in ihrer wahren Gestalt gegeben hat, und darf ich auf die Hist. lit. Abth. der Zeitschr. für Math. und Physik 1877, S. 41 verweisen. In seiner neuesten Abhandlung über partielle Differentialgleichungen bedauert Herr Sophus Lie, dass ihm meine Darstellung der Methode unzugänglich gewesen sei (Math. Annalen Bd. XI, S. 532).

Ich meinerseits bin der Ansicht, dass meine Methode einfach und auch leichtverständlich ist. Es liegen also Meinungsverschiedenheiten vor, und ich will annehmen, dass es für den Leser eine nicht leichte Aufgabe sei, ein selbständiges Urtheil über das zu bilden, was die Berichterstatter schwerverständlich und unzugänglich genannt haben. Ich habe neulich Resultate mitgetheilt; es möge mir gestattet sein, diesmal die Methode zu besprechen.

2. Die partielle Differentialgleichung

$$1)\qquad A_1 \frac{d\varphi}{dx_1} + A_2 \frac{d\varphi}{dx_2} + A_3 \frac{d\varphi}{dx_3} + \cdots + A_n \frac{d\varphi}{dx_n} = 0,$$

worin φ eine gesuchte Function, und die Coefficienten $A_1\, A_2 \cdots A_n$ gegebene Functionen der n unabhängigen Veränderlichen $x_1\, x_2\, x_3 \cdots x_n$

sind, hat bekanntlich $n-1$ verschiedene Lösungen. Hat man eine zweite partielle Differentialgleichung

$$2)\qquad B_1\frac{d\varphi}{dx_1}+B_2\frac{d\varphi}{dx_2}+B_3\frac{d\varphi}{dx_3}+\cdots+B_n\frac{d\varphi}{dx_n}=0,$$

so kann es gemeinsame Lösungen geben. Die Anzahl der gemeinsamen Lösungen ist aber höchstens $n-2$. Wenn es $n-2$ gemeinsame Lösungen gibt, so nennt man das System der 2 partiellen Differentialgleichungen ein vollständiges. Wenn m derartige partielle Differentialgleichungen vorliegen, so bilden dieselben ein vollständiges System für den Fall, dass $n-m$ gemeinsame Lösungen vorhanden sind.

Wenn m partielle Differentialgleichungen ein vollständiges System bilden, so darf man dasselbe durch eben so viele lineare Verbindungen ersetzen. Die neuen Differentialgleichungen bilden gleichfalls ein vollständiges System. Denn sie haben $n-m$ gemeinsame Lösungen. Man kann aber nicht behaupten, dass irgend i dieser m partiellen Differentialgleichungen für sich genommen ein vollständiges System bilden. Sie müssten dann $n-i$ gemeinsame Lösungen haben; aber man weiss nur, dass deren $n-m$ vorhanden sind.

Wenn m partielle Differentialgleichungen von der obigen Form ein vollständiges System bilden, so entsteht durch die Elimination des Differentialquotienten $\frac{d\varphi}{dx_1}$ ein System von $m-1$ partiellen Differentialgleichungen, welches gleichfalls ein vollständiges ist. Es steht mir frei, die Grösse x_1 als Veränderliche mitzuzählen, also anzunehmen, dass auch das neue System die n unabhängigen Veränderlichen $x_1\,x_2\,x_3\cdots x_n$ habe. Das neue System hat die Lösung $\varphi=x_1$, welche nicht eine Lösung des ursprünglichen Systems ist. Es hat ausserdem die $n-m$ Lösungen des ursprünglichen Systems. Es ist ein vollständiges, weil es $n-m+1$ Lösungen hat. Eliminirt man die i partiellen Differentialquotienten $\frac{d\varphi}{dx_1}, \frac{d\varphi}{dx_2}\cdots\frac{d\varphi}{dx_i}$ des ursprünglichen Systems, so erhält man ein System von $m-i$ partiellen Differentialgleichungen, welches gleichfalls ein vollständiges ist. Denn das neue System hat die Lösungen $\varphi=x_1$, $\varphi=x_2\cdots\varphi=x_i$, welche nicht Lösungen des ursprünglichen Systems sind. Ausserdem hat es die $n-m$ Lösungen des ursprünglichen Systems. Es ist ein vollständiges, weil es $n-m+i$ Lösungen hat.

3. Die Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichung $\varphi_1(zx_1x_2\cdots x_n p_1\,p_2\cdots p_n)=0$, worin $p_i=\frac{dz}{dx_i}$ ist, lässt sich

auf die Integration vollständiger Systeme partieller Differentialgleichungen von linearer Form zurückführen. Bei der Integration des vollständigen Systems setzt Jacobi eine Eigenschaft voraus, welche nicht jedes vollständige System hat. Ich habe das vollständige System unabhängig von dieser besonderen Form integrirt, und dies hat mich in den Stand gesetzt, die Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichung $\varphi_1 = 0$ erfolgreicher durchzuführen, als es Jacobi möglich gewesen ist. Ich werde nun aus den oben aufgestellten Grundeigenschaften des vollständigen Systems einige Folgerungen ziehen, welche dem vorliegenden Zwecke dienlich sind.

Die Lösung des vollständigen Systems der Gleichungen 1 und 2, welche wir nun abkürzend $A(\varphi) = 0$, $B(\varphi) = 0$ schreiben, ist zunächst als eine Function der n Veränderlichen $x_1\, x_2 \cdots x_n$ zu betrachten. Wenn aber die $n - 1$ Lösungen der Gleichung $B(\varphi) = 0$ bekannt sind, so ist sie eine Function von nur $n - 1$ veränderlichen Grössen. Man führe die $n - 1$ Lösungen $\varphi = \beta_1$, $\varphi = \beta_2 \cdots \varphi = \beta_{n-1}$ der Gleichung $B(\varphi) = 0$ als unabhängige Veränderliche in die Gleichung $A(\varphi) = 0$ ein, und es entsteht die transformirte Gleichung:

$$A(\beta_1)\frac{d\varphi}{d\beta_1} + A(\beta_2)\frac{d\varphi}{d\beta_2} + A(\beta_3)\frac{d\varphi}{d\beta_3} + \cdots + A(\beta_{n-1})\frac{d\varphi}{d\beta_{n-1}} = 0 \cdot$$

Man theile nun durch $A(\beta_1)$, damit der Coefficient von $\frac{d\varphi}{d\beta_1}$ zur Einheit werde. Alle übrigen Coefficienten gehen dann über in Functionen der $n - 1$ Veränderlichen $\beta_1\, \beta_2 \cdots \beta_{n-1}$. Eliminirt man vermittelst der Gleichungen $\varphi = \beta_1$, $\varphi = \beta_2 \cdots \varphi = \beta_{n-1}$ die ursprünglichen Veränderlichen $x_1\, x_2 \cdots x_{n-1}$ aus den Coefficienten, so fällt auch die Veränderliche x_n aus denselben hinaus. Wenn nur 2 Lösungen $\varphi = \beta_1$, $\varphi = \beta_2$ der Gleichung $B(\varphi) = 0$ gegeben sind, so ist der Quotient der diesen 2 Veränderlichen entsprechenden Coefficienten der transformirten Gleichung, welcher sich $A(\beta_2) : A(\beta_1)$ schreibt, eine Function der $n - 1$ Veränderlichen $\beta_1\, \beta_2 \cdots \beta_{n-1}$ und daher auch eine Lösung der Gleichung $B(\varphi) = 0$. Auf diesem Wege gelange ich, wenn 2 Lösungen der Gleichung $B(\varphi) = 0$ gegeben sind, zu weiteren Lösungen dieser Gleichung. Ich erhalte, wenn nicht alle $n - 1$, jedenfalls doch so viele Lösungen der Gleichung $B(\varphi) = 0$, als nöthig sind, um die Lösung des Systems als Function davon darstellen zu können (Zeitschr. für Math. u. Ph. 1875 S. 87).

Die Lösung des vollständigen Systems von $i + 1$ partiellen Differentialgleichungen $A(\varphi) = 0$, $B(\varphi) = 0 \cdots K(\varphi) = 0$ ist zu-

nächst wieder als eine Function der n Veränderlichen $x_1\, x_2 \cdots x_n$ zu betrachten. Wenn aber die $n - i$ gemeinsamen Lösungen der Gleichungen $B(\varphi) = 0 \cdots K(\varphi) = 0$ bekannt sind, von welchen wir voraussetzen, dass sie ein vollständiges System bilden, so ist φ eine Function von nur $n - i$ veränderlichen Grössen. Man führe die $n - i$ gemeinsamen Lösungen $\varphi = \beta_1$, $\varphi = \beta_2 \cdots \varphi = \beta_{n-i}$ der Gleichungen $B(\varphi) = 0 \cdots K(\varphi) = 0$ als unabhängige Veränderliche in die Gleichung $A(\varphi) = 0$ ein, und man erhält die transformirte Gleichung:

$$A(\beta_1)\frac{d\varphi}{d\beta_1} + A(\beta_2)\frac{d\varphi}{d\beta_2} + A(\beta_3)\frac{d\varphi}{d\beta_3} + \cdots + A(\beta_{n-i})\frac{d\varphi}{d\beta_{n-i}} = 0 \cdot$$

Man theile nun wieder durch $A(\beta_1)$, um den Coefficienten von $\frac{d\varphi}{d\beta_1}$ auf die Einheit zu bringen. Alle übrigen Coefficienten gehen dann über in Functionen der $n - i$ Veränderlichen $\beta_1\, \beta_2 \cdots \beta_{n-i}$. Eliminirt man vermittelst der Gleichungen $\varphi = \beta_1$, $\varphi = \beta_2 \ldots \varphi = \beta_{n-i}$ die ursprünglichen Veränderlichen $x_1\, x_2 \cdots x_{n-i}$ aus den Coefficienten, so fallen auch die Veränderlichen $x_{n-i+1} \cdots x_n$ aus denselben hinaus. Wenn nur 2 Lösungen $\varphi = \beta_1$, $\varphi = \beta_2$ bekannt sind, so ist der Quotient der diesen 2 Veränderlichen entsprechenden Coefficienten der transformirten Gleichung, welcher sich $A(\beta_2) : A(\beta_1)$ schreibt, eine Function der $n - i$ Veränderlichen $\beta_1\, \beta_2 \cdots \beta_{n-i}$, und daher auch eine gemeinsame Lösung der i Gleichungen $B(\varphi) = 0 \cdots K(\varphi) = 0$. Auf diesem Wege gelange ich, wenn 2 Lösungen des vollständigen Systems der Gleichungen $B(\varphi) = 0 \cdots K(\varphi) = 0$ bekannt sind, zu weiteren Lösungen dieses Systems.

4. Es wird nun verlangt, dass man ein vollständiges Integral der Gleichung $\varphi_1(z\, x_1\, x_2 \cdots x_n\, p_1\, p_2 \cdots p_n) = 0$ aufstelle. Lagrange hat dies für den Fall $n = 2$, oder für die Gleichung $f(z\,x\,y\,p\,q) = 0$ sehr einfach zu Stande gebracht. Als das Ziel der Unternehmung habe ich mir hier eine Methode gedacht, welche für den Fall $n = 2$ die von Lagrange gegebene Lösung wiedergibt. Es sollen die partiellen Differentialquotienten $p_1\, p_2 \cdots p_n$ als Functionen der $n + 1$ Veränderlichen $z\, x_1\, x_2 \cdots x_n$ und von $n - 1$ willkürlichen Beständigen in solcher Weise bestimmt werden, dass die Gleichung

$$dz = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \cdots + p_n\, dx_n$$

ein vollständiges Differential ist. In dieser Absicht sucht man neben der Gleichung $\varphi_1 = 0$ noch $n - 1$ andere Gleichungen $\varphi_2 = c_2$, $\varphi_3 = c_3 \cdots \varphi_n = c_n$ auf, in welchen $\varphi_2\, \varphi_3 \cdots \varphi_n$ bestimmte Functionen der $2n + 1$ Veränderlichen $z\, x_1\, x_2 \cdots x_n\, p_1\, p_2 \cdots p_n$, ferner $c_2\, c_3 \cdots c_n$

willkürliche Beständige sind. Die algebraische Auflösung dieser n Gleichungen gibt die verlangten Werthe der partiellen Differentialquotienten.

Zur Bestimmung der $n-1$ Functionen $\varphi_2 \varphi_3 \cdots \varphi_n$ finde ich $n-1$ partielle Differentialgleichungen von der Form:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\left(\frac{d\varphi_k}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i}-\frac{d\varphi_k}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right)=0,$$

wo ich zum Behuf der Abkürzung

$$\left(\frac{d\varphi_k}{dx_i}\right)=\frac{d\varphi_k}{dz}p_i+\frac{d\varphi_k}{dx_i}, \qquad \left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)=\frac{d\varphi}{dz}p_i+\frac{d\varphi}{dx_i}$$

gesetzt habe, ferner φ_k eine gegebene und φ die gesuchte Function ist. Zum Behuf der weiteren Abkürzung schreibe ich diese Gleichungen auch $(\varphi_k \varphi)=0$, und es ist erforderlich, dass jede der gesuchten Functionen eine gemeinsame Lösung einiger Gleichungen darstelle. Man erhält die gesuchten Functionen, wenn man die Forderung stellt, dass $\varphi=\varphi_2$ eine Lösung der Gleichung $(\varphi_1 \varphi)=0$ sei, dass $\varphi=\varphi_3$ eine gemeinsame Lösung der Gleichungen $(\varphi_1 \varphi)=0$, $(\varphi_2 \varphi)=0$, und $\varphi=\varphi_{i+2}$ eine gemeinsame Lösung der Gleichungen $(\varphi_1 \varphi)=0$, $(\varphi_2 \varphi)=0 \cdots (\varphi_{i+1} \varphi)=0$ sei. (vgl. 1875 § 1.)

Die Art, wie ich diese Gleichungen hergeleitet habe, kann keinerlei Bedenken erregen. Aber die Art, wie ich bewiesen habe, dass die erwähnten Systeme zugleich vollständige sind, ist von der Jacobi'schen Methode sehr abweichend. Ich habe den Beweis aus dem Umstande hergeleitet, dass diese Systeme nicht bloss ein vollständiges Integral der Gleichung $\varphi_1=0$ geben, sondern auch dem allgemeinen Integral dieser Gleichung entsprechen. Die Beziehung auf diesen Umstand ist gewiss nicht eine weit hergeholte. Denn eigentlich ist es ja das allgemeine Integral der Gleichung $\varphi_1=0$, was bestimmt werden soll. Die Untersuchung ist aber sehr vereinfacht durch jenen längst bekannten merkwürdigen Satz, wonach man das allgemeine Integral der Gleichung $\varphi_1=0$ aus einem vollständigen Integral ableitet. Auf demselben Satze beruht der von mir gegebene Beweis, dass die obigen Systeme vollständige sind. Ich habe erwähnt, dass das vollständige Integral der Gleichung $\varphi_1=0$, welches wir in der Form $\varphi_{n+1}=c_{n+1}$ schreiben wollen, aus einer vollständigen Differentialgleichung gefunden wird, nachdem man die Functionen $\varphi_2 \varphi_3 \cdots \varphi_n$ aufgestellt hat. Wenn man zu jenen $n-1$ partiellen Differentialgleichungen $(\varphi_k \varphi)=0$, aus welchen diese Functionen folgen, noch die Gleichung $(\varphi_n \varphi)=0$

hinzufügt, so findet man auf demselben Wege, dass $\varphi = \varphi_{n+1}$ eine Lösung des vollständigen Systems der n Gleichungen $(\varphi_1\,\varphi) = 0$, $(\varphi_2\,\varphi) = 0 \cdots (\varphi_n\,\varphi) = 0$ ist. (vgl. 1875 § 3.)

5. Es erübrigt noch, die Anwendung des Vorausgehenden auf die Integration der vorliegenden Systeme zu machen. Zur Bestimmung der Functionen $\varphi_2\,\varphi_3 \cdots \varphi_n$ liegen die $n - 1$ partiellen Differentialgleichungen $(\varphi_1\,\varphi) = 0$, $(\varphi_2\,\varphi) = 0 \cdots (\varphi_{n-1}) = 0$ vor. Die Coefficienten der Gleichung $(\varphi_1\,\varphi) = 0$ sind als Function der $2n + 1$ Veränderlichen $z\, x_1\, x_2 \cdots x_n\, p_1\, p_2 \cdots p_n$ gegeben. Nachdem man aber vermittelst $\varphi_1 = 0$ die Veränderliche p_1 eliminirt hat, kommen nur noch $2n$ Veränderliche vor, und man darf annehmen, dass alle Lösungen der Gleichung $(\varphi_1\,\varphi) = 0$ unabhängig von p_1 sind. Man darf also $\frac{d\varphi_k}{dp_1} = 0$ setzen, wenn $k > 1$ ist. Daraus folgt, dass auch jedes der zu integrirenden Systeme nur $2n$ Veränderliche hat. Aus der Gleichung $\frac{d\varphi_k}{dp_1} = 0$ folgt auch, dass in allen Gleichungen $(\varphi_k\,\varphi) = 0$, in welchen $k > 1$ ist, der Differentialquotient $\frac{d\varphi}{dx_1}$ nicht vorkommt, dass also jede dieser Gleichungen die Lösung $\varphi = x_1$ hat. Wir bemerken noch, dass sich die Elimination von p_1 aus den Coefficienten von $(\varphi_1\,\varphi) = 0$ von selbst bewerkstelligt, nachdem man der Gleichung $\varphi_1 = 0$ die geeignete Form gegeben hat. Aus $\varphi_1 = 0$ folgt $p_1 = f(z\, x_1\, x_2 \cdots x_n\, p_2 \cdots p_n)$. Wir schreiben daher die Gleichung $\varphi_1 = 0$ identisch mit $p_1 - f = 0$. Es ist dann $\frac{d\varphi_1}{dp_1} = 1$, und alle übrigen partiellen Differentialquotienten von φ_1 sind gleichfalls unabhängig von p_1.

Nachdem man eine Lösung $\varphi = \varphi_2$ der Gleichung $(\varphi_1\,\varphi) = 0$ bestimmt hat, liegt zur Bestimmung der übrigen Functionen jedesmal ein System von partiellen Differentialgleichungen vor. Die erste Gleichung des Systems hat eine Ausnahmsstellung, und wir sagen daher, dass $\varphi = \varphi_{i+2}$, worin $i > 0$ gedacht wird, eine gemeinsame Lösung sei der Gleichung $(\varphi_1\,\varphi) = 0$ und des vollständigen Systems S_i, welches letztere aus den i Gleichungen $(\varphi_2\varphi) = 0$, $(\varphi_3\varphi) = 0 \cdots (\varphi_{i+1}\varphi) = 0$ besteht. Das System S_i hat die Lösung $\varphi = x_1$, weil der Differentialquotient $\frac{d\varphi}{dx_1}$ nicht vorkommt. Ich nehme an, es sei eine zweite Lösung des Systems S_i gegeben, und finde die übrigen Lösungen des Systems nach der in 3. aufgestellten Regel. Ich setze alle Lösungen des Systems S_i als neue Veränderliche in die Gleichung $(\varphi_1\,\varphi) = 0$ ein,

und erhalte durch die Integration der transformirten Gleichung die Function φ_{i+2}. Das System S_i besteht aus i Gleichungen, und hat daher $2n - i$ Lösungen. Wenn man die Veränderlichen der transformirten Gleichung zählt, so müssen von jenen $2n - i$ Lösungen die i Lösungen $\varphi = \varphi_2$, $\varphi = \varphi_3 \cdots \varphi = \varphi_{i+1}$ in Abrechnung gebracht werden, weil sie zugleich Lösungen von $(\varphi_1\, \varphi) = 0$ sind. Daraus folgt, dass die transformirte Gleichung $2n - 2i$ Veränderliche hat.

Ich zeige noch, dass zur Auffindung einer Lösung des Systems S_i nicht mehr als eine Integration erforderlich ist. Für das System S_1, welches aus der einen Gleichung $(\varphi_2\, \varphi) = 0$ besteht, ist dies selbstverständlich. Die zu integrirende Gleichung wird in diesem Falle auf eine mit $2n - 2$ Veränderlichen zurückgeführt, weil 2 Lösungen dieser Gleichung $\varphi = \varphi_2$ und $\varphi = x_1$ bekannt sind. Das System S_i besteht, wenn $i > 1$ ist, aus dem System S_{i-1} und der Gleichung $(\varphi_{i+1}\, \varphi) = 0$. Nachdem man die Function φ_{i+1} als gemeinsame Lösung des Systems S_{i-1} und der Gleichung $(\varphi_1\, \varphi) = 0$ bestimmt hat, darf man die Lösungen des Systems S_{i-1} als gegeben betrachten. Ich setze dieselben als neue Veränderliche in die Gleichung $(\varphi_{i+1}\, \varphi) = 0$ ein, und finde durch die Integration der transformirten Gleichung eine Lösung des Systems S_i. Man kann leicht sehen, dass die transformirte Gleichung wieder $2n - 2i$ Veränderliche hat. Denn das System S_{i-1} hat $2n - i + 1$ Lösungen. Davon sind die i Lösungen $\varphi = \varphi_2$, $\varphi = \varphi_3 \cdots \varphi = \varphi_{i+1}$ zugleich Lösungen von $(\varphi_{i+1}\, \varphi) = 0$. Die gleiche Bemerkung ist in Betreff der Lösung $\varphi = x_1$ zu machen. Die Zahl der Veränderlichen ist daher $2n - 2i$. (vgl. Nachträge § 5.)

6. Diese Auseinandersetzungen sind ausreichend, um meine Methode verstehen zu können. Aber ich muss nun fragen: was ist daran schwerverständlich, was ist unzugänglich? Als Clebsch es unternahm, die von mir gefundenen Resultate mit der Jacobi'schen Methode in Einklang zu bringen, ist er in Verwicklungen gerathen, welche meiner Methode fremd sind. Demungeachtet sind weitere Bemühungen gemacht worden, zur Erläuterung derselben von der Jacobi'schen Auffassungsweise auszugehen. Diese wenig erfolgreichen Versuche haben zu der Bemerkung geführt, dass meine Methode schwer verständlich sei. Ich sehe mich veranlasst, dem Berichte über meine Methode die Erklärung beizufügen, dass dieselbe zu ihrer Klarstellung der Jacobi'schen Hilfsmittel nicht bedarf, dass aber, wenn die letzteren doch herangezogen werden, das Verständniss nicht

gefördert wird, weil die von mir gebrauchten Hilfsmittel einfacher und elementarer sind als die Jacobi'schen.

7. Meine Absicht ist, den Leser in den Stand zu setzen, sich selbst ein Urtheil bilden zu können. Ich muss daher, nachdem ich vorstehend die Methode mitgetheilt habe, in dem Weiteren auf die Beschaffenheit der Resultate wieder eingehen. Ich erwähne zunächst, dass ich das System S_i, bestehend aus i partiellen Differentialgleichungen durch eine einzige partielle Differentialgleichung ersetzt habe, was bei Jacobi nicht geschieht. Aber man wendet mir ein, dass dieses Ziel auch auf einem auderen Wege erreicht werde. Soll eine Lösung des vollständigen Systems partieller Differentialgleichungen bestimmt werden, so ist nach dem Mayer'schen Theorem in allen Fällen die Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung ausreichend. In der Reduction auf nur eine Integration stimmen die beiderseitigen Resultate überein. Bei der genauern Betrachtung aber zeigen sich Verschiedenheiten.

Die Lösung des Systems S_i ist von vornherein als eine Function der $2n$ Veränderlichen $z\, x_1\, x_2 \cdots x_n\, p_2 \cdots p_n$ zu betrachten. Zum Behuf der Integration darf man die $2n - i + 1$ Lösungen des Systems S_{i-1} als bekannt voraussetzen. Man führt dieselben als neue Veränderliche in die Gleichung $(\varphi_{i+1}\varphi) = 0$ ein. Wenn man damit von den $2n$ ursprünglichen Veränderlichen $2n - i + 1$ eliminirt, so fallen auch die übrigen $i - 1$ Veränderlichen aus den Coefficienten der Gleichung hinaus. Die gesuchte Function ist daher nicht mehr von $2n$, sondern nur von $2n - i + 1$ Veränderlichen abhängig, und hat also eine einfachere Gestalt angenommen. Ich betrachte diese Vereinfachung der gesuchten Function als einen wesentlichen Fortschritt der Integration, und dieser Fortsehritt ist nicht ein bloss gelegentlicher, sondern ein für alle Fälle erzielter. Eine derartige Vereinfachung der gesuchten Function findet nicht statt, wenn die Integration des Systems S_i nach dem Mayer'schen Theorem ausgeführt wird. Denn die eine zu integrirende Gleichung ist hier Nichts Anderes, als die nach einer bestimmten Regel gebildete lineare Verbindung der Gleichungen des Systems. Die gesuchte Function ist daher nach wie vor von den $2n$ Veränderlichen des Systems abhängig. (vgl. 1875 § 7, ferner Nachträge § 6, und anderseits Math. Ann. Bd. IX, S. 365—366.)

Man kann von dem Mayer'schen Theorem eigentlich nicht sagen, dass es das System S_i durch eine einzige partielle Differentialgleichung ersetze. Denn es bestehen neben der einen zu integrirenden die übrigen partiellen Differentialgleichungen fort. Es sind so zu

sagen alle Integrationsschwierigkeiten auf die eine Gleichung übertragen. Nachdem man eine Lösung dieser Gleichung durch Integration bestimmt hat, bedarf es noch gewisser Differentiationen und Eliminationen, um zu einer Lösung des Systems zu gelangen. Wäre die Integration einer partiellen Differentialgleichung eine bestimmt abgemessene Arbeit, so dürfte die Reduction auf nur eine Integration in allen Fällen als eine Abkürzung der Integrationsschwierigkeiten angesehen werden. Die Schwierigkeiten der Integration bemessen sich aber hauptsächlich nach der Beschaffenheit der Differentialgleichung. Man muss daher an den möglichen Fall denken, dass die Integration der nach dem Mayer'schen Theorem gebildeten linearen Verbinduug nicht gelingt, wiewohl sich andere lineare Verbindungen leicht integriren lassen. Wie merkwürdig die Mayer'sche Reduction an und für sich auch ist, so darf man doch nicht vergessen, dass dies ein Umstand ist, welcher ihr gegebenen Falles den Erfolg als Integrationsmethode verkümmert. In der von mir gegebenen Reduction kann der Uebelstand nicht eintreten, dass man nachträglich einen andern Weg vorziehen müsste. Denn es sind neben der einen zu integrirenden andere Differentialgleichungen gar nicht vorhanden. Die $i-1$ übrigen Gleichungen des Systems S_i haben in der Elimination von eben so vielen Veränderlichen der gesuchten Function ihre Verwerthung gefunden. (Zeitschr. für Math. u. Phys. 1875, S. 92.)

8. Ich muss nun auf einen besonderen Fall eingehen, in welchem die oben aufgezeichneten Hilfsmittel nicht mehr ausreichend sind, wo aber meine Methode demungeachtet fortbesteht. Bei der Integration des Systems S_i sind die Lösungen des Systems S_{i-1} im Allgemeinen nicht vollzählig gegeben, sondern in einer unbestimmt beschränkenden Anzahl. In dem Obigen sind zwei Lösungen des Systems S_{i-1} ausreichend, um eine Lösung des Systems S_i durch Integration erhalten zu können. Wenn nur eine Lösung des Systems S_{i-1} gegeben ist, so sind weitere Hilfsmittel erforderlich.

In seinen Untersuchungen über die Eigenschaften vollständiger Systeme ist Jacobi von der Voraussetzung ausgegangen, dass die Gleichungen die hier in Betracht gezogene Form:

$$(\varphi_k\,\varphi) = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\left(\frac{d\varphi_k}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i} - \frac{d\varphi_k}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right) = 0$$

haben. Für den Fall, dass die abhängige Veränderliche z in dem System nicht vorkommt, hat Jacobi gezeigt, dass man aus einer

Lösung der Gleichung $(\varphi_k \varphi) = 0$ weitere Lösungen dieser Gleichung herleiten kann. Wenn $\varphi = \beta_1$ eine Lösung der Gleichung $(\varphi_2 \varphi) = 0$ ist, so ist in dem erwähnten Falle auch $\varphi = (\varphi_3 \beta_1)$ eine Lösung dieser Gleichung. In den Bemühungen, auch hier die Jacobi'schen Hilfsmittel entbehren zu können, bin ich meinerseits gescheitert. Ich habe 1863 und 1875 den erwähnten Satz zwar auf einem anderen Wege bewiesen; aber angenommen, dass derselbe fortbestehe, wenn auch die abhängige Veränderliche z vorkommt. Das Letztere ist nicht richtig. Die Jacobi'schen Untersuchungen sind in der That unersetzlich, wenn es darauf ankommt, aus einer Lösung der Gleichung $(\varphi_k \varphi) = 0$ weitere Lösungen dieser Gleichung herzuleiten. Vermittelst jener Gleichung, welche man die Jacobi'sche Identität nennt, gelangt man auch in der allgemeinen Aufgabe, wo die Anwesenheit der abhängigen Veränderlichen z vorausgesetzt ist, ohne Schwierigkeit zu diesem Ziel. Wenn $\varphi = \beta_1$ eine Lösung der Gleichung $(\varphi_2 \varphi) = 0$ ist, so findet man, dass auch

$$\varphi = \frac{(\varphi_3 (\varphi_3 \beta_1)) + \frac{d\varphi_3}{dz} (\varphi_3 \beta_1)}{(\varphi_3 \beta_1)^2}$$

eine Lösung der Gleichung $(\varphi_2 \varphi) = 0$ ist. (vgl. Nachträge § 2 u. 3.)

Den Anlass zu dieser Berichtigung verdanke ich der Besprechung meiner Methode von Seiten des Herrn Mayer. Es gehört aber zur Sache, wenn ich noch hinzufüge, dass in jener Besprechung von einer Berichtigung nicht die Rede ist; dass sich vielmehr der Verfasser darauf beschränkt, im Hinweis auf den erwähnten Irrthum, meine Methode in der von mir vorausgesetzten Allgemeinheit für falsch zu erklären (Math. Ann. Bd. IX, S. 369—370). Ich würde gerne die letztere Bemerkung unterdrückt haben, wenn sich nicht Herr Mayer bemüht hätte, diese übereilte Beurtheilung aufrecht zu erhalten (Repert. Bd. I, S. 76).

9. Ich komme zu dem zweiten Punkte, in welchem meine Methode der Jacobi'schen voraus ist. Wenn die abhängige Veränderliche z in der zu integrirenden Gleichung $\varphi_1 = 0$ vorkommt, so setzt Jacobi an deren Stelle eine andere Gleichung, welche nicht n, sondern $n + 1$ unabhängige Veränderliche hat, worin aber die abhängige Veränderliche wieder fehlt. In Folge dessen ist bei Jacobi die Anzahl der zu integrirenden Systeme um die Einheit grösser als bei mir, und ebenso ist die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen in jedem der Jacobi'schen Systeme um die Einheit grösser als in dem gleichnamigen der von mir aufgestellten Systeme.

Um den Unterschied recht augenfällig zu machen, betrachte ich den Fall $n = 2$. Für diesen Fall führt meine Methode unmittelbar zu der von Lagrange gegebenen Lösung der Aufgabe, wonach eine partielle Differentialgleichung mit 4 unabhängigen Veränderlichen zu integriren ist. Nach Jacobi ist die Aufgabe auf diejenige zurückzuführen, welche dem Falle $n = 3$ entspricht, in welcher aber die abhängige Veränderliche nicht vorkommt. Es ist daher eine partielle Differentialgleichung mit 5 unabhängigen Veränderlichen zu integriren, und noch ein System von 2 partiellen Differentialgleichungen mit je 3 unabhängigen Veränderlichen. Man muss sich vergegenwärtigen, dass es sehr einfache Betrachtungen sind, welche zu der von Lagrange gegebenen Lösung führen; dass man aber eine lange Kette von Gedanken verfolgt, bevor man zu der Lösung jener andern Aufgabe gelangt, welche dem Falle $n = 3$ entspricht.

Jacobi hat an die Stelle der schönen Lösung, welche man Lagrange verdankt, die Lösung jener andern Aufgabe gesetzt, weil er in seinen Bemühungen, die Lösung der allgemeinen Aufgabe zu erhalten, wo n eine unbestimmte Zahl ist, einen andern Weg nicht gekannt hat. Sonderbarer Weise wollen nun die Herren A. Mayer und Sophus Lie diese Jacobi'sche Methode aufrechterhalten. Ich sehe darin die Bestätigung meiner Ansicht, dass der von denselben eingenommene Standpunkt nicht geeignet ist, die von mir aufgefundenen Resultate zu geben.

Die Frage zu behandeln, welche von den bekannten Integrationsmethoden etwa den Vorzug verdiene, was andererseits versucht worden ist, scheint mir eine undankbare Unternehmung zu sein, weil diese Methoden so geartet sind, dass sie sich gegenseitig ergänzen. Aber ich kann behaupten, dass die von mir beschriebene Methode zwei werthvolle Resultate liefert, welche der Jacobi'schen Methode fern liegen, und welche keine andere der bekannten Methoden zu leisten im Stande ist.

Berichtigungen zu meiner Mittheilung im Repert. Bd. I.

S. 294 Z. 4 v. u. anst. $\varphi_1\ \varphi_2 \cdots$ lies: $\varphi_2\ \varphi_3 \cdots$

S. 295 Z. 17 v. u. anst. unabhängigen lies: abhängigen.

S. 296 S. 10 u. 19 v. u. zu streichen das Wort je.

Mannheim. Aug. Weiler.

A. Mayer: Ueber das allgemeinste Problem der Variationsrechnung bei einer einzigen unabhängigen Variabeln.

(Ber. d. Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Juni 1878.)

Jede Aufgabe der Variationsrechnung, in der nur eine einzige unabhängige Variable auftritt, lässt sich auf die folgende Form bringen:

A) Man soll die den m Differentialgleichungen 1. O.

$$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0, \cdots \varphi_m = 0, \ (0 \leq m < n)$$

unterworfenen Variabeln $y_1, y_2, \cdots y_n$ als Functionen von x so bestimmen, dass das Integral:

$$v = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, \cdots y_n, y_1', \cdots y_n') \, dx$$

ein Maximum oder Minimum werde.

Dies Problem ist aber an sich noch kein völlig bestimmtes, man muss ihm vielmehr, um es zu einem bestimmten zu machen, noch gewisse Grenzbedingungen hinzufügen. In der Regel gestattet es nun die Stellung der Aufgabe, sämmtliche Grenzwerthe, zunächst wenigstens, als fest gegeben zu betrachten, und dann stellt sich dieselbe als ein specieller Fall desjenigen Problems dar, welches aus A entsteht, wenn man festsetzt:

B) dass alle n Functionen $y_1, y_2, \cdots y_n$ in den beiden gegebenen Grenzen x_0 und x_1 gegebene Werthe annehmen sollen.

Für das hiermit vollständig determinirte Problem A habe ich unter der Voraussetzung, dass dasselbe bei festen, aber unbestimmten Grenzwerthen überhaupt lösbar sei, in Borchardts J. 69 die allgemeinen Kriterien des Maximums und Minimums abgeleitet.

Allein es giebt eine Klasse von Problemen, die eine solche Festlegung sämmtlicher Grenzwerthe nicht vertragen. Es sind dies diejenigen Probleme, als deren allgemeinster Ausdruck die folgende Aufgabe angesehen werden kann:

C) Gegeben sind zwischen der unabhängigen Variabeln x und den n unbekannten Functionen $y_1, y_2, \cdots y_n$ m Differentialgleichungen 1. O.:

$$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0, \cdots \varphi_m = 0, \ (1 \leq m < n).$$

Es handelt sich darum, diese Functionen so zu bestimmen, dass, während den Functionen $y_2, \cdots y_n$ für zwei gegebene Werthe x_0 und x_1 von x gegebene Werthe vor-

geschrieben sind, die Function y_1 für $x = x_0$ einen gegebenen Werth erhalte und für $x = x_1$ ein Maximum oder Minimum werde.

Hier ist es offenbar unmöglich, der Function y_1 auch für $x = x_1$ einen festen Werth vorzuschreiben. Das Problem C lässt sich also nicht dem Probleme A, B unterordnen, obgleich es, sobald man von den beiderseitigen Grenzbedingungen absieht, demjenigen besonderen Falle des Problems A entspricht, in welchem sich die Function f auf den Differentialquotienten y_1' reducirt. Umgekehrt dagegen sieht man sofort, dass das Problem A, B nur ein specieller Fall des Problems C ist.

Es ist daher nicht, wie ich früher glaubte, das Problem A, B, sondern das Problem C als das allgemeinste Problem der Variationsrechnung bei einer unabhängigen Variabeln zu betrachten. Für dies allgemeinste Problem, von dem bisher wohl nur die erste Variation näher untersucht worden ist, auch die Kriterien des Maximums und Minimums aufzustellen und damit meine früheren Arbeiten zu ergänzen, ist der Zweck des angezeigten Aufsatzes.

Leipzig. A. Mayer.

Ch. A. Vogler: Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln und zu deren Gebrauch beim Schnellrechnen sowie beim Schnellquotiren mit Aneroid und Tachymeter, für Ingenieure, Topographen und Alpenfreunde. Mit 6 Lichtdrucktafeln und vielen in den Text eingedruckten Holzschnitten. Berlin 1877, Ernst & Korn.

Numerische Tafeln mit doppeltem Eingange sind weniger übersichtlich und weniger leicht zu interpoliren als graphische. Diese verdienen daher überall den Vorzug, wo kleine Correctionsglieder z, welche man nur auf drei Stellen genau zu kennen braucht, aus zwei Argumenten x und y zu berechnen sind. Die Gleichung $z = f(x, y)$ stellt, für $z =$ Constante, über rechtwinkeligen Coordinaten eine bestimmte Curve (Isoplethe) dar, und wenn man dem z Werthe beilegt, welche von Stufe zu Stufe wachsen, eine Isoplethenschaar. Wird das Coordinatennetz mit geeigneter Maschenweite wirklich ausgezogen und werden die Isoplethen mit den zugehörigen Werthen von z beschrieben, so kann an jedem Coordi-

natenschnitte (x, y) der entsprechende Werth $z = f(x, y)$ unmittelbar oder durch Interpolation abgelesen werden.

Die Construction der Isoplethentafel ist am leichtesten und genauesten ausführbar, wenn die Isoplethen Gerade oder Kreise sind. Ist aber $F(u, v, w) = 0$ für $w =$ Constante die Gleichung einer anderen Curve, so kann dennoch in einer ganzen Reihe von Fällen durch die Substitution von Werthen u, v, w aus

$$x = \varphi(u);\quad y = \psi(v);\quad z = \chi(w)$$

eine lineare Gleichung $z = f(x, y)$ gebildet werden. Indem man z alle Werthe beilegt, welche es bei stufenweise wachsendem w erhält, entsteht wieder eine geradlinige Isoplethenschaar mit den laufenden Coordinaten x und y. Das Coordinatennetz wird jetzt aber nicht mehr mit gleichmässigen Maschen entworfen, sondern durch Punkte gezogen, welche auf der Abscissen- und Ordinatenachse vermöge $x = \varphi(u)$ und $y = \psi(v)$ für stufenweise wachsende u und v festgelegt und nach u und v beziffert werden. Die Ablesung der Isoplethen an den Coordinatenschnitten gibt w aus den Argumenten u und v.

Dieses „Ausstrecken· der Isoplethen“ lässt sich nicht auf alle Functionen von zwei unabhängig Variabeln, namentlich nicht auf diejenigen ausdehnen, deren mathematischer Bau unbekannt ist. Falls aber $z = f(x, y)$ eine lineare Gleichung, so kann das Coordinatennetz doch für die Punktreihen auf den Coordinatenachsen:

$$x = \varphi(u),\ y = \psi(v)$$

ausgezogen werden, wenn auch die Beziehungen des x zu u und des y zu v nur durch Beobachtung ohne Kenntniss ihrer mathematischen Form festgestellt wären.

In allen Fällen wird die Brauchbarkeit von Isoplethentafeln dadurch wesentlich gefördert, dass man sie in grossem Massstabe entwirft und photographisch verkleinert. Die 6 Tafeln, welche meiner Schrift beigegeben sind und nebst Gebrauchsanweisung auch abgesondert bezogen werden können, wurden auf solche Weise hergestellt und durch Lichtdruck vervielfältigt. Es findet sich darunter auch eine Tafel für blos ein Argument, welche in bekannter Weise aus zwei nebeneinander hinlaufenden Scalen besteht und bei bedeutendem Zahlenumfange nur geringen Raum einnimmt.

Das Buch zerfällt in drei Abschnitte. Im ersten werden die Fälle betrachtet, in welchen $F(u, v, w) = 0$ durch eine geradlinige Isoplethentafel darstellbar ist; sodann wird ein Vergleich gezogen zwischen

den Diagrammen und den gebräuchlichsten Werkzeugen der mechanischen Rechnung, dem Gunter'schen logarithmischen Rechenschieber und der Thomas'schen Rechenmaschine; endlich die Genauigkeit untersucht, deren Ipsolethentafeln und Rechenschieber fähig sind. Die eingestreuten Beispiele graphischer Tafeln sind meist im Hinblick auf den Inhalt des zweiten und dritten Abschnittes gewählt. Eine Ausnahme macht, ihres Interesses wegen und weil sie als Muster zu ähnlichen dient, unter andern die logarithmische Rechentafel Lalanne's, des mehrfach preisgekrönten ersten Erfinders der Methode, Isoplethenschaaren auszustrecken. Obwohl sein Urheberrecht in der Vorrede meines Buches, der historischen Uebersicht und an mehreren andern hervorragenden Stellen deutlich gewahrt ist, hat Lalanne doch gegenüber der vorerwähnten Sonderausgabe meiner 6 Tafeln eine Prioritätsklage erhoben (Comptes rendus, 26. Nov. 1877) und auch, nachdem er mein Buch kennen gelernt hatte, theilweise aufrecht erhalten in einer Schrift, welche für das Publicum der Pariser Weltausstellung bestimmt ist. (Méthodes graphiques etc. par M. Léon Lalanne, extrait des notices relatives aux travaux des ponts et chaussées, publiées à l'occasion de l'exposition de 1878.) Dieser neue Angriff beruht nothwendig, wie der erste, auf Missverständnis, wie einige gewaltsam verknüpfte und sinnwidrig übersetzte Citate aus meinem Buche hinreichend beweisen. Wenn sodann Herr Lalanne behauptet, dass in meinem Buche nichts Wesentliches enthalten sei, was man nicht auch in seinen preisgekrönten Schriften finde, so vertraue ich vielmehr darauf, dass auch schon bei oberflächlichem, aber unbefangenem Vergleiche der Unterschied in die Augen springe, welcher in der Anlage der beiderseitigen Schriften besteht. Es handelte sich bei mir nicht um Aufzählung einer möglichst grossen Anzahl mathematischer Formeln, welche durch Isoplethentafeln dargestellt werden können, sondern um die Verwerthung solcher Tafeln in der Messkunde und um den Nachweis, dass ihre Genauigkeit in sehr vielen Fällen ausreicht, um numerische Reductionstafeln zu ersetzen, deren man sich beim Beobachten unausgesetzt bedienen muss. Während daher Lalanne eingehende Genauigkeitsbetrachtungen unterlassen konnte, widmet solchen schon der erste Abschnitt meines Buches ein ganzes Kapitel. Ebensowenig wie dieses ist der Stoff meiner beiden letzten Abschnitte von Lalanne schon bearbeitet worden.

Der zweite Abschnitt nämlich behandelt die Theorie und Praxis barometrischer Höhenmessung mit Aneroiden unter Anwendung von

Diagrammen an Stelle numerischer Tafeln; der dritte Abschnitt beschäftigt sich mit der tachymetrischen Messung, bei welcher Isoplethentafeln ebenfalls vortheilhafte Verwendung finden können. Unter den barometrischen Tafeln möchte sich besonders diejenige der Seehöhen (II) in Verbindung mit III, welche die zugehörige Temperaturcorrection liefert, zum Gebrauche eignen.

Aachen. Ch. A. Vogler.

Zur Classification der Flächen dritter Ordnung. Von Carl Rodenberg in Plauen im Vogtlande. (Mathematische Annalen Bd. 14, pag. 46 ff.)

Die vorliegende Arbeit behandelt die Frage nach den verschiedenen Arten von Flächen dritter Ordnung, welche einem und demselben Pentaeder angehören. Es werden mit Herrn Klein[1]) zu einer Art alle Flächen gerechnet, welche sich durch continuirliche Aenderung der Constanten in einander überführen lassen, ohne hierbei einen neuen oder höheren singulären Punkt, als ihn die Fläche etwa schon besitzt, nothwendig zu machen, wozu als weitere Bedingung nun noch die Erhaltung des Pentaeders kommt.

Kleins Artbegriff stimmt für Flächen ohne Singularitäten vollständig mit dem Schläfli'schen[2]), welcher an die Realität der geraden Linien und Dreiecksebenen anlehnt, überein. Diese Uebereinstimmung ist wesentlich darin begründet, dass für dieselbe Anzahl reeller Linien und Ebenen der Zusammenhang der Fläche immer derselbe ist. Eben desswegen gelingt auch die Ableitung dieser Arten aus der Fläche mit vier Knoten so einfach mit Hülfe zweier als „Verbinden" und „Trennen" bezeichneter Prozesse, welche die beiden möglichen Auflösungen eines Knotens vollziehen. Der Zusammenhang gewährt jedoch kein ausreichendes Kriterium mehr, sobald einige Knoten erhalten bleiben, da die Aenderung eines oder mehrerer derselben durch die biplanare Form, welche für den Zusammenhang ohne Einfluss ist, zu einer neuen Art führen kann. Hr. Klein nimmt an, dass dieses stets der Fall sei, ich zeige, dass nur dann eine von der frühern verschiedene Art erhalten wird, wenn

---

[1]) Ueber Flächen dritter Ordnung. Math. Ann. Bd. VI, pag. 551 ff.

[2]) On the Distribution of Surfaces of the third order etc. Philos. Transact. 1863, pag. 207 ff.

der Zusammenhang nicht grösser als zu dem bezeichneten Vorgange unbedingt nothwendig ist und eine ungerade Anzahl von Knoten von ihm betroffen wird. Bei Vornahme desselben muss von der Erhaltung des Pentaeders abgesehen werden, da dieses beim Auftreten von biplanaren Knoten äusserst specieller Natur ist (s. unten). Im Uebrigen giebt die eingeführte Beschränkung nur bei den Flächen mit drei reellen Linien und sieben reellen Ebenen Veranlassung zur Bildung von zwei Unterarten.

Das Pentaeder wird stets als gegeben angenommen und es knüpft demgemäss die Untersuchung an die Gleichung

$$\frac{x_1^3}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^3}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^3}{\alpha_3^2} + \frac{x_4^3}{\alpha_4^2} + \frac{x_5^3}{\alpha_5^2} = 0,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

an. Gerade diese Form gestattet eine ausserordentlich leichte Ausführung des „Verbindens" und „Trennens". Die Bedingung für einen Knoten ist nämlich

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 0,$$

und diese lineare Form macht es möglich durch Abzählungen zwischen den α die Art einer vorgelegten Fläche zu erkennen.

Unter den Flächen mit einem vollständig reellen Pentaeder finden sich alle Arten ohne Singularitäten oder mit reellen konischen Knoten, gepaart kommen solche mit imaginären Knoten jedoch nicht vor und von letzteren giebt es höchstens zwei. Bei Pentaedern mit zwei conjugirt imaginären Ebenen fehlen, wie bekannt, die Flächen mit 27 reellen Geraden. Sind endlich zwei Paare solcher Ebenen vorhanden, so fehlen ausser den genannten auch noch diejenigen mit 3 reellen Linien und 15 reellen Dreiecksebenen und alle Flächen mit Knoten welche aus der mit vieren direct durch „Trennen" erhalten werden. Die Ableitung vorstehender Resultate bildet den Inhalt der §§ 1—6.

In § 7 werden die getrennten Mannigfaltigkeiten aufgezählt, welche die verschiedenen Arten der Flächen eines Pentaeders constituiren und wird die Vertheilung der Knoten auf den Raum angegeben. Die isolirten Knoten erfüllen die 5 Räume, welche nur vier Ebenen zu ihrer Begrenzung erfordern, die nicht isolirten die übrigen 10. Die weiteren Abtheilungen werden durch Diagonalebenen des Pentaeders gebildet. Sofern mindestens drei Pentaederebenen reell sind, ist das Durchsetzen einer derselben mit einem

Knoten dessen Aenderung durch die biplanare Form äquivalent (als Uebergangsfläche erhält man freilich eine dreifache Ebene), bei nur einer reellen Ebene ist ein Ueberschreiten derselben wirkungslos, da keine ihrer Seiten vor der andern ausgezeichnet ist.

Die bis jetzt benutzte Gleichungsform setzt ein eigentliches Pentaeder voraus. Für die verschiedenen Fälle der vereinigten Lage von zweien oder mehr Ebenen lassen sich jedoch mit Hülfe eines in § 8 mitgetheilten Verfahrens Gleichungen aufstellen, welche der allgemeinen entsprechen. Mit der Untersuchung dieser Gattungen von Flächen befassen sich die §§ 9—15.

Das Auftreten einer zweifachen oder dreifachen Ebene genügt noch nicht zur Hervorrufung einer Singularität auf der Fläche, nur dass im letzten Falle der Schnittpunkt mit den beiden übrigen Ebenen Kreuzungspunkt von drei Geraden der Fläche ist. Erst das zweimalige Zusammenfallen von zwei Ebenen bewirkt das Auftreten eines biplanaren Punktes B_3. Seine Ebenen sind harmonisch zu den Doppelebenen. Die Vereinigung letzterer zur vierfachen — die dann nothwendig eine Ebene des Knotens ist — ist von keiner wesentlichen Aenderung der Fläche begleitet; jedoch kann durch eine Specialisirung der Constanten, welche die Pentaederebenen nicht alterirt, wohl aber die Ecken unbestimmt werden lässt, ein zweiter B_3 erzeugt werden. Eine dreifache und eine Doppelebene führen einen B_4 mit sich, die dreifache Ebene ist Tangentenebene längs der Axe. Eine fünffache Ebene giebt einen B_5 berührende Ebene des Knotens. Sind in diesem Falle die Ecken unbestimmt, so hat man einen B_6. Drei B_3, sowie die übrigen Singularitäten verlangen unbestimmte Pentaeder; aber es giebt andererseits Flächen von letzterer Eigenschaft, welche ohne Knoten sind, z. B. diejenigen mit einer völlig unbestimmten Ebene. Wir finden diese Arten (§ 17) unter den etwas allgemeinern, deren Pentaeder vier Ebenen durch einen Punkt besitzt. Wie Eckardt[1]) nachgewiesen hat, geht von der ausgezeichneten Ecke ein osculirender Kegel an die Fläche, dessen Berührungscurve in der fünften Ebene liegt. Ein Doppelpunkt dieser Curve ist ein B_3 der Fläche (konische Knoten sind unmöglich), es bedingt jedoch nur die Fläche mit drei solchen Punkten ein Pentaeder dieser Art.

Im Allgemeinen haben die vorliegenden Flächen drei reelle Gerade und 7 reelle Ebenen.

---

[1]) Ueber diejenigen Flächen dritter Ordnung, auf welchen sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden. Math. Ann. Bd. X, pag. 227 ff.

Ein besonderer Fall tritt ein, wenn die Aronhold'sche Invariante der Berührungscurve verschwindet. Dann sind nur vier Kuben zur Darstellung der Fläche erforderlich, und zwar lässt sich diese Reduction nur einmal ausführen (§ 18). Lässt man mehrere Ebenen des, den Flächen hiernach zugeordneten, Tetraeders sich vereinigen, so erhält man bei

einer Doppelebene eine Fläche mit U_6
einer dreifachen Ebene eine Fläche mit U_8
zwei Doppelebenen eine Regelfläche mit getrennten Directrixen
einer vierfachen Ebene eine „ „ vereinigten „

Die beiden Flächen mit U_6 sind nicht die allgemeinsten mit dieser Singularität, letztere bilden den Gegenstand des § 19. Man kann ihrer Gleichung auf unendlich viele Arten die Form

$$x_4(x_1+x_2+x_3)^2+\frac{x_1^3}{\alpha_1^2}+\frac{x_2^3}{\alpha_2^2}+\frac{x_3^3}{\alpha_3^2}=0$$

geben. Drei nicht völlig bestimmte Pentaederebenen x_1, x_2, x_3 gehen durch den Knoten, die beiden übrigen liegen vereinigt mit der Ebene desselben. Für

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$$

erhält man die Uebergangsfläche mit U_7 zwischen den beiden Arten, welche es hinsichtlich der Realität der Geraden noch giebt.

Plauen. Carl Rodenberg.

Bewegung von n Massenpunkten auf einer geraden Linie, welche um ein festes, in ihr befindliches, attrahirendes Centrum drehbar ist. (Inauguraldissertation zur Erlangung der Doctorwürde bei der philosophischen Facultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn, eingereicht und mit den beigefügten Thesen vertheidigt am 8. August 1878 von Albrecht Emmerich aus Zell.)

n Massenpunkte $m_1, m_2, \cdots m_n$ seien gezwungen, auf einer in einem Punkte O festen geraden Linie zu verbleiben, in Bezug auf ihre gegenseitige Bewegung dagegen durchaus ungehindert; der feste Punkt sei der Sitz einer späterhin zu determinirenden Centralkraft. Die Arbeit setzt sich den Zweck, die Bewegung der geraden Linie um den festen Punkt und die Bewegung der einzelnen Massenpunkte auf der Geraden zu bestimmen, selbstverständlich unter Voraussetzung eines gegebenen Anfangszustandes.

Zur Ortsbestimmung wird ein im Raume festes rechtwinkeliges Coordinatensystem mit dem Anfangspunkte O gewählt. Da die Bedingungsgleichungen, denen die Massenpunkte unterworfen sind,

beim Uebergange zu Kugelcoordinaten r_i, ϑ, φ (welche sich von gewöhnlichen Polarcoordinaten nur insofern unterscheiden, als r_i positiv oder negativ ist, jenachdem m_i sich auf der einen = positiven oder anderen = negativen Hälfte der Geraden befindet) identisch erfüllt werden, so gelangt man zur Darstellung der Differentialgleichungen des Problems vermittels der genannten Coordinaten. Als allgemeine Integrale des Systems von der $(2n+4)^{\text{ten}}$ Ordnung bieten sich neben dem der lebendigen Kraft die drei Flächensätze dar, welche den Nachweis zu liefern gestatten, dass die ganze Bewegung in einer Ebene verläuft. Durch Einführung des Drehungswinkels der Geraden ω und die Darstellung von ϑ und φ durch ω vermindert sich die Ordnung des Systems um 2 Einheiten. Das reducirte System erweist sich integrabel unter Voraussetzung einer direct proportional der Entfernung abstossenden oder anziehenden Centralkraft. An die Darstellung von $\Sigma_i m_i r_i^2$ knüpft sich eine Discussion, welche den nicht stabilen resp. stabilen Charakter der Bewegung erschliesst, jenachdem die Kraft abstossend oder anziehend wirkt. Mit Hülfe des Flächensatzes erhält man sodann die Bestimmung des Drehungswinkels $\omega - \omega_0$; bei repulsiver Kraftwirkung beschreibt die Gerade höchstens einen stumpfen Winkel d. h. $\lim (\omega - \omega_0)_{(t=\infty)} < \pi$, im Falle der Attraction dagegen dreht sie sich unaufhörlich um das feste Centrum herum. Die Differentialgleichung II. Ordnung für r_i ist homogen in r_i und r_i'' und wird auf eine von der ersten Ordnung zurückgeführt; von letzterer werden zwei particuläre Integrale aufgesucht, aus denen sich deren allgemeines Integral linear zusammensetzt. Die endgültige Darstellung von r_i findet mittels trigonometrischer Functionen eines Winkels statt, der sich von $\omega - \omega_0$ um einen constanten Factor unterscheidet. — Die Bahnen der Massenpunkte erweisen sich im Allgemeinen als transcendente und zwar sehr complicirte Curven; nur in einem speciellen Falle, der durch das Verschwinden einer Determinante bedingt ist und auch sonstiges Interesse gewährt, hat man es mit Hyperbelzweigen resp. Ellipsen zu thun.

Die Modification, welche die Aufgabe erleidet, wenn in O keine beschleunigende Kraft als wirkend vorausgesetzt wird, ist als eine Specialisirung anzusehen; dieses speciellere Problem, welches von der Universität Bonn für das nun verflossene Studienjahr 1877/78 als Preisaufgabe ausgeschrieben war, gab den Anstoss zu der im Vorstehenden besprochenen Verallgemeinerung.

Trier, den 21. Aug. 1878. Dr. A. Emmerich.



Dr. Oscar Kessler: Kaustische Linien in kinematischer Behandlung. (Zeitschrift für Mathem. u. Physik. XXIII. Jahrg. 1878.)

Die Eigenschaften der kaustischen Linien sind bisher fast ausschliesslich mit den Hilfsmitteln der analytischen Geometrie untersucht worden. Die in ziemlich complicirten Formen auftretenden Gleichungen, welche hierbei als Grundlagen für die weiteren Entwickelungen dienen, lassen sich in den meisten Fällen nur sehr umständlich behandeln. Mannichfaltige Rechnungsoperationen sind allein zur Bestimmung der ausgezeichneten Punkte erforderlich; es ist deshalb sehr schwer, auf dem bisher betretenen Wege eine klare Vorstellung über die Gestalten der Brennlinien zu gewinnen. In der oben genannten Abhandlung sind die Principien der kinematischen Geometrie zur Untersuchung der kaustischen Linien, und zwar zunächst nur der durch Reflexion entstandenen, benutzt worden. Durch die gewählte Methode gelingt es, die verschiedenen Formen dieser Curven, ohne Benutzung der Gleichungen derselben, vollkommen übersichtlich darzustellen.

Als Grundlage für die Entwickelungen dient der schon früher bekannte und anderweitig ausgesprochene Satz: Die zu einem gegebenen strahlenden Punkte P gehörige kaustische Linie einer Curve ist die Evolute derjenigen Roulette, welche ein Punkt P_1 beschreibt, der mit einer zweiten, der gegebenen congruenten Curve in symmetrischer Lage zu dem strahlenden Punkte P fest verbunden ist, während diese zweite auf der gegebenen so abrollt, dass sich beide Curven stets in entsprechenden Punkten berühren. Mit Hilfe der kinematischen Geometrie lassen sich die Eigenschaften der erzeugten Roulette und der Evolute derselben leicht aus denjenigen der rollenden und der festen Curve ableiten.

Um die Anwendung der gewählten Methode zu zeigen, wurden zunächst die bekannten Eigenschaften der Brennlinien des Kreises für irgend eine Lage des strahlenden Punktes entwickelt. Hiernach folgt die Untersuchung der kaustischen Linien der Parabel; der strahlende Punkt P ist auf der Axe, in der Entfernung z vom Scheitel der Parabel angenommen. Von den Resultaten der Entwickelungen mögen einige hier angeführt werden:

Die einzelnen Punkte der Brennlinie findet man nach folgender Constructionsregel: Man zeichne im Einfallspunkte $\mathfrak{P}$ der Parabel die Normale; dieselbe schneide die Leitlinie im Punkte O; ferner trage man die Strecke $\mathfrak{P}O$ nach der entgegengesetzten Seite von $\mathfrak{P}$ auf der Normale ab bis zu einem Punkte O_1. Durch den Schnitt-

punkt W der Verbindungslinie von P mit O_1 und der in $\mathfrak{P}$ auf $P\mathfrak{P}$ senkrecht errichteten Linie ziehe man zur Normale der Parabel eine Parallele, so schneidet diese den von $\mathfrak{P}$ aus reflectirten Strahl in seinem Berührungspunkte mit der kaustischen Linie.

Die Brennlinie der Parabel hat zwei, zur Axe symmetrisch liegende Asymptoten. Die Abscisse des Parabelpunktes, aus welchem der von einem Punkte P der Axe einfallende Strahl als Asymptote der zu P gehörigen kaustischen Linie reflectirt wird, ist gleich einem Drittel des Abstandes des Punktes P vom Scheitel der Parabel. Die Lage des Schnittpunktes der beiden Asymptoten und der Winkel, den eine Asymptote mit der Parabelaxe bildet, sind in der Abhandlung durch einfache Formeln bestimmt. Wenn der Abstand des strahlenden Punktes vom Scheitel der Parabel gleich dem $4\frac{1}{2}$ fachen des Parameters ist, so fallen die beiden Asymptoten zu einer Geraden zusammen, welche auf der Axe senkrecht steht.

Die kaustische Linie der Parabel hat drei Rückkehrpunkte; die Tangenten in diesen Punkten sind diejenigen Strahlen, welche aus dem Scheitelpunkte der Parabel und andererseits aus den beiden Punkten derselben, welche mit dem strahlenden Punkte dieselbe Abscisse haben, reflectirt werden. Die Strecke zwischen dem Scheitel der Parabel und dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkte wird durch den strahlenden Punkt und durch den ersten Rückkehrpunkt der Brennlinie harmonisch getheilt. Die beiden anderen Rückkehrpunkte findet man leicht durch folgende Construction: Man errichte in dem strahlenden Punkte eine Senkrechte zur Axe, welche die Parabel in Q schneidet, im Punkte Q eine andere Senkrechte auf dem Radiusvector FQ bis zum Schnittpunkte H mit der Axe; verlängert man HQ über Q hinaus um die eigene Länge, so ist der Endpunkt I ein Rückkehrpunkt der Brennlinie und HI ist die zugehörige Rückkehrtangente.

Die Abhandlung enthält nähere Bestimmungen der Curven, die Unterscheidung der objectiven und subjectiven Theile und die Rectification derselben; ferner eine durch Zeichnung erläuterte Uebersicht über die verschiedenen Gestalten, welche die kaustische Linie der Parabel allmählich annimmt, wenn der strahlende Punkt stetig fortschreitend alle Punkte der Axe durchläuft.

Hierauf folgt die Betrachtung der kaustischen Linien der Ellipse. Der strahlende Punkt liegt auf der grossen Axe in der Entfernung z vom Mittelpunkte. Die Brennlinie hat im Allgemeinen vier, in der Abhandlung näher bestimmte Asymptoten, von denen

je zwei symmetrisch zur grossen Axe liegen; ferner vier Rückkehrpunkte. Zwei dieser Punkte liegen auf der grossen Axe oder deren Verlängerung; die Strecken zwischen den Scheiteln der Ellipse und den zugehörigen Krümmungsmittelpunkten werden durch den strahlenden Punkt und durch je einen dieser beiden Rückkehrpunkte harmonisch getheilt. Die beiden anderen Rückkehrpunkte liegen symmetrisch zur grossen Axe; die Tangenten in diesen Punkten sind die reflectirten Strahlen, welche von den beiden Ellipsenpunkten ausgehen, deren Projection auf die grosse Axe der strahlende Punkt ist.

Die Gestalt der Brennlinie ist abhängig von den Verhältnissen der Entfernung des strahlenden Punktes vom Mittelpunkte, z, und der linearen Excentricität c zur grossen Axe $2a$ der Ellipse. Es lassen sich folgende Fälle unterscheiden. 1) Wenn der Abstand z kleiner als $\frac{a}{c}\sqrt{2c^2 - a^2}$ ist, so hat die kaustische Linie vier reelle Asymptoten; sie besteht aus zwei getrennten subjectiven und zwei ebenfalls getrennten objectiven Zweigen, welche je einen Rückkehrpunkt enthalten. 2) Ist z gleich $\frac{a}{c}\sqrt{2c^2 - a^2}$, so hat die Curve zwei Asymptoten, welche durch den Mittelpunkt der Ellipse gehen und diese in zwei Punkten schneiden, deren Verbindungslinie senkrecht zur grossen Axe steht und den strahlenden Punkt enthält. Zwei Rückkehrpunkte liegen in diesem Falle unendlich fern. 3) Ist z grösser als $\frac{a}{c}\sqrt{2c^2 - a^2}$, aber kleiner als $\frac{a^2+c^2}{2a}$, so ist die kaustische Linie eine geschlossene Curve mit vier Rückkehrpunkten und durchweg objectiv. 4) Ist z gleich $\frac{a^2+c^2}{2a}$, so hat die Brennlinie nur eine reelle Asymptote, welche mit der grossen Axe zusammenfällt; der eine der beiden zur Axe gehörigen Rückkehrpunkte liegt jetzt unendlich fern. 5) Ist z grösser als $\frac{a^2+c^2}{2a}$ und kleiner als a, so hat die Brennlinie wieder zwei reelle Asymptoten. Die Abhandlung enthält Untersuchungen und nähere Bestimmungen der verschiedenen Curven und die durch eine Zeichnung unterstützte Darstellung des Ueberganges der einzelnen Formen ineinander bei stetigem Fortrücken des strahlenden Punktes in der grossen Axe.

Görlitz. Dr. O. Kessler.

Louis Huebner: Behandlung der Bewegung der Knoten der Planetenbahnen für drei Planeten durch Einführung elliptischer Functionen nebst Einleitung des allgemeinen Problems. (Inauguraldissertation Königsberg 1878.)

Die vorgenannte Arbeit schliesst sich an die Abhandlung von Lagrange: sur le mouvements des noueds des orbites planétaires, mémoires de l'académie de Berlin, 1774. In dieser stützt sich Lagrange auf die im 2ten Bande seiner mécanique analytique aus der allgemeinen Störungsfunction durch Vernachlässigung der höheren Potenzen der Excentricität gefolgerte Annahme, dass, wenn ich die Ebene eines Planeten festhalte, sich die eines andern darauf bei gleichbleibender Neigung mit constanter Geschwindigkeit fortbewegt, und behandelt hiermit die Bewegung des Knotens zweier Planetenbahnen vollständig durch trigonometrische Functionen. Sodann leitet er das Problem für drei Planetenbahnen ein, stösst aber wegen seiner Unkenntniss der elliptischen Functionen sofort auf unüberwindliche Schwierigkeiten, und begnügt sich daher mit einer praktisch sehr brauchbaren Näherungsrechnung, die in gleicher Weise auch auf n Planetenbahnen anwendbar ist, aber auf der von ihm nicht bewiesenen Voraussetzung der ewig fortdauernden Kleinheit der Neigungswinkel der Planetenbahnen zu einander basirt. Wenn Lagrange schliesslich aus den gewonnenen Formeln die stetige Kleinheit derselben folgert, so macht er einen Zirkelschluss. Ich habe nun das Problem zunächst für drei Planeten nochmals in folgender Weise angegriffen. Sind P, Q, R drei grösste Kugelkreise, entsprechend den Ebenen der Planetenbahnen, so sind dieselben bestimmt durch ihre Neigungen ξ, η, ζ gegen einen festen Kreis und durch die Entfernungen ihrer Schnittpunkte mit diesem von einem festen Punkte auf ihm (x, y, z). Statt letzterer kann ich auch ξ', η', ζ', die Neigungen gegen einen zweiten mit ersterem einen rechten Winkel bildenden Kreis substituiren, woraus zu folgern, dass durch Lösung von Differentialgleichungen, in welchen ξ, η, ζ allein vorkommen, auch das ganze Problem gelöst ist. — In Nr. I meiner Arbeit werden nun die 6 simultanen Differentialgleichungen für x, y, z, ξ, η, ζ in neuer Form aufgestellt, in Nr. II sodann aus denselben die von Lagrange unmittelbarer gefundenen folgenden Differentialgleichungen für α, β, γ, die Neigungen der drei Planetenbahnen gegen einander, abgeleitet:

$$1)\ \frac{d\cos\alpha}{dt} = a \cdot u, \quad 2)\ \frac{d\cos\beta}{dt} = b \cdot u, \quad 3)\ \frac{d\cos\gamma}{dt} = c \cdot u,$$

wo $u = \sqrt{(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cdot\cos\gamma)}$,
auf welche, wie ich eben da zeige, auch folgende Differentialgleichungen zurückführbar sind:

$$\text{I)}\quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot dt} = a + b\cdot\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}\cdot z + c\cdot\sqrt{\frac{1-x^2}{1-z^2}}\cdot y,$$

$$\text{II)}\quad \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\cdot dt} = a\cdot\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}\cdot z + b + c\cdot\sqrt{\frac{1-y^2}{1-z^2}}\cdot x,$$

$$\text{III)}\quad \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\cdot dt} = a\cdot\sqrt{\frac{1-z^2}{1-x^2}}\cdot y + b\cdot\sqrt{\frac{1-z^2}{1-y^2}}\cdot x + c.$$

In Nr. III gewinne ich durch umfangreiche Rechnungen aus den Gleichungen von Nr. I drei Differentialgleichungen für $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ von der Form:

$$\text{I)}\quad \frac{d^2\cos\xi}{dt^2} = A_1\cos\xi + A_2\cos\eta + A_3\cos\zeta,$$

ebenso II) und III) für η, ζ; worin die Coefficienten A u. s. f. $= p\cdot\cos\alpha + q\cdot\cos\beta + r\cdot\cos\gamma + s$, wenn p, q, r, s gegebene Constante sind. In Nr. IV entwickele ich zunächst eine Reihe interessanter Relationen zwischen den Winkeln, welche 4 sich schneidende grösste Kugelkreise bilden, wie die Determinantengleichung:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\zeta & \cos\eta & \cos\xi \\ \cos\xi & 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\eta & \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\zeta & \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = 0$$

und benutze diese dann zur Ableitung von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung für $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ von der Form:

$$\frac{d\cos\xi}{dt} = A_1'\cos\xi + A_2'\cos\eta + A_3'\cos\zeta,$$

wo die A aber complicirtere Ausdrücke in den Variabeln $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sind. Letztere für mich nicht integrirbare Differentialgleichungen werden später nothwendig gebraucht zur Bestimmung der sechs willkührlichen Constanten der obigen Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch den Anfangszustand, da nur ξ_0, η_0, ζ_0 gegeben sind,

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0,\quad \left(\frac{d\eta}{dt}\right)_0,\quad \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0,$$

also durch diese ausgedrückt werden müssen.

In Nr. V werden in einfacher Weise bei den Differentialgleichungen für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ zwei dieser Variabeln eliminirt und die Zeit als elliptisches Integral der dritten ausgedrückt. Die

eingehende Discussion des vorkommenden Ausdrucks 3ten Grades zeigt dann schon, dass das sphärische Dreieck, dessen Winkel α, β, γ sind, zwischen zwei Grenzzuständen periodisch hin- und herschwankt, bei welchen es in einen Punkt zusammengezogen erscheint. — Die Umformung und Umkehrung des Integrals führt dann auf die Lösung:

$$\cos\alpha = \cos\alpha_1 + (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\sin^2 \text{am}\,\frac{Kt}{T},$$

wo $\frac{K}{T} = \frac{\sqrt{-2bc(\xi - \cos\alpha_1)}}{2}$ und $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, ξ die Wurzeln jener kubischen Gleichung sind. In Nr. VI werden dieselben Differentialgleichungen in symmetrischer Form behandelt, indem $\int u\,dt = x$, wenn $u = \sqrt{(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)}$ als neue Variabele eingeführt wird und daran ausser Anderem ein vollständig exacter Beweis angeschlossen, dass, wenn die Neigungswinkel α, β, γ einmal kleine Grössen sind, sie es immer bleiben. — In Nr. VII zeigt sich, wie durch Lösung der eben erwähnten simultanen drei Differenzialgleichungen auch folgende Differenzialgleichung 3ter Ordnung mitgelöst ist:

$$u \cdot \frac{d^3u}{dt^3} - \frac{du}{dt} \cdot \frac{d^2u}{dt^2} = \text{Const. } u^3,$$

die nach einmaliger Integration auf die physikalisch wichtige Gleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p + q \cdot x + r \cdot x^2$$

führt, auf die dann weiter die Lösung der physikalisch gleichfalls verwendbaren und von Lamé bereits verwandten Gleichung:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = u\,\{p + q \cdot \sin^2 \text{am}\,(mt, k)\}$$

zurückgeführt ist. — Nr. VIII führt den Nachweis, dass die oben erwähnte Determinantengleichung ein particuläres Integral der Differentialgleichung für ξ, η, ζ ist. — Nr. IX bringt endlich die Integration der Differentialgleichung für ξ, η, ζ. Es werden zunächst für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ihre vorhin gewonnenen Darstellungen als Functionen der Zeit eingesetzt und dann sieht man sogleich, dass, wenn jene kubische Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, für $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ lineare Differentialgleichungen 2ter Ordnung mit constanten Coefficienten folgen, welche bekanntlich exact trigonometrisch lösbar sind. — Führe ich dann für $\sin^2 \text{am}\,\frac{Kt}{T}$ die Reihenentwickelung nach Cosinus der Vielfachen ein, so zeigen sich, wenn ich bereits die erste Potenz des hier sehr kleinen $q = e^{-\frac{\pi . K'}{K}}$ ver-

nachlässige, wieder Gleichungen der eben erwähnten Form für cos ξ, cos η, cos ζ. Von der bekannten Lösung solcher Differentialgleichungen aus kann ich dann bei Berücksichtigung höherer Potenzen von q durch die Methode der Variation der Constanten schnell zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit fortschreiten. — Nr. X zeigt noch, wie weit es mir bisher gelungen, bei n Planeten analoge Differentialgleichungen aufzustellen. Integrationsversuche dürften schon bei 4 Planeten auf unüberwindliche Schwierigkeiten stossen.

Königsberg. Louis Huebner.

A. Favaro: Notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni. (Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena. Tomo XVIII.) Modena, 1878.

L'applicazione dei metodi costruttivi o grafici ai calcoli d'indole più elevata va facendo progressi continui, e, particolarmente in questi ultimi tempi si vennero proponendo d'ogni parte procedimenti atti a rappresentare mediante costruzioni geometriche le formule spesso le più ardue dell' analisi.

Facendo astrazione dal singolare favore in che sono oggidì gli studi geometrici, e che in altra circostanza l'Autore ha cercato di mettere in evidenza, vi sono due cause, le quali giustificano appieno e razionalmente questa manifesta tendenza. La prima si è che pressochè sempre una costruzione parla agli occhi un linguaggio assai più chiaro che non una formula, per quanto semplice: la seconda, che, quando col sussidio di simboli e di cifre si è compiuta la ricerca d'una soluzione matematica, ne rimangono traccie molto più difficili a seguirsi che non quando la soluzione stessa venne trovata mercè costruzioni, le quali dipendono le une dalle altre in un ordine necessario di successione. Le formule analitiche costituiscono indubbiamente mezzi potenti di investigazione: esse convengono in modo mirabile, allorquando si tratti di calcolare un risultato con un determinato grado di esattezza, anzi questa esattezza potrà, in generale, spingersi per tal via quanto si voglia, ma le costruzioni geometriche, d'ordinario assai più sollecite, presentano un requisito che le formule non possiedono se non teoricamente, quello cioè della continuità: i punti di una linea si succedono senza interruzioni; i risultati numerici calcolati col mezzo della formula che rappresenta la stessa linea, sono necessariamente discontinui.

I procedimenti costruttivi, è d'uopo riconoscerlo, non permettono di raggiungere l'esattezza, alla quale si può pervenire mercè i calcoli numerici, ma però forniscono una approssimazione più che sufficiente per i bisogni della pratica.

Nel presente lavoro, pur prendendo principalmente di mira lo sviluppo storico della costruzione delle equazioni, l'Autore non trascurò di porre in evidenza quanto in tale indagine gli si offerse di interessante così intorno all' uso dei metodi grafici in generale, come anche intorno a certe questioni di analisi geometrica che gli sembrarono più o meno strettamente legate all' argomento che egli si era proposto di svolgere.

Era dapprima intenzione dell' Autore di estendere le sue indagini a questo proposito dai tempi più antichi fino ai nostri giorni. Gli sembrava infatti che, atteso lo straordinario favore in che sono venuti in questi ultimi tempi i metodi costruttivi, non fosse senza qualche interesse il raccogliere sotto la forma modesta di inventario quanto finora venne fatto — anche per evitare, ciocchè troppo sovente accade oggidì perfino a coloro che vanno per la maggiore, di ripetere, più o meno scientemente, quanto venne già fatto per lo passato e talvolta anche meglio che non si faccia oggidì. Senonchè preoccupazioni diverse avendo impedito all' Autore di compiere il programma che s'era prestabilito, giudicò opportuno di pubblicare per intanto la prima parte del suo lavoro, che condotta secondo l'ordine cronologico, guinge fino a Vieta.

Questa prima parte venne dall' Autore divisa in quattro capitoli.

Nel primo egli si fa a studiare le prime traccie dei metodi costruttivi nella aritmetica pitagorica, nelle varie soluzioni grafiche e meccaniche dei due famosi problemi della duplicazione del cubo e della trisezione dell' angolo, negli *Elementi* e nei *Dati* di Euclide, nei commentarii di Eutocio al *Trattato della sfera e del cilindro* di Archimede, nell' uso che delle coniche fece Apollonio, nelle regole immaginate da Pitagora e da Platone per ottenere sistemi indeterminati di triangoli rettangoli, i cui lati sieno espressi mediante numeri interi ed in Diofanto.

Il secondo capitolo è particolarmente dedicato all' India ed ai materiali che per la costruzione delle equazioni offrono in ispecial modo gli scritti di Brahmegupta e di Bhascara.

Il terzo capitolo mette in evidenza i materiali che per lo sviluppo storico dell' argomento vengono offerti dagli scritti dei matematici

arabi pervenuti fino a noi e con tanta erudizione e profondità illustrati dal Rosen e dal Woepcke.

Il quarto finalmente segue lo sviluppo dei metodi costruttivi in Italia per opera di Leonardo Pisano, di frate Luca Pacioli, di Tartaglia, di Cardano e di Giovanni Battista Benedetti.

Onde raggiungere pertanto quel più lato scopo che da principio l'Autore erasi prefissato, aveva egli avuto cura di incominciare già a raccogliere quel materiale, che era necessario a proseguire il lavoro fino ai giorni nostri. Questa parte di materiale, che finora era riuscito a raccogliere, pose egli sotto forma di appendice ed a tale aggiunta fu indotto nella lusinga che delle indicazioni da lui fornite possa giovarsi qualche altro il quale trovi l'argomento abbastanza interessante da meritare di spendervi le proprie fatiche. A proposito di questi materiali, l'Autore fa appello a quelli fra i suoi Colleghi di studio che vi getteranno gli occhi, affinchè col segnalargli le eventuali lacune, vogliano concorrere a facilitargli il compimento della seconda parte del suo lavoro, quando egli potrà di nuovo rivolgervi la sua attenzione.

Nella disposizione di questi materiali, l'Autore serbò l'ordine cronologico della pubblicazione, meno per quei casi nei quali questo fosse in notoria ed evidente opposizione coll' ordine cronologico della produzione, che in lavori d'indole storica non deve essere trascurato. I brevi schiarimenti aggiunti si propongono di porgere una idea sommaria del contenuto dei singoli lavori, particolarmente nel caso in cui il titolo dello scritto non lo dichiari abbastanza esplicitamente: tutte le volte pertanto in cui gli fu possibile, ai suoi personali apprezzamenti l'Autore sostituì o quelli dell' autore dello scritto o quelli di altri scrittori che in qualche occasione avevano esternato eventualmente il loro parere intorno al valore od al contenuto degli scritti citati.

A. Favaro: Considerazioni intorno ad una statistica degli scienziati vissuti nei due ultimi secoli. (Rivista Periodica della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Padova. Volume XXVIII.) Padova, 1878.

Nel presente scritto l'Autore si è proposto di analizzare le conclusioni alle quali pervenne il signor Alfonso de Candolle nella ben nota sua opera: *Histoire des Sciences et des Savants depuis deux*

siècles, che realmente non è se non una statistica illustrata dei più valenti scienziati che appartennero alle tre principali Accademie scientifiche, vale a dire all' Accademia delle Scienze di Parigi, alla Società Reale di Londra ed alla Accademia di Berlino.

A. Favaro: Intorno alla pubblicazione fatta dal Dr. Carlo Malagola di alcuni documenti relativi a Niccolò Copernico e ad altri astronomi e matematici dei Secoli XV e XVI. (Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche. Tomo XI.) Roma, 1878.

La pubblicazione della quale quì si occupa l'Autore venne già annunciata due or sono all' incirca da questo medesimo periodico (Erster Band, S. 185—186). Il presente scritto tuttavia non è un analisi del volume pubblicato dal signor Malagola, ma bensì uno studio di tutto quanto nel detto volume si contiene di interessante per la Storia delle Matematiche. Quest' ultimo argomento per verità non entra se non per incidenza nel volume in discorso e vi si lega soltanto perchè, come tutto porta a credere, Niccolò Copernico fu scolaro di Antonio Urceo detto Codro, al quale l'opera del signor Malagola è precipuamente dedicata.

Ed infatti i documenti i quali interessano la Storia delle Matematiche abbondano nel volume medesimo: l'Autore della pubblicazione della quale si è riferito il titolo li analizza tutti e si giova di essi e di altre notizie raccolte in tale occasione per fissare alcuni punti ancora non bene definiti o per rettificare alcune inesattezze, nelle quali scrittori precedenti erano caduti.

Padova. A. Favaro.

L. Koenigsberger: Ueber die Beziehung der complexen Multiplication der elliptischen Integrale zur Reduction gewisser Klassen Abel'scher Integrale auf elliptische. (Borchardt's Journal für Mathematik.)

Nachdem von denjenigen Mathematikern des vorigen Jahrhunderts, welche, durch die Untersuchungen von Fagnano dazu veranlasst, sich mit dem Additions- und Multiplicationstheorem der

elliptischen Integrale und gewisser Integrale von Functionen höherer Irrationalität beschäftigten, einzelne Integrale algebraischer Functionen auf elliptische Integrale zurückgeführt worden, war Legendre der erste, welcher in seinem „traité des fonctions elliptiques“ zwei Klassen solcher reducirbarer Integrale aufstellte, nämlich:

$$\text{(a)} \qquad \int f\left(z, \sqrt[3]{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3}\right) dz$$

und

$$\text{(b)} \qquad \int f\left(z, \sqrt[4]{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4}\right) dz.$$

Die späteren Untersuchungen von Riemann und Clebsch haben das Problem von einer anderen und allgemeineren Seite aufgefasst, indem die algebraischen Gleichungen, welche den Abel'schen Integralen zu Grunde gelegt wurden, durch ihre Geschlechtszahl p charakterisirt wurden, und als Abel'sche Integrale, welche auf elliptische reducirt werden können, solche bezeichnet wurden, für welche $p = 1$ ist. Davon verschieden ist jedoch die Frage nach den *einzelnen* Integralen, welche auf elliptische Integrale reducirbar sein können, ohne dass die Geschlechtszahl $p = 1$ zu sein braucht, und gerade diese Frage ist in der Integralrechnung von grosser Wichtigkeit und spielt in den Anwendungen eine wesentliche Rolle.

Ueber eine von mir angestellte Untersuchung über die Reduction hyperelliptischer Integrale auf elliptische habe ich im zweiten Hefte dieses Bandes referirt und bei Gelegenheit dieser Untersuchung kam ich naturgemäss auf die Frage der Reduction auf elliptische Integrale für die nächst höhere Gattung Abel'scher Integrale

$$\int F\left(z, \sqrt[n]{(z-\alpha_1)^{m_1}(z-\alpha_2)^{m_2}\cdots(z-\alpha_\varrho)^{m_\varrho}}\right) dz,$$

für welche mir nur der Fall der Legendre'schen Integrale bekannt war, und für diesen Fall ein von Roethig (Crelle's Journal B. 56) gefundenes, eigenthümliches Resultat, dass sich die Integrale von der Form (a) auf elliptische Integrale zurückführen lassen, deren Modul $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ ist, die Integrale von der Form (b) auf elliptische Integrale mit dem Modul $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Dieses letztere Resultat von Roethig war die Veranlassung zu der Arbeit, über die ich jetzt kurz referiren will.

Aus meinen früheren Arbeiten folgt der Satz, dass, wenn eine Gleichung von der Form

$$\int^{z_1} F(z, \sqrt[n]{R(z)})\, dz = \int^{x_1} f_1(x, \sqrt{\varphi_1(x)})\, dx + \int^{x_2} f_2(x, \sqrt{\varphi_2(x)})\, dx + \cdots$$

$$+ \int^{x_r} f_r(x, \sqrt{\varphi_r(x)})\, dx + u + A_1 \log v_1 + \cdots + A_\nu \log v_\nu$$

besteht, worin

$$\varphi_u(x) = (1 - x^2)(1 - k_u{}^2 x^2)$$

ist, *dann auch zur Irrationalität* $\sqrt[n]{R(z)}$ *gehörige Integrale erster Gattung existiren, welche auf je ein zu den elliptischen Integralen der rechten Seite gehöriges Integral erster Gattung reducirbar sind.*

Es folgt sodann die Darstellung der Integrale erster Gattung, welche zu $\sqrt[n]{R(z)}$ gehören, und es wird die allgemeine Frage darauf zurückgeführt, diejenigen *Fundamentalintegrale* erster Gattung zu charakterisiren, für welche

$$\int \psi_r(z) \left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^r dz = \int \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}$$

$$\int \psi_r(z) \left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^r dz + \int \psi_s(z) \left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^s dz = \int \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int \psi_1(z) \sqrt[n]{R(z)}\, dz + \int \psi_2(z) \left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^2 dz + \cdots$$

$$+ \int \psi_{n-1}(z) \left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^{n-1} dz = \int \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}$$

ist.

Nachdem für die erste Klasse zu den bekannten Integralen noch die Beziehung

$$\int \frac{dz}{\left(\sqrt[6]{a + 2bz + cz^2}\right)^5} = \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x(b^2 + (x^3 - a)c)}}$$

vermöge der Substitution

$$a + 2bz + cz^2 = x^3$$

hinzugefügt worden, wird der Satz bewiesen,

> *dass der Modul des elliptischen Integrales, auf welches ein Abel'sches Fundamentalintegral der obigen Art reducirbar ist, ein Modul der complexen Multiplication sein muss.*

Nach einer Darstellung des Abel'schen Satzes, dass der Multiplicator der complexen Multiplication von der Form $A + i\sqrt{B}$ sein muss, worin A und B rationale Zahlen bedeuten, von denen die letztere wesentlich positiv ist, wird gezeigt, dass gleiche Multiplicatoren nur dann zwei verschiedenen Moduln der complexen Multiplication zugehören können, wenn die Moduln ineinander trans-

formirbar sind, und dass ferner die verschiedenen Multiplicatoren, welche demselben complexen Multiplicationsmodul angehören, in ganzer linearer Beziehung von einander abhängen, also die Form haben

$$a = P + iQ\sqrt{R} \quad \text{und} \quad a' = P' + iQ'\sqrt{R}.$$

Aus diesen Sätzen wird durch einfache Schlüsse gefolgert, *dass ein Abel'sches Fundamentalintegral der Form*

$$\int \psi(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^r dz$$

nur dann auf ein elliptisches Integral reducirbar sein kann, wenn $n = 2, 3, 4, 6$ ist.

Diesen vier Fällen entsprechen die Gleichungen

$$\frac{d\eta}{\sqrt{\varphi(\eta)}} = -\frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}$$

$$\frac{d\eta}{\sqrt{\varphi(\eta)}} = \left(\pm\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}$$

$$\frac{d\eta}{\sqrt{\varphi(\eta)}} = i\,\frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}$$

von denen die erste uns hier nicht interessirt, während aus den beiden andern mit Hülfe der vorher entwickelten Sätze sich das folgende Theorem ergiebt:

Wenn ein Abel'sches Integral erster Gattung von der Form

$$\int \psi(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^r dz,$$

worin $n > 2$ auf ein elliptisches Integral reducirbar sein soll, so kann dies nur für $n = 3, 4, 6$ der Fall sein, und zwar haben die elliptischen Integrale, auf welche sich die Integrale

$$\int \psi(z)\left(\sqrt[3]{R(z)}\right)^r dz, \quad \int \psi(z)\left(\sqrt[6]{R(z)}\right)^r dz$$

reduciren lassen, den Modul der complexen Multiplication $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ oder einen aus diesem transformirten, während die elliptischen Integrale, auf welche die Abel'schen Integrale

$$\int \psi(z)\left(\sqrt[4]{R(z)}\right)^r dz$$

zurückführbar sein können, den complexen Multiplicationsmodul $\sqrt{\frac{1}{2}}$ oder einen aus diesem transformirten besitzen.

Für den Fall der Reduction der Summe mehrerer Fundamentalintegrale auf *ein* elliptisches Integral wird zuerst das Beispiel aufgestellt

$$\frac{1}{\sqrt[4]{A}}\int\frac{dz}{\left(\sqrt[8]{a+2bz+cz^2}\right)^5}+\int\frac{dz}{\left(\sqrt[8]{a+2bz+cz^2}\right)^7}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{c}\left(\sqrt[8]{A}\right)^3}\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2x^2-1)}}$$
$$\frac{1}{\sqrt[4]{A}}\int\frac{dz}{\left(\sqrt[8]{a+2bz+cz^2}\right)^5}-\int\frac{dz}{\left(\sqrt[8]{a+2bz+cz^2}\right)^7}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{c}\left(\sqrt[8]{A}\right)^3}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)(2x^2-1)}},$$

worin

$$A=\frac{b^2-ac}{a},\quad a+2bz+cz^2=-Ax^4$$

ist, und für die allgemein zu untersuchende Gleichung

$$\psi_{r_1}(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^{r_1}dz+\psi_{r_2}(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^{r_2}dz+\cdots+\psi_{r_\nu}(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^{r_\nu}dz,$$

wenn $\alpha=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ gesetzt wird, die Bedingung gegeben

$$\text{(m)}\qquad\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} \\ \alpha^{r_1} & \alpha^{r_2} & \alpha^{r_3} & \cdots & \alpha^{r_\nu} & \frac{dy_1}{\sqrt{\varphi(y_1)}} \\ \alpha^{2r_1} & \alpha^{2r_2} & \alpha^{2r_3} & \cdots & \alpha^{2r_\nu} & \frac{dy_2}{\sqrt{\varphi(y_2)}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \alpha^{\nu r_1} & \alpha^{\nu r_2} & \alpha^{\nu r_3} & \cdots & \alpha^{\nu r_\nu} & \frac{dy_\nu}{\sqrt{\varphi(y_\nu)}} \end{vmatrix}=0,$$

um aus derselben Folgerungen für den Modul der elliptischen Integrale abzuleiten.

Es wird gezeigt, dass, wenn $\nu=n-1$, die Bedingungsgleichung die Form annimmt

$$\frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}+\frac{dy_1}{\sqrt{\varphi(y_1)}}+\cdots+\frac{dy_{n-1}}{\sqrt{\varphi(y_{n-1})}}=0,$$

und dass sich hieraus Eigenschaften der Moduln der elliptischen Integrale nicht ableiten lassen; ist jedoch $\nu<n-1$, so wird erst an einem Beispiele gezeigt, wie man wieder Folgerungen für den

Modul der Integrale ableiten kann, und sodann der Fall $\nu = 2$ allgemein untersucht, welcher der Gleichung

$$\alpha^{r_1+r_2} \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} - (\alpha^{r_1} + \alpha^{r_2}) \frac{dy_1}{\sqrt{\varphi(y_1)}} + \frac{dy_2}{\sqrt{\varphi(y_2)}} = 0$$

entspricht; für den Fall, dass $r_1 + r_2 = n$, schliesst man, dass die einzig möglichen Fälle mit Anwendung unmittelbar verständlicher Abkürzungen

$$\left(\sqrt{R(z)},\ \sqrt{R(z)}\right),\ \left(\sqrt[3]{R(z)},\ (\sqrt[3]{R(z)})^2\right),\ \left(\sqrt[4]{R(z)},\ (\sqrt[4]{R(z)})^3\right),$$
$$\left(\sqrt[6]{R(z)},\ (\sqrt[6]{R(z)})^5\right)$$

sind; für den Fall, dass $r_1 + r_2 = \frac{n}{2}, \frac{3n}{2}$, folgen als einzig mögliche Fälle

$$\left(\sqrt[6]{R(z)},\ (\sqrt[6]{R(z)})^2\right),\ \left((\sqrt[6]{R(z)})^4,\ (\sqrt[6]{R(z)})^5\right),\ \left(\sqrt[8]{R(z)},\ (\sqrt[8]{R(z)})^3\right),$$
$$\left((\sqrt[8]{R(z)})^5,\ (\sqrt[8]{R(z)})^7\right),\ \left(\sqrt[12]{R(z)},\ (\sqrt[12]{R(z)})^5\right),\ \left((\sqrt[12]{R(z)})^7,\ (\sqrt[12]{R(z)})^{11}\right),$$

wofür die elliptischen Integrale die complexe Multiplication besitzen, und zwar mit den für je zwei aufeinanderfolgende gültigen resp. Multiplicatoren

$$i\sqrt{3},\ i\sqrt{2},\ i$$

und somit auf Integrale mit den Moduln

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}},\ \sqrt{2}-1,\ \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

reducirt werden können, wofür das Beispiel

$$B_2 \frac{dx}{\sqrt[12]{x^4(x+1)^{11}}} - A_2 \frac{x(x+1)^4 dx}{(\sqrt[12]{x^4(x+1)^{11}})^5} \quad (A_1B_2 - A_2B_1) \frac{dY_1}{\sqrt{(1-Y_1^2)(1-\frac{1}{2}Y_1^2)}}$$

entwickelt wird.

Ist nun $\alpha^{r_1+r_2}$ nicht reell, so ist die folgende Methode der Untersuchung anzuwenden, die zugleich für den allgemeinen Fall $\nu < n - 1$ ausgeführt ist; es wird gezeigt, dass aus der Gleichung (m) oder aus

$$A \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} + A_1 \frac{dy_1}{\sqrt{\varphi(y_1)}} + \cdots + A_{\nu-1} \frac{dy_{\nu-1}}{\sqrt{\varphi(y_{\nu-1})}} + A_\nu \frac{dy_\nu}{\sqrt{\varphi(y_\nu)}} = 0,$$

worin die A aus den Potenzen der n^{ten} Einheitswurzel α zusammengesetzt sind, mit Hülfe eines Abel'schen Satzes die Gleichung folgt

$$A\delta + m_1 A_1 + m_2 A_2 + \cdots + m_\nu A_\nu = 0,$$

worin δ eine positive ganze Zahl, m_α, wenn es reell ist, ebenfalls eine ganze Zahl bedeutet, wenn es imaginär ist, die Form hat

$$\tfrac{1}{2}(\lambda_\alpha + i\sqrt{\mu_\alpha}),$$

worin λ_α und μ_α ganze Zahlen vorstellen, von denen die letztere wesentlich positiv ist, und es fragt sich, ob aus dieser Gleichung weitere Folgerungen abgeleitet werden können.

Für $\nu = 2$ geht diese Gleichung in

$$\delta \alpha^{r_1 + r_2} - m_1 (\alpha^{r_1} + \alpha^{r_2}) + m_2 = 0$$

über, und es wird an diesem Falle der Gang der weiteren Untersuchung skizzirt und gezeigt, in welcher Verbindung diese Fragen mit der Kreistheilung stehen..

Wien. **Leo Koenigsberger.**

L. Koenigsberger: Ueber die Erweiterung des Jacobi'schen Transformationsprincips.

Bekanntlich hat Jacobi in seinen ersten Arbeiten über die Theorie der elliptischen Functionen nachgewiesen, dass, was auch p für eine positive ganze Zahl sein mag, stets eine Substitution von der Form

$$y = \frac{a + a'x + a''x^2 + \cdots + a^{(p)}x^p}{b + b'x + b''x^2 + \cdots + b^{(p)}x^p}$$

bestimmt werden könne, welche

$$\frac{dy}{\sqrt{A' + B'y + C'y^2 + D'y^3 + E'y^4}} \text{ in } \frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}}$$

überführt, und zwar wird der Beweis auf rein algebraischem Wege geführt durch Abzählung der Constanten und Aufsuchung der für dieselben bestehenden Bedingungsgleichungen. Wie Richelot in der ersten seiner beiden ausgezeichneten Arbeiten über die Transformation der Abel'schen Functionen nachgewiesen hat, ist es unmöglich für Polynome von höherem Grade als dem vierten eine solche rationale Transformation eines hyperelliptischen Integrales erster Gattung in ein anderes zu einem Polynome gleichen Grades gehöriges derselben Gattung herzustellen, und es war wieder Jacobi, welcher Richelot auf die Untersuchung irrationaler, durch quadratische Gleichungen definirter Substitutionen für die hyperelliptischen Integrale erster Ordnung führte, welche das Analogon zur Landen'schen Transformation der elliptischen Integrale bildeten. Diese

Untersuchungen wurden in keiner Weise weitergeführt, da die Methoden nur für jene specielle Substitution anwendbar waren, bis Hermite im Jahre 1855 diese Frage von einer ganz andern Seite her beleuchtete, indem er sich die Aufgabe der Transformation der zu den hyperelliptischen Integralen erster Ordnung gehörigen ϑ-Functionen stellte und die Fundamentalsätze dieser Theorie entwickelte. Von dieser Arbeit Hermite's ausgehend habe ich selbst in einer Reihe früherer Arbeiten genauere Untersuchungen über die Transformation zweiten und dritten Grades angestellt und auch gezeigt, wie man von den Transformationsformeln der ϑ-Functionen aus zu den von Richelot auf rein algebraischem Wege gefundenen Resultaten für eine Transformation zweiten Grades gelangen kann.

Dass jedoch die algebraische Behandlung des Transformationsproblems oder die Erweiterung des von Jacobi für die Transformation der elliptischen Integrale angewandten Princips bisher noch nicht versucht worden, liegt unzweifelhaft darin, dass man erst das Analogon zu dem von Abel für elliptische Integrale aufgestellten Satze haben musste, welcher zeigte, dass jede algebraische Transformation eines elliptischen Integrales durch eine rationale ersetzt werden könne. Nun habe ich in der siebenten Vorlesung meiner „Theorie der hyperelliptischen Integrale“ nachgewiesen, dass, wenn eine Beziehung von der Form besteht

$$F(z, \sqrt{R(z)})\,dz = F_1(z_1, \sqrt{R_1(z_1)})\,dz_1 + u + A_1 \log v_1 + \cdots + A_r \log v_r,$$

worin

$$R(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{2p+1})$$
$$R_1(z_1) = (z_1-\beta_1)(z_1-\beta_2)\cdots(z_1-\beta_{2p+1})$$

ist, daraus die Beziehung hervorgeht

$$\frac{dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{dY_p}{\sqrt{R_1(Y_p)}} = 2\,\frac{F_1(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$
$$\frac{Y_1\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{Y_2\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{Y_p\,dY_p}{\sqrt{R_1(Y_p)}} = 2\,\frac{F_2(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{Y_1^{p-1}\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{Y_2^{p-1}\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{Y_p^{p-1}\,dY_p}{\sqrt{R_1(Y_p)}} = 2\,\frac{F_p(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}},$$

worin

$$F_1(z),\ F_2(z),\ \ldots\ F_p(z)$$

ganze Functionen des $p-1^{\text{ten}}$ Grades,

$$Y_1, Y_2, \ldots Y_p$$

Lösungen der algebraischen Gleichung

$$Y^p + \chi_1(z) Y^{p-1} + \chi_2(z) Y^{p-2} + \cdots + \chi_p(z) = 0$$

sind, deren Coefficienten rationale Functionen von z sind, und für welche

$$\sqrt{R_1(Y_1)}, \sqrt{R_1(Y_2)}, \ldots \sqrt{R_1(Y_p)}$$

sich als rationale Functionen der zugehörigen Y-Grössen und z ausdrücken lassen multiplicirt mit $\sqrt{R(z)}$; es wird auch weiter die Umkehrung dieses Satzes bewiesen.

Wird nun dieser Satz zu Grunde gelegt, so ist die Untersuchung der Transformation der hyperelliptischen Integrale darauf zurückgeführt, in der Gleichung

$$\varphi_0(z) Y^p + \varphi_1(z) Y^{p-1} + \cdots + \varphi_{p-1}(z) Y + \varphi_p(z) = 0$$

die unbestimmten Coefficienten der ganzen Functionen

$$\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots \varphi_p(z)$$

so zu bestimmen, dass der Quotient der Irrationalitäten

$$\frac{\sqrt{(Y-\beta_1)(Y-\beta_2)\cdots(Y-\beta_{2p+1})}}{\sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{2p+1})}}$$

auf der die Grösse Y als Function von z darstellenden Riemann'schen Fläche eindeutig, also wie Y verzweigt ist, und somit nach einem bekannten Riemann'schen Satze als rationale Function von z und Y dargestellt werden kann.

Die Untersuchung wird für gerade und ungerade p mit Hülfe der Reihenentwickelungen um die Verzweigungspunkte herum angestellt und durch Abzählung der zur Verfügung stehenden Constanten und der durch das Problem gelieferten Bedingungen der Satz bewiesen,

dass das allgemeine Transformationsproblem in dem von Jacobi aufgestellten Sinne bei beliebig gewählten Lösungen des Polynoms $R(z)$ nur für die elliptischen Integrale und die hyperelliptischen Integrale erster Ordnung möglich ist,

und durch den Gang der Untersuchung auch die Methode angegeben, wie man für die hyperelliptischen Integrale erster Ordnung die Transformation auf rein algebraischem Wege ausführen und somit ähnliche Untersuchungen anstellen kann, wie sie von Jacobi für elliptische Integrale in der algebraischen Herleitung der Transformationsausdrücke und der Bildung der Modulargleichungen gegeben worden.

Wien. **Leo Koenigsberger.**

J. Hoüel: Cours de calcul infinitésimal. (Tome premier. Paris 1878.)

Ce Traité est en grande partie la reproduction de mes Leçons autographiées, qui ont été publiées en 1871 et 1872, et tirées à un petit nombre d'exemplaires. Ce tirage, ayant été promptement épuisé, j'ai pensé qu'une édition plus complète, mise au courant des nouveaux programmes de l'Enseignement supérieur, pourrait rendre quelques services aux aspirants à la licence ès Sciences mathématiques, et j'ai profité du bienveillant concours que M. Gauthier-Villars s'est empressé de m'accorder pour cette publication.

L'Ouvrage est divisé en six Livres, précédés d'une Introduction, dans laquelle j'expose diverses notions préliminaires, utiles ou même nécessaires pour la lecture de ce qui suit.

Le premier des trois Chapitres qui composent cette Introduction contient les principes généraux du Calcul des opérations considérées au point de vue le plus abstrait, indépendamment de leur nature intrinsèque et de celle des quantités qui leur sont soumises, et en ayant égard uniquement à leurs propriétés *combinatoires*. Ces notions, que l'on peut d'ailleurs laisser de côté dans une première lecture de l'Ouvrage, m'ont paru indispensables pour le lecteur qui veut se familiariser avec les considérations, d'un degré d'abstraction de plus en plus élevé, qu'exigent les progrès de l'Analyse, à mesure que l'objet de ses recherches devient de plus en plus compliqué.

La méthode que j'ai adoptée est celle qu'a suivie Hankel dans ses *Vorlesungen über complexe Zahlen*. J'ai seulement remplacé les notations de cet auteur par celles dont Grassmann a fait usage dans ses ouvrages, et qui ont l'avantage de se prêter facilement à la généralisation, parce qu'elles ne rappellent par leur forme aucune des notations usuelles, tout en permettant de conserver aux calculs la disposition à laquelle on est habitué.

Ces notions sont éclaircies par l'application que j'en fais, dans le Chapitre suivant, à la généralisation de l'idée de quantité, conduisant successivement des quantités *arithmétiques* aux quantités

négatives et aux quantités *imaginaires* ou *complexes*. On est amené à la considération de ces quantités par la résolution des équations du premier et du second degré, lorsqu'on veut étendre à tous les cas les propriétés reconnues dans les cas où ces équations sont arithmétiquement résolubles; on reconnaît ensuite que les mêmes symboles suffisent pour la résolution générale des équations algébriques de tous les degrés. Les opérations auxquelles ces symboles doivent être soumis ne diffèrent en rien par leurs propriétés*) des opérations analogues relatives aux quantités arithmétiques, et l'admission de ces symboles ne pouvant amener à aucune conséquence contradictoire, le calcul de ces quantités, considérées au point de vue purement abstrait, est assis dès lors sur des bases certaines, et ne peut conduire qu'à des résultats absolument vrais.

Mais, si les exigences de la Science pure se trouvent ainsi complétement satisfaites, il en est tout autrement des besoins de l'enseignement. Pour se classer dans l'esprit des commençants, les idées abstraites ne peuvent guère se passer d'une représentation par des images physiques, sans laquelle il serait bien difficile d'en comprendre la signification et l'utilité. Jusqu'à ce que Descartes eût représenté géométriquement les racines négatives des équations, on les appela *racines fausses*. Jusqu'au jour où les travaux d'Argand et de Gauss ont découvert la traduction géométrique des quantités complexes, elles n'ont cessé d'être regardées comme des symboles *imaginaires*.

L'objet du Chapitre II est d'établir la possibilité de cette représentation. Après avoir rappelé la théorie connue des quantités négatives, je démontre que les opérations sur le signe représentatif d'un point du plan ont des propriétés identiques à celles qu'il faut attribuer, en Algèbre, aux opérations portant sur le symbole $a + b\sqrt{-1}$. Il en résulte que ce symbole peut être pris comme représentation d'un point du plan, et ainsi les calculs sur les imaginaires trouvent maintenant leur réalisation géométrique. Cette interprétation a pour effet de guider et de rassurer l'esprit peu familier encore avec le monde de l'abstraction, et qui n'accepterait pas sans défiance l'usage que l'on ferait de symboles mystérieux et d'apparence contradictoire, pour servir de lien entre des notions réelles et palpables.

*) Sauf en ce qui concerne *l'uniformité* des opérations inverses de l'élévation aux puissances.

Le Chapitre III de l'Introduction avait été rédigé à une époque où la théorie des déterminants n'avait pas encore acquis droit de bourgeoisie dans notre enseignement élémentaire. J'ai cru devoir le conserver ici, pensant qu'il serait commode pour le lecteur d'avoir sous la main un résumé succinct de toutes les propositions de cette théorie qui seront invoquées dans la suite de ce Traité.

Le premier Livre traite des principes du Calcul infinitésimal. Comme l'indique le titre même de l'Ouvrage, j'ai renoncé, suivant l'exemple déjà donné dans d'excellents Traités, à la division de l'Analyse supérieure en *Calcul différentiel* et *Calcul intégral*; cette division ne m'a pas paru fondée sur le degré de difficulté de l'étude de ces deux branches, dont le point de départ est le même, et elle présente l'inconvénient de priver du secours mutuel que se prêtent dès le début les deux opérations, inverses l'une de l'autre, de la différentiation et de l'intégration. Enfin l'étude simultanée des premiers éléments des deux calculs permet à l'étudiant d'arriver plus vite à s'exercer sur les applications les plus variées du calcul à la Géométrie ou à la Mécanique.

En ce qui touche la méthode d'exposition des principes du Calcul infinitésimal, il n'y avait pas, en réalité, de choix à faire; il n'existe qu'une seule méthode rigoureuse, de quelque forme qu'on la revête et quelque nom qu'on lui donne, qu'on l'appelle *méthode des infiniment petits* ou *méthode des limites:* c'est la méthode de Cauchy et de Duhamel, que l'on peut exposer de bien des manières différentes, en mettant plus ou moins en relief le principe sur lequel on s'appuie, en déguisant plus ou moins le rôle que l'on fait jouer aux infiniment petits, en confondant même quelquefois la timidité du langage avec la rigueur du raisonnement.*)

On doit à Duhamel d'avoir, le premier, formulé nettement le principe qui identifie ces méthodes, si diverses qu'elles soient en apparence. Le but du Calcul infinitésimal est généralement la détermination des limites de rapports ou de sommes de certaines variables auxiliaires, appelées *quantités infiniment petites*, et le plus souvent ce but ne peut être atteint qu'en remplaçant ces variables par d'autres quantités susceptibles d'une expression plus simple, et conduisant au même résultat final. Le principe de Duhamel, que l'on peut nommer le *principe de substitution des infiniment petits*,

*) Dans un des Traités de *Calcul différentiel* les plus justement estimés, la *différentielle* d'une fonction n'est définie qu'au dernier Chapitre.

consiste en ce que, dans les deux cas cités, on peut remplacer un infiniment petit par un autre infiniment petit dont le rapport au premier ait pour limite l'unité. En ne perdant jamais de vue ce principe, on pourra se servir en toute sécurité du langage et de la notation des infiniment petits, qui a sur celui de la méthode dite *des limites* l'immense avantage de la concision et de la simplicité, et qui seul permet au géomètre de se laisser guider, comme moyen d'induction, par le sentiment de l'évidence tiré de la considération des grandeurs finies.

Mais, pour pouvoir appliquer ce principe, il faut être en mesure de reconnaître l'ordre de grandeur relative de deux infiniment petits, et de décider dans quels cas l'un d'eux peut être négligé, comme étant une fraction infiniment petite de l'autre. Cette question de limite de rapport se ramène à la recherche des dérivées, par l'étude desquelles il est nécessaire de commencer l'exposition de l'Analyse des infiniment petits. Je me suis efforcé d'introduire dans cette étude toute la rigueur que l'on rencontre dans les récents travaux sur ce sujet, et en particulier dans le Traité de M. J.-A. Serret. Je suis hautement redevable, pour cette partie, aux précieux conseils de MM. Darboux et H.-A. Schwarz.

Les bases de l'Analyse infinitésimale étant ainsi posées, on peut alors introduire dans le calcul les accroissements infiniment petits eux-mêmes ou les *différentielles*, sans passer par la considération étrangère des accroissements finis, et sans être obligé de substituer à la notion si simple de l'accroissement infinitésimal des conceptions artificielles, ayant pour seul but de donner aux équations entre quantités infiniment petites (ou infiniment grandes) une exactitude absolue, qu'il n'est pas dans leur nature de présenter, et qui n'aurait aucune influence sur le résultat final. Ces artifices, qui pouvaient avoir leur raison d'être à une époque où l'on mettait encore en doute la légitimité de la méthode infinitésimale, sont aujourd'hui devenus superflus. Ils ont même l'inconvénient de ne pas concorder en apparence avec le langage des infiniment petits, employé de tout temps dans les applications pratiques, et qui présente alors, aux yeux des commençants, l'aspect d'un simple procédé d'approximation.

Ces considérations m'ont fait revenir à la notation adoptée par Duhamel dans la première édition de son *Cours d'Analyse*. La différentielle d'une fonction $y = f(x)$ est définie comme l'accroissement infiniment petit de cette fonction, correspondant à l'accroissement infiniment petit dx de la variable indépendante. Mais,

si cet accroissement doit figurer dans la recherche d'une limite de rapport ou de somme, on peut, sans changer le résultat cherché, altérer la quantité dy d'une fraction d'elle-même infiniment petite, et considérer en général les différentielles comme représentant, soit les accroissements eux-mêmes des variables, soit des quantités quelconques différant de ces accroissements respectifs de fractions d'elles-mêmes infiniment petites. Il m'a donc semblé superflu de désigner ces quantités tour à tour par deux caractéristiques différentes Δ et d; cette double notation ne pouvant avoir pour effet que d'obscurcir dans l'esprit des commençants la vraie notion de l'infiniment petit.

Dans l'exposition des principes, j'ai fait un continuel usage de la représentation géométrique, qui donne aux raisonnements abstraits une forme intuitive plus facile à suivre. Mais il faudrait bien se garder de confondre cet usage des *notations* géométriques avec une méthode de démonstration qui serait fondée sur les principes propres à la Géométrie pure. Dans nos raisonnements analytiques, la courbe qui représente une fonction n'existe qu'en vertu des propriétés de la relation analytique abstraite qui définit cette fonction, et c'est comme conséquence de ces propriétés que l'on peut concevoir une suite de points aussi rapprochés que l'on voudra, et tels que la droite qui joint un de ces points à un point voisin tende vers une direction déterminée. Les principes de la Géométrie pure nous fournissent seulement des constructions qui, jouissant des mêmes propriétés que les opérations abstraites, peuvent servir à les représenter, et à remplacer ainsi l'emploi des formules.

Après avoir défini les différentielles dans les cas d'une ou de plusieurs variables indépendantes, j'établis la notion des intégrales tant définies qu' indéfinies. J'expose ensuite les méthodes les plus simples de différentiation et d'intégration, et j'en fais l'application aux diverses fonctions élémentaires.

Je développe avec quelque étendue l'importante question du calcul direct des dérivées d'ordre quelconque; puis je passe à la représentation de ces dérivées au moyen des différentielles des ordres correspondants. Je traite ensuite du changement de variables dans les expressions différentielles, des propriétés les plus simples des déterminants fonctionnels, et du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes.

Le Livre Ier, comme tous les suivants, est terminé par un recueil d'exercices faciles sur les divers sujets qui y ont été exposés.

Le Livre II est consacré aux applications analytiques du Calcul infinitésimal.

Le premier Chapitre traite du développement des fonctions en séries, et se termine par un complément aux éléments de la théorie des quantités complexes, où sont definies les fonctions exponentielles et circulaires de ces quantités.

Le Chapitre II a pour objet les applications analytiques de la différentiation: Détermination des vraies valeurs; maxima et minima; décomposition des fonctions rationnelles en fractions simples.

Le Chapitre III contient le développement et l'application des méthodes d'intégration indiquées dans le Livre Ier; l'étude des cas singuliers des intégrales définies; la différentiation et l'intégration sous le signe $\int$, avec l'emploi de ces opérations dans le calcul des intégrales définies spéciales; le changement de variables dans les intégrales multiples; les propriétés les plus simples des intégrales eulériennes, et la formule de Maclaurin pour le calcul approché des intégrales définies.

Les deux volumes suivants contiendront les quatre derniers Livres, qui traiteront successivement des applications de l'Analyse infinitésimale à la Géométrie, des équations différentielles ordinaires, des équations aux dérivées partielles, des fonctions d'une variable complexe, et des éléments de la théorie des fonctions elliptiques. Le tome II est sous presse.

Bordeaux. J. Hoüel.

J. Willard Gibbs: On the Equilibrium of Heterogeneous Substances. (Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences, vol. III. pp. 108—248 and 343—524. 1876—1878.)

It is an inference naturally suggested by the general increase of entropy which accompanies the changes occurring in any isolated material system that when the entropy of the system has reached a maximum, the system will be in a state of equilibrium. Although this principle has by no means escaped the attention of physicists, its importance does not appear to have been duly appreciated. Little has been done to develop the principle as a foundation for the general theory of thermodynamic equilibrium.

The principle may be formulated as follows, constituting a criterion of equilibrium:

I. *For the equilibrium of any isolated system it is necessary and sufficient that in all possible variations of the state of the system which do not alter its energy, the variation of its entropy shall either vanish or be negative.*

The following form, which is easily shown to be equivalent to the preceding, is often more convenient in application:

II. *For the equilibrium of any isolated system it is necessary and sufficient that in all possible variations of the state of the system which do not alter its entropy, the variation of its energy shall either vanish or be positive.*

If we denote the energy and entropy of the system by ε and η respectively, the criterion of equilibrium may be expressed by either of the formulæ

$$(\delta\eta)_{\varepsilon} \leq 0, \tag{1}$$

$$(\delta\varepsilon)_{\eta} \geq 0. \tag{2}$$

Again, if we assume that the temperature of the system is uniform, and denote its absolute temperature by t, and set

$$\psi = \varepsilon - t\eta, \tag{3}$$

the remaining conditions of equilibrium may be expressed by the formula

$$(\delta\psi)_t \geq 0, \tag{4}$$

the suffixed letter, as in the preceding cases, indicating that the quantity which it represents is constant. This condition, in connection with that of uniform temperature, may be shown to be equivalent to (1) or (2). The difference of the values of ψ for two different states of the system which have the same temperature represents the work which would be expended in bringing the system from one state to the other by a reversible process and without change of temperature.

If the system is incapable of thermal changes, like the systems considered in theoretical mechanics, we may regard the entropy as having the constant value zero. Conditions (2) and (4) may then by written

$$\delta\varepsilon \geq 0, \qquad \delta\psi \geq 0,$$

and are obviously identical in signification, since in this case $\psi = \varepsilon$.

Conditions (2) and (4), as criteria of equilibrium, may therefore both be regarded as extensions of the criterion employed in ordinary statics to the more general case of a thermodynamic sy-

stem. In fact, each of the quantities $-\varepsilon$ and $-\psi$ (relating to a system without sensible motion) may by regarded as a kind of force-function for the system, — the former as the force-function *for constant entropy* (i. e., when only such states of the system are considered as have the same entropy), and the latter as the force-function *for constant temperature* (i. e., when only such states of the system are considered as have the same uniform temperature).

In the deduction of the particular condition of equilibrium for any system, the general formula (4) has an evident advantage over (1) or (2) with respect to the brevity of the processes of reduction, since the limitation of constant temperature applies to every part of the system taken separately, and diminishes by one the number of independent variations in the state of these parts which we have to consider. Moreover, the transition from the systems considered in ordinary mechanics to thermodynamic systems is most naturally made by this formula, since it has always been customary to apply the principles of theoretical mechanics to real systems on the supposition (more or less distinctly conceived and expressed) that the temperature of the system remains constant, the mechanical properties of a thermodynamic system maintained at a constant temperature being such as might be imagined to belong to a purely mechanical system, and admitting of representation by a force-function, as follows directly from the fundamental laws of thermodynamics.

Notwithstanding these considerations, the author has preferred in general to use condition (2) as the criterion of equilibrium, believing that it would be useful to exhibit the conditions of equilibrium of thermodynamic systems in connection with those quantities which are most simple and most general in their definitions, and which appear most important in the general theory of such systems. The slightly different form in which the subject would develop itself, if condition (4) had been chosen as a point of departure instead of (2), is occasionally indicated.

Equilibrium of masses in contact. — The first problem to which the criterion is applied is the determination of the conditions of equilibrium for different masses in contact, when uninfluenced by gravity, electricity, distortion of the solid masses, or capillary tensions. The statement of the result is facilitated by the following definition.

If to any homogeneous mass in a state of hydrostatic stress

we suppose an infinitesimal quantity of any substance to be added, the mass remaining homogeneous and its entropy and volume remaining unchanged, the increase of the energy of the mass divided by the quantity of the substance added is the *potential* for that substance in the mass considered.

In addition to equality of temperature and pressure in the masses in contact, it is necessary for equilibrium that the potential for every substance which is an independently variable component of any of the different masses shall have the same value in all of which it is such a component, so far as they are in contact with one another. But if a substance, without being an actual component of a certain mass in the given state of the system, is capable of being absorbed by it, it is sufficient if the value of the potential for that substance in that mass is not less than in any contiguous mass of which the substance is an actual component. We may regard these conditions as sufficient for equilibrium with respect to infinitesimal variations in the composition and thermodynamic state of the different masses in contact. There are certain other conditions which relate to the possible formation of masses entirely different in composition or state from any initially existing. These conditions are best regarded as determining the stability of the system, and will be mentioned under that head.

Anything which restricts the free movement of the component substances, or of the masses as such, may diminish the number of conditions which are necessary for equilibrium.

Equilibrium of osmotic forces. — If we suppose two fluid masses to be separated by a diaphragm which is permeable to some of the component substances and not to others, of the conditions of equilibrium which have just been mentioned, those will still subsist which relate to temperature and the potentials for the substances to which the diaphragm is permeable, but those relating to the potentials for the substances to which the diaphragm is impermeable will no longer be necessary. Whether the pressure must be the same in the two fluids will depend upon the rigidity of the diaphragm. Even when the diaphragm is permeable to all the components without restriction, equality of pressure in the two fluids is not always necessary for equilibrium.

Effect of gravity. — In a system subject to the action of gravity, the potential for each substance, instead of having a uniform value throughout the system, so far as the substance actually

occurs as an independently variable component, will decrease uniformly with increasing height, the difference of its values at different levels being equal to the difference of level multiplied by the force of gravity.

Fundamental equations. — Let ε, η, v, t and p denote respectively the energy, entropy, volume, (absolute) temperature, and pressure of a homogeneous mass, which may be either fluid or solid, provided that it is subject only to hydrostatic pressures, and let $m_1, m_2, \ldots m_n$ denote the quantities of its independently variable components, and $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ the potentials for these components. It is easily shown that ε is a function of $\eta, v, m_1, m_2, \ldots m_n$, and that the complete value of $d\varepsilon$ is given by the equation.

$$(5)\qquad d\varepsilon = t d\eta - p dv + \mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2 \cdots + \mu_n dm_n.$$

Now if ε is known in terms of $\eta, v, m_1, \ldots m_n$, we can obtain by differentiation $t, p, \mu_1, \ldots \mu_n$ in terms of the same variables. This will make $n + 3$ independent known relations between the $2n + 5$ variables, $\varepsilon, \eta, v, m_1, m_2, \ldots m_n, t, p, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$. These are all that exist, for of these variables, $n + 2$ are evidently independent. Now upon these relations depend a very large class of the properties of the compound considered, — we may say in general, all its thermal, mechanical, and chemical properties, so far as *active tendencies* are concerned, in cases in which the form of the mass does not require consideration. A single equation from which all these relations may be deduced may be called a fundamental equation. An equation between $\varepsilon, \eta, v, m_1, m_2, \ldots m_n$ is a fundamental equation. But there are other equations which possess the same property.

If we suppose the quantity ψ to be determined for such a mass as we are considering by equation (3), we may obtain by differentiation and comparison with (5)

$$(6)\quad d\psi = - \eta dt - p dv + \mu_1 dm_1 + m_2 dm_2 + \cdots + \mu_n dm_n.$$

If, then, ψ is known as a function of $t, v, m_1, m_2, \ldots m_n$, we can find $\eta, p, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ in terms of the same variables. If we then substitute for ψ in our original equation its value taken from equation (3) we shall have again $n + 3$ independent relations between the same $2n + 5$ variables as before.

Let

$$(7)\qquad \zeta = \varepsilon - t\eta + pv,$$

then, by (5),

(8) $d\zeta = -\eta dt + vdp + \mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2 \cdots + \mu_n dm_n.$

If, then, ζ is known as a function of t, p, m_1, $m_2 \ldots m_n$, wen can find η, v, μ_1, μ_2, $\ldots \mu_n$ in terms of the same variables. By eliminating ζ, we may obtain again $n+3$ independent relations between the same $2n+5$ variables as at first.*)

If we integrate (5), (6) and (8), supposing the quantity of the compound substance considered to vary from zero to any finite value, its nature and state remaining unchanged, we obtain.

(9) $\varepsilon = t\eta - pv + \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \cdots + \mu_n m_n$

(10) $\psi = -pv + \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \cdots + \mu_n m_n,$

(11) $\zeta = \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \cdots + \mu_n m_n.$

If we differentiate (9) in the most general manner, and compare the result with (5), we obtain

(12) $-vdp + \eta dt + m_1 d\mu_1 + m_2 d\mu_2 + \cdots + m_n d\mu_n = 0,$

or

(13) $dp = \frac{\eta}{v} dt + \frac{m_1}{v} d\mu_1 + \frac{m_2}{v} d\mu_2 + \cdots + \frac{m_n}{v} d\mu_n = 0.$

Hence, there is a relation between the $n+2$ quantities t, p, μ_1, μ_2, $\cdots \mu_n$, which, if known, will enable us to find in terms of these quantities all the ratios of the $n+2$ quantities η, v, m_1, m_2, $\cdots m_n$. With (9), this will make $n+3$ independent relations between the same $2n+5$ variables as at first.

Any equation, therefore, between the quantities

$\varepsilon, \quad \eta, \quad v, \quad m_1, \quad m_2, \ldots m_n,$

or $\psi, \quad t, \quad v, \quad m_1, \quad m_2, \ldots m_n,$

or $\zeta, \quad t, \quad p, \quad m_1, \quad m_2, \ldots m_n,$

or $t, \quad p, \quad \mu_1, \quad \mu_2, \ldots \mu_n,$

*) The properties of the quantities $-\psi$ and $-\zeta$ regarded as functions of the temperature and volume, and temperature and pressure, respectively, the composition of the body being regarded as invariable, have been discussed by M. Massieu in a memoir entitled "Sur les fonctions carractéristiques des divers fluids et sur la théorie des vapeurs" (*Mém. Savants Etrang.* t. xxii.) A brief sketche of his method in a form slightly different from that ultimately adopted is given in *Comptes Rendus* t. lxix, (1869) pp. 858 and 1057, and a report on his memoir by M. Bertrand in *Comptes Rendus*, t. lxxi, p. 257. M. Massieu appears to have been the first to solve the problem of representing all the properties of a body of invariable composition which are concerned in reversible processes by means of a single function.

is a fundamental equation, and any such is entirely equivalent to any other.

Coëxistent phases. — In considering the different homogeneous bodies which can be formed out of any set of component substances, it is convenient to have a term which shall refer solely to the composition and thermodynamic state of any such body without regard to its size or form. The word *phase* has been chosen for this purpose. Such bodies as differ in composition or state are called different phases of the matter considered, all bodies which differ only in size and form being regarded as different examples of the same phase. Phases which can exist together, the dividing surfaces being plain, in an equilibrium which does not depend upon passive resistances to change, are called *coëxistent.*

The number of independent variations of which a system of coëxistent phases is capable is $n + 2 - r$, where r denotes the number of phases, and n the number of independently variable components in the whole system. For the system of phases is completely specified by the temperature, the pressure, and the n potentials, and between these $n + 2$ quantities there are r independent relations (one for each phase), which characterize the system of phases.

When the number of phases exceeds the number of components by unity, the system is capable of a single variation of phase. The pressure and all the potentials may be regarded as functions of the temperature. The determination of these functions depends upon the elimination of the proper quantities from the fundamental equations in p, t, μ_1, μ_2, etc. for the several members of the system. But without a knowledge of these fundamental equations, the values of the differential co-efficients such as $\frac{dp}{dt}$ may be expressed in terms of the entropies and volumes of the different bodies and the quantities of their several components. For this end we have only to eliminate the differentials of the potentials from the different equations of the form (12) relating to the different bodies. In the simplest case, when there is but one component, we obtain the wellknown formula

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\eta' - \eta''}{v' - v''} = \frac{Q}{t(v'' - v')},$$

in which v', v'', η', η'', denote the volumes and entropies of a given quantity of the substance in the two phases, and Q the heat which it absorbs in passing from one phase to the other.

It is easily shown that if the temperature of two coëxistent phases of two components is maintained constant, the pressure is in general a maximum or minimum when the composition of the phases is identical. In like manner, if the pressure of the phases is maintained constant, the temperature is in general a maximum or minimum when the composition of the phases is identical. The series of simultaneous values of t and p for which the composition of two coëxistent phases is identical separates those simultaneous values of t and p for which no coëxistent phases are possible from those for which there are two pairs of coëxistent phases.

If the temperature of three coëxistent phases of three components is maintained constant, the pressure is in general a maximum or minimum when the composition of one of the phases is such as can be produced by combining the other two. If the pressure is maintained constant, the temperature is in general a maximum or minimum when the same condition in regard to the composition of the phases is fulfilled.

Stability of fluids. — A criterion of the stability of a homogeneous fluid, or of a system of coëxistent fluid phases, is afforded by the expressirn

$$(14) \qquad \varepsilon - t'\eta + p'v - \mu_1'm_1 - \mu_2'm_2 - \cdots - \mu_n'm_n$$

in which the values of the accented letters are to be determined by the phase or system of phases of which the stability is in question, and the values of the unaccented letters by any other phase of the same components, the possible formation of which is in question. We may call the former constants, and the latter variables. Now if the value of the expression, thus determined, is always positive for any possible values of the variables, the phase or system of phases will be stable with respect to the formation of any new phases of its components. But if the expression is capable of a negative value, the phase or system is at least *practically* unstable. By this is meant that, although, strictly speaking, an infinitely small disturbance or change may not be sufficient to destroy the equilibrium, yet a very small change in the initial state will be sufficient to do so. The presence of a small portion of matter in a phase for which the above expression has a negative value will in general be sufficient to produce this result. In the case of a system of phases, it is of course supposed that their contiguity is such that the formation of the new phase does not involve any transportation of matter through finite distances.

The preceding criterion affords a convenient point of departure in the discussion of the stability of homogeneous fluids. Of the other forms in which the criterion may be expressed, the following is perhaps the most useful.

If the pressure of a fluid is greater than that of any other phase of its independent variable components which has the same temperature and potentials, the fluid is stable with respect to the formation of any other phase of these components; but if its pressure is not as great as that of some such phase, it will be practically unstable.

Stability of fluids with respect to continuous changes of phase. — In considering the changes which may take place in any mass, we have often to distinguish between infinitesimal changes in existing phases, and the formation of entirely new phases. A phase of a fluid may be stable with respect to the former kind of change, and unstable with respect to the latter. In this case, it may be capable of continued existence in virtne of properties which prevent the commencement of discontinuous changes. But a phase which is unstable with respect to continuous changes is evidently incapable of permanent existence on a large scale except in consequence of passive resistances to change. To obtain the conditions of stability with respect to continuous changes, we have only to limit the application of the variables in (14) to phases adjacent to the given phase. We obtain results of the following nature.

The stability of any phase with respect to continuous changes depends upon the same conditions with respect to the second and higher differential coefficients of the density of energy regarded as a function of the density of entropy and the densities of the several components, which would make the density of energy a minimum, if the necessary conditions with respect to the first differential coefficients were fulfilled.

Again, it is necessary and sufficient for the stability with respect to continuous changes of all the phases within any given limits, that within those limits the same conditions should be fulfilled with respect to the second and higher differential coefficients of the pressure regarded as a function of the temperature and the several potentials, which would make the pressure a minimum, if the necessary conditions with respect to the first differential coefficients were fulfilled.

The equation of the limits of stability with respect to continuous changes may be written

$$(15) \qquad \left(\frac{d\mu_n}{d\gamma_n}\right)_{t,\,\mu_1,\,\ldots\,\mu_{n-1}} = 0, \quad \text{or} \quad \left(\frac{d^2 p}{d\mu_n^2}\right)_{t,\,\mu_1,\,\ldots\,\mu_{n-1}} = \infty,$$

where γ_n denotes the density of the component specified or $m_n \div v$. It is in general immaterial to what component the suffix $_n$ is regarded as relating.

Critical phases. — The variations of two coexistent phases are sometimes limited by the vanishing of the difference between them. Phases at which this occurs are called *critical phases.* A critical phase, like any other, is capable of $n+1$ independent variations, n denoting the number of independently variable components. But when subject to the condition of remaining a critical phase, it is capable of only $n-1$ independent variations. There are therefore two independent equations which characterize critical phases. These may be written

$$(16) \qquad \left(\frac{d\mu_n}{d\gamma_n}\right)_{t,\,\mu_1,\,\ldots\,\mu_{n-1}} = 0, \quad \left(\frac{d^2\mu_n}{d\gamma_n^2}\right)_{t,\,\mu_1,\,\ldots\,\mu_{n-1}} = 0,$$

It will be observed that the first of these equations indent identical with the equation of the limit of stability with respect to continuous changes. In fact, stabile critical phases are situated at that limit. They are also situated at the limit of stability with respect to discontinuous changes. These limits are in general distinct, but touch each other at critical phases.

Geometrical illustrations. — In an earlier paper,*) the author has described a method of representing the thermodynamic properties of substances of invariable composition by means of surfaces. The volume, entropy, and energy of a constant quantity of the substance are represented by rectangular coördinates. This method corresponds to the first kind of fundamental equation described above. Any other kind of fundamental equation for a substance of invariable composition will suggest an analogous geometrical method. In the present paper, the method in which the coördinates represent temperature, pressure, and the potential, is briefly considered. But when the composition of the body in variable, the fundamental equation cannot be completely represented by any surface or finite number of surfaces. In the case of three components, if we regard the temperature and pressure as constant, as well as the total quantity of matter, the relations between ζ, m_1, m_2, m_3 may be represented by a surface in which the distances of a point from the three sides of a triangular prism represent the quantities m_1,

*) Transactions of the Connecticut Academy, vol. ii, part 2.

m_2, m_3, and the distance of the point from the base of the prism represents the quantity ζ. In the case of two components, analogous relations may be represented by a plane curve. Such methods are especially useful for illustrating the combinations and separations of the components, and the changes in states of aggregation, which take place when the substances are exposed in varying proportions to the temperature and pressure considered.

Fundamental equations of ideal gases and gas-mixtures. — From the physical properties which we attribute to ideal gases, it is easy to deduce their fundamental equations. The fundamental equation in ε, η, v, and m for an ideal gas is

$$(17) \qquad c \log \frac{\varepsilon - Em}{cm} = \frac{\eta}{m} - H + a \log \frac{m}{v}:$$

that in ψ, t, v, and m is

$$(18) \qquad \psi = Em + mt\left(c - H - c \log t + a \log \frac{m}{v}\right):$$

that in p, t, and μ is

$$(19) \qquad p = ae^{\frac{H-c-a}{a}} t^{\frac{c+a}{a}} e^{\frac{\mu - E}{at}},$$

where e denotes the base of the Naperian system of logarithms. As for the other constants, c denotes the specific heat of the gas at constant volume, a denotes the constant value of $pv \div mt$, E and H depend upon the zeros of energy and entropy. The two last equations may be abbreviated by the use of different constants. The properties of fundamental equations mentioned above may easily be verified in each case by differentiation.

The law of Dalton respecting a mixture of different gases affords a point of departure for the discussion of such mixtures and the establishment of their fundamental equations. It is found convenient to give the law the following form:

The pressure in a mixture of different gases is equal to the sum of the pressures of the different gases as existing each by itself at the same temperature and with the same value of its potential.

A mixture of ideal gases which satisfies this law is called an *ideal gas-mixture.* Its fundamental equation in p, t, μ_1, μ_2, etc. is evidently of the form

$$(20) \qquad p = \Sigma_1\left(a_1 e^{\frac{H_1 - c_1 - a_1}{a_1}} t^{\frac{c_1 + a_1}{a_1}} e^{\frac{\mu_1 - E_1}{a_1 t}}\right),$$

where Σ_1 denotes summation with respect to the different components of the mixture. From this may be deduced other fundamental equations for ideal gas-mixtures. That in ψ, t, v, m_1, m_2, *etc.* is

(21) $\psi = \Sigma_1\Big(E_1 m_1 + m_1 t\Big(c_1 - H_1 - c_1 \log t + a_1 \log \frac{m_1}{v}\Big)\Big).$

Phases of dissipated energy of ideal gas-mixtures. — When the proximate components of a gas-mixture are so related that some of them can be formed out of others, although not necessarily in the gas-mixture itself at the temperatures considered, there are certain phases of the gas-mixture which deserve especial attention. These are the *phases of dissipated energy*, i. e., those phases in which the energy of the mass has the least value consistent with its entropy and volume. An atmosphere of such a phase could not furnish a source of mechanical power to any machine or chemical engine working within it, as other phases of the same matter might do. Nor can such phases be affected by any catalytic agent. A *perfect catalytic agent* would reduce any other phase of the gas-mixture to a phase of dissipated energy. The condition which will make the energy a minimum is that the potentials for the proximate components shall satisfy an equation similar to that which expresses the relation between the units of weight of these components. For example, if the components were hydrogen, oxygen, and water, since one gram of hydrogen with eight grams of oxygen are chemically equivalent to nine grams of water, the potentials for these substances in a phase of dissipated energy must satisfy the relation

$$\mu_H + 8\mu_O = 9\mu_W.$$

Gas-mixtures with convertible components. — The theory of the phases of dissipated energy of an ideal gas-mixture derives an especial interest from its possible application to the case of those gas-mixtures in which the chemical composition and resolution of the components can take place in the gas-mixture itself, and actually does take place, so that the quantities of the proximate components are entirely determined by the quantities of a smaller number of ultimate components, with the temperature and pressure. These may be called *gas-mixtures with convertible components.* If the general laws of *ideal* gas-mixtures apply in any such case, it may easily be shown that the phases of dissipated energy are the only phases which can exist. We can form a fundamental equation which shall relate solely to these phases. For this end, we first form the equation in p, t, μ_1, μ_2, etc. for the gas-mixture, regarding its proximate components as *not* convertible. This equation will contain a potential for every proximate component of the gas mixture. We then eliminate one (or more) of these potentials by means of the

relations which exist between them in virtue of the convertibility of the components to which they relate, leaving the potentials which relate to those substances which naturally express the ultimate composition of the gas-mixture.

The validity of the results thus obtained depends upon the applicability of the laws of ideal gas-mixtures to cases in which chemical action takes place. Some of these laws are generally regarded as capable of such application, others are not so regarded. But it may be shown that in the very important case in which the components of a gas are convertible at certain temperatures, and not at others, the theory proposed may be established without other assumptions than such as are generally admitted.

It is, however, only by experiments upon gas-mixtures with convertible components, that the validity of any theorie concerning them can be satisfactorily established.

The vapor of the peroxide of nitrogen appears to be a mixture of two different vapors, of one of which the molecular formula is double that of the other. If we suppose that the vapor conforms to the laws of an ideal gas-mixture in a state of dissipated energy, we may obtain an equation between the temperature, pressure, and density of the vapor, which exhibits a somewhat striking agreement with the results of experiment.

Equilibrium of stressed solids. — The second paper commences with a discussion of the conditions of internal and external equilibrium for solids in contact with fluids with regard to all possible states of strain of the solids. These conditions are deduced by analytical processes from the general condition of equilibrium (2). The condition of equilibrium which relates to the dissolving of the solid at a surface where it meets a fluid may be expressed by the equation

$$\mu_1 = \frac{\varepsilon - t\eta + pv}{m}, \tag{22}$$

where ε, η, v, and m_1 denote respectively the energy, entropy, volume, and mass of the solid, if it is homogeneous in nature and state of strain, — otherwise, of any small portion which may be treated as thus homogeneous, — μ_1 the potential in the fluid for the substance of which the solid consists, p the pressure in the fluid and therefore one of the principal pressures in the solid, and t the temperature. It will be observed that when the pressure in the solid is isotropic, the second member of this equation will represent the

potential in the solid for the substance of which it consists [see (9)], and the condition reduces to the equality of the potential in the two masses, just as if it were a case of two fluids. But if the stresses in the solid are not isotropic, the value of the second member of the equation is not entirely determined by the nature and state of the solid, but has in general three different values (for the same salid at the same temperature, and in the same state of strain) corresponding to the three principal pressures in the solid. If a solid in the form of a right parallelopiped is subject to different pressures on its three pairs of opposite sides by fluids in which it is soluble, it is in general necessary for equilibrium that the composition of the fluids shall be different.

The *fundamental equations* which have been described above are limited, in their application to solids, to the case in which the stresses in the solid are isotropic. An example of a more general form of fundamental equation for a solid, is afforded by an epuation between the energy and entropy of a given quantity of the solid, and the quantities which express its state of strain, or by an equation between ψ [see (3)] as determined for a given quantity of the solid, the temperature, and the quantities which expressed the state of strain.

Capillarity. — The solution of the problems which precede may be regarded as a first approximation, in which the peculiar state of thermodynamic equilibrium about the surfaces of discontinuity is neglected. To take account of the condition of things at these surfaces, the following method is used. Let us suppose that two homogeneous fluid masses are separated by a surface of discontinuity, i. e., by a very thin non-homogeneous film. Now me may imagine a state of things in which each of the homogeneous masses extends without variation of the densities of its several components, or of the densities of energy and entropy, quite up to a geometrical surface (to be called the dividing surface) at which the masses meet. We may suppose this surface to be sensibly coincident with the physical surface of discontinuity. Now if we compare the actual state of things with the supposed state, there will be in the former in the vicinity of the surface a certain (positive or negative) excess of energy, of entropy, and of each of the component substances. These quantities are denoted by ε^S, η^S, m_1^S, m_2^S, etc. and are treated as belonging to the surface. The ^{S} is used simply as a distinguishing mark, and must not be taken for an algebraic exponent.

It is shown that the conditions of equilibrium already obtained relating to the temperature and the potentials of the homogeneous masses, are not affected by the surfaces of discontinuity, and that the complete value of $d\varepsilon^S$ is given by the equation

$$\delta\varepsilon^S = t\delta\eta^S + \sigma\delta s + \mu_1\delta m_1^S + \mu_2\delta m_2^S + \text{etc.} \tag{23}$$

in which s denotes the area of the surface considered, t the temperature, μ_1, μ_2, etc. the potentials for the various components in the adjacent masses. It may be, however, that some of the components are found only at the surface of discontinuity, in which case the letter μ with the suffix relating to such a substance denotes, as the equation shows, the rate of increase of energy at the surface per unit of the substance added, when the entropy, the area of the surface, and the quantities of the other components are unchanged. The quantity σ we may regard as defined by the equation itself, or by the following, which is obtained by integration:

$$\varepsilon^S = t\eta^S + \sigma s + \mu_1 m_1^S + \mu_2 m_2^S + \text{etc.} \tag{24}$$

There are terms relating to variations of the curvatures of the surface which might be added, but it is shown that we can give the dividing surface such a position as to make these terms vanish, and it is found convenient to regard its position as thus determined. It is always sensibly coincident with the physical surface of discontinuity. (Yet in treating of plane surfaces, this supposition in regard to the position of the dividing surface is unnecessary, and it is sometimes convenient to suppose that its position is determined by other considerations.)

With the aid of (23), the remaining condition of equilibrium for contiguous homogeneous masses is found, viz:

$$\sigma(c_1 + c_2) = p' - p'', \tag{25}$$

where p', p'' denote the pressures in the two masses, and c_1, c_2 the principal curvatures of the surface. Since this equation has the same form as if a tension equal to σ resided at the surface, the quantity σ is called (as is usual) the *superficial tension*, and the dividing surface in the particular position above mentioned is called the *surface of tension*.

By differentiation of (24) and comparison with (23), we obtain

$$d\sigma = -\eta_S\, dt - \Gamma_1 d\mu_1 - \Gamma_2 d\mu_2 - \text{etc.}, \tag{26}$$

where η_S, Γ_1, Γ_2, etc., are written for $\frac{\eta^S}{s}$, $\frac{m_1^S}{s}$, $\frac{m_1^S}{s}$, etc., and de-

note the superficial densities of entropy and of the various substances. We may regard σ as a function of t, μ_1, μ_2, etc., from which if known η_S, Γ_1, Γ_2, etc. may be determined in terms of the same variables. An equation between σ, t, μ_1, μ_2, etc. may therefore be called a *fundamental equation for the surface of discontinuity*. The same may be said of an equation between ε_S, η_S, s, m_1^S, m_2^S, etc.

It is necessary for the stability of a surface of discontinuity that its tension shall be as small as that of any other surface which can exist between the same homogeneous masses with the same temperature and potentials. Beside this condition, which relates to the nature of the surface of discontinuity, there are other conditions of stability, which relate to the possible motion of such surfaces. One of these is that the tension shall be positive. The others are of a less simple nature, depending upon the extent and form of the surface of discontinuity,. and in general upon the whole system of which it is a part. The most simple case of a system with a surface of discontinuity is that of two coëxistent phases separated by a spherical surface, the outer mass being of indefinite extent. When the interior mass and the surface of discontinuity are formed entirely of substances which are components of the surrounding mass, the equilibrium is always unstable; in other cases, the equilibrium may be stable. Thus, the equilibrium of a drop of water in an atmosphere of vapor is unstable, but may be made stable by the addition of a little salt. The analytical conditions which determine the stability or instability of the system are easily found, when the temperature and potentials of the system are regarded as known, as well as the fundamental equations for the interior mass and the surface of discontinuity.

The study of surfaces of discontinuity throws considerable light upon the subject of the stability of such phases of fluids as have a less pressure than other phases of the same components with the same temperature and potentials. Let the pressure of the phase of which the stability is in question be denoted by p', and that of the other phase of the same temperature and potentials by p''. A spherical mass of the second phase and of a radius determined by the equation

$$(27) \qquad 2\sigma = (p'' - p')r,$$

would be in equilibrium with a surrounding mass of the first phase.

This equilibrium, as we have just seen, is instable, when the surrounding mass is indefinitely extended. A spherical mass a little larger would tend to increase indefinitely. The work required to form such a spherical mass, by a reversible process, in the interior of an infinite mass of the other phase, is given by the equation

$$W = \sigma s - (p'' - p')v''. \tag{28}$$

The term σs represents the work spent in forming the surface, and the term $(p'' - p')v''$ the work gained in forming the interior mass. The second of these quantities is always equal to two-thirds of the first. The value of W is therefore positive, and the phase is in strictness stable, the quantity W affording a kind of measure of its stability. We may easily express the value of W in a form which does not involve any geometrical magnitudes, viz:

$$W = \frac{16\pi\sigma^3}{3(p''-p')^2}, \tag{29}$$

where p'', p' and σ may be regarded as functions of the temperature and potentials. It will be seen that the stability, thus measured, is infinite for an infinitesimal difference of pressures, but decreases very rapidly as the difference of pressures increases. These conclusions are all, however, practically limited to the case in which the value of r, as determined by equation (27) is of sensible magnitude.

With respect to the somewhat similar problem of the stability of the surface of contact of two phases with respect to the formation of a new phase, the following results are obtained. Let the phases (supposed to have the same temperature and potentials) be denoted by A, B and C; their pressures by p_A, p_B and p_C; and the tensions of the three possible surfaces σ_{AB}, σ_{BC}, σ_{AC}. If p_C is less than

$$\frac{\sigma_{BC}p_A + \sigma_{AC}p_B}{\sigma_{BC} + \sigma_{AC}},$$

there will be no tendency toward the formation of the new phase at the surface between A and B. If the temperature or potentials are now varied until p_C is equal to the above expression, there are two cases to be distinguished. The tension σ_{AB} will be either equal to $\sigma_{AB} + \sigma_{BC}$ or less. (A greater value could only relate to an unstable and therefore unusual surface.) If $\sigma_{AB} = \sigma_{AC} + \sigma_{BC}$, a farther variation of the temperature or potentials, making p_C greater than the above expression, would cause the phase C to be formed at

the surface between A and B. But if $\sigma_{AB} < \sigma_{AC} + \sigma_{BC}$, the surface between A and B would remain stable, but with rapidly diminishing stability, after p_C has passed the limit mentioned.

The conditions of stability for a line where several surfaces of discontinuity meet, with respect to the possible formation of a new surface, are capable of a very simple expression. If the surfaces A-B, B-C, C-D D-A, separating the masses A, B, C, D, meet along a line, it is necessary for equilibrium that their tensions and directions at any point of the line should be such that a quadrilateral α, β, γ, δ may be formed with sides representing in direction and length the normals and tensions of the successive surfaces. For the stability of the system with reference to the possible formation of surfaces between A and C, or between B and D, it is farther necessary that the tensions σ_{AC} and σ_{BD} should be greater than the diagonals $\alpha\gamma$ and $\beta\delta$ respectively. The conditions of stability are entirely analogous in the case of a greater number of surfaces. For the conditions of stability relating to the formation of a new phase at a line in which three surfaces of discontinuity meet, or at a point where four different phases meet, the reader is referred to the original paper.

Liquid films. — When a fluid exists in the form of a very thin film between other fluids, the great inequality of is extension in different directions will give rise to certain peculiar properties, even when its thickness is sufficient for its interior to have the properties of matter in mass. The most important case is where the film is liquid and the contiguous fluids are gaseous. If we imagine the film to be divided into elements of the same order of magnitude as its thickness, each element extending through the film from side to side, it is evident that far less time will in general be required for the attainment of approximate equilibrium between the different parts of any such element and the contiguous gases than for the attainment of equilibrium between all the different elements of the film.

There will accordingly be a time, commencing shortly after the formation of the film, in which its separate elements may be regarded as satisfying the conditions of internal equilibrium, and of equilibrium with the contiguous gases, while they may not satisfy all the conditions of equilibrium with each other. It is when the changes due to this want of complete equilibrium take place so slowly that the film appears to be at rest, except so far as it

accommodates itself to any change in the external conditions to which it is subjected, that the characteristic properties of the film are most striking and most sharply defined. It is from this point of view that these bodies are discussed. They are regarded as satisfying a certain welldefined class of conditions of equilibrium, but as not satisfying at all certain other conditions which would be necessary for complete equilibrium, in consequence of which they are subject to gradual changes, which ultimately determine their rupture.

The elasticity of a film (i. e., the increase of its tension when extended), is easily accounted for. It follows from the general relations given above that, when a film has more than one component, those components which diminish the tension will be found in greater proportion on the surfaces. When the film is extended, there will not be enough of these substances to keep up the same volume- and surface-densities as before, and the deficiency will cause a certain increase of tension. It does not follow that a thinner film has always a greater tension than a thicker formed of the same liquid. When the phases within the films as well as without are the same, and the surfaces of the films are also the same, there will be no difference of tension. Nor will the tension of the same film be altered, if a part of the interior drains away in the course of time, without affecting the surfaces. If the thickness of the film is reduced by evaporation, its tension may be either increased or diminished, according to the relative volatility of its different components.

Let us now suppose that the thickness of the film is reduced until the limit is reached at which the interior ceases to have the properties of matter in mass. The elasticity of the film, which determines its stability with respect to extension and contraction, does not vanish at this limit. But a certain kind of instability will generally arise, in virtue of which inequalities in the thickness of the film will tend to increase through currents in the interior of the film. This probably leads to the destruction of the film, in the case of most liquids. In a film of soap-water, the kind of instability described seems to be manifested in the breaking out of the black spots. But the sudden diminution in thickness which takes place in parts of the film is arrested by some unknown cause, possibly by viscous or gelatinous properties, so that the rupture of the film does not necessarily follow.

Electromotive force. — The conditions of equilibrium may be modified by electromotive force. Of such cases a galvanic or electrolytic cell may be regarded as the type. With respect to the potentials for the ions and the electrical potential the following relation may be noticed:

When all the conditions of equilibrium are fulfilled in a galvanic or electrolytic cell, the electromotive force is equal to the difference in the values of the potential for any ion at the surfaces of the electrodes multiplied by the electro-chemical equivalent of that ion, the greater potential of an anion being at the same electrode as the greater electrical potential, and the reverse being true of a cation.

The relation which exists between the electromotive force of a *perfect electro-chemical apparatus* (i. e., a galvanic or electrolytic cell which satisfies the condition of reversibility), and the changes in the cell which accompany the passage of electricity, may be expressed by the equation

$$(30) \qquad d\varepsilon = (V' - V'')\,de + t\,d\eta + d\,W_G + d\,W_P,$$

in which $d\varepsilon$ denotes the increment of the intrinsic energy in the apparatus, $d\eta$ the increment of entropy, de the quantity of electricity which passes trough it, V' and V'' the electrical potentials in pieces of the same kind of metal connected with the anode and cathode respectively, $d\,W_G$ the work done by gravity, and $d\,W_P$ the work done by the pressures which act on the external surface of the apparatus. The term $d\,W_G$ may generally be neglected. The same is true of $d\,W_P$, when gases are not concerned. If no heat is supplied or withdrawn the term $td\eta$ will vanish. But in the calculation of electromotive forces, which is the most important application of the equation, it is convenient and customary to suppose that the temperature is maintained constant. Now this term $td\eta$, which represents the heat absorbed by the cell, is frequently neglected in the consideration of cells of which the temperature is supposed to remain constant. In other words, it is frequently assumed that neither heat or cold is produced by the passage of an electrical current through a perfect electro-chemical apparatus (except that heat which may be indefinitely diminished by increasing the time in which a given quantity of electricity passes), unless it be by processes of a secondary nature, which are not immediately or necessarily connected with the process of electrolysis.

That this assumption is incorrect is shown by the electromotive force of a gas battery charged with hydrogen and nitrogen,



by the currents caused by differences in the concentration of the electrolyte, by electrodes of zinc and mercury in a solution of sulphate of zinc, by *a priori* considerations based on the phenomena exhibited in the direct combination of the elements of water or of hydrochloric acid, by the absorption of heat which M. Favre has in many cases observed in a galvanic or electrolytic cell, and by the fact that the solid or liquid state of an electrode (at its temperature of fusion) does not affect the electromotive force.

J. W. Gibbs.

Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit, Latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch. (Volumen I, enthaltend die Ueberreste von Buch 2—5, Berlin, Weidmannsche Buchhandlung 1876; Volumen II, enthaltend Buch 6 und 7, 1877; Voluminis III tomus I, enthaltend die Ueberreste des 8. Buches und verschiedene Supplemente, tomus II, enthaltend die Indices, 1878.

Die hohe Bedeutung, welche die mathematische Sammlung des Pappus von Alexandria als Quellenwerk auch für die neuere mathematische Forschung hat, ist zu keiner Zeit seit dem Wiedererwachen der Wissenschaften verkannt worden. Nachdem Commandini im J. 1588 [1]) seine lateinische Uebersetzung nebst ausführlichen Commentaren veröffentlicht hatte, verbreitete sich eine gewisse, freilich nur lückenhafte Kenntniss von dem Inhalte des Werkes bei den Forschern auf historisch-mathematischem Gebiete. Mehr als hundert Jahre waren seit dem Erscheinen der Commandinischen Bearbeitung vergangen, als die Erinnerung an Pappus von neuem wachgerufen und das Studium des Originaltextes zum erstenmale versucht wurde von Wallis und Halley. [2]) Insbesondere zeigte der letztere in seiner Ausgabe der Sectio rationis (*λόγου ἀποτομή*) und der Conica des Apollonius allenthalben, welche Wichtigkeit die Lemmen des Pappus für das Verständniss des Apollonius haben. Hierauf folgte die Re-

1) Das Jahr 1588 ist angegeben auf der Vorderseite des letzten Blattes. Der Titel trägt die Jahreszahl 1589. Bald darauf ist genau dieselbe Ausgabe unter anderem Titelblatt und mit der Jahreszahl 1602 zum Verkauf gestellt worden. Vergl. vol. I des hier besprochenen Werkes, Praefatio p. XVII.

2) Vergl. vol. I praef. p. XIX. XXI f.

stitution anderer Bücher des Apollonius nach Pappus Lemmen durch Simson (1749 und 1776), Horsley (1770), Camerer (1795) und andere. Die Porismen des Euklid wurden im engen Anschluss an den griechischen Text des Pappus zuerst von Simson (1776), dann in jüngster Zeit (1855—1860) von Breton, Vincent und Chasles behandelt.

So wichtig auch für das Verständniss des Pappus die Arbeiten der genannten Gelehrten des 18. Jahrhunderts waren, so wurde durch dieselben das Bedürfniss nach einer Gesammtausgabe des Originaltextes eher bei Seite geschoben als befördert. Man schien ein stillschweigendes Uebereinkommen dahin getroffen zu haben, dass alles, was in dem Sammelwerke des Pappus für die Gegenwart von Wichtigkeit ist, nunmehr behandelt sei und als Gesammtausgabe die Bearbeitung Commandinis genüge. Allein andrerseits erhoben sich doch manche Stimmen für die vollständige Veröffentlichung des griechischen Textes, da nur auf diese Weise eine zuverlässige Beurtheilung der bisher veröffentlichten Fragmente möglich sei. Denn wie konnte man mit Sicherheit über die Methode urtheilen, nach welcher die Lemmen des Pappus zur Wiederherstellung einer verloren gegangenen Schrift zu benutzen seien, wenn man nicht alle übrigen noch vorhandenen Theile des Sammelwerkes zur Vergleichung herbeizog? Wie konnte man über so viele schwierige, dunkle und mehrdeutige Ausdrücke klar werden, wenn man nicht einen gut beglaubigten Text vor sich hatte und mit Hülfe eines genauen lexicalischen Nachweises für jeden einzelnen Fall alle ähnlichen Stellen zugleich in Betracht zu ziehen im Stande war? Die Beantwortung dieser Fragen wird für niemanden zweifelhaft sein, nachdem die vollständige Ausgabe vorliegt.

Versuchen wir nun mit wenigen Worten darzustellen, nach welchen Seiten hin das Werk des Pappus für die gegenwärtige wissenschaftliche Forschung hauptsächlich von Wichtigkeit ist.

Zunächst sei das literar-historische Interesse hervorgehoben. Einige bisher unbekannte Namen alexandrinischer Mathematiker sind ans Licht gezogen worden[1]), mehrere fast verschollene Werke ge-

1) In dem *Index Scriptorum in Pappi mathematica collectione laudatorum*, welchen Fabricius Bibliotheca Graeca Lib. V cap 22 giebt, fehlen die Namen der gelehrten Freunde des Pappus, Pandrosion und Megethion, welchen zwei Bücher der Sammlung gewidmet sind, ferner die auch anderweitig bekannten alexandrinischen Mathematiker Diodorus und Menelaus. Ein zu Pappus Zeit namhafter alexandrinischer Gelehrte hiess Hierius, nicht Hieronymus (wie bei Commandini und Fabricius). Ferner der Verfasser der Para-

langen nun wieder zu genauerer Kenntniss, eine Menge einzelner Fragen werden fortan durch Eindringen in den Originaltext (oft ist es ja nur eine Zeile, oft nur ein Wort, worin die Entscheidung liegt) klarer sich darstellen lassen. Auch das ist gewiss nicht gering anzuschlagen, dass wir aus Pappus Sammlung einen überraschenden Gesammtüberblick über die Blüthe der mathematischen Studien in dem Zeitalter des Schriftstellers[1]) erhalten; ja dieser Ueberblick erstreckt sich selbst noch auf die Zeit nach Pappus bis zum Ersterben der antiken Cultur in Aegypten, wenn anders unsere Vermuthung richtig ist, dass auch nach Pappus Tode seine Schule noch eine Zeit lang fortblühte, und dass die Sammlung, wie sie jetzt vorliegt, einige und zwar sachlich werthvolle Zusätze eines oder mehrerer späteren Bearbeiter enthält.

Für die Geschichte der Entwickelung der griechischen Mathematik bietet kaum irgend ein anderes Quellenwerk so reichliches und mannichfaltiges Material als die Sammlung des Pappus. Wenn von den Elementen der alten Mathematik gesprochen wird, so denkt man mit Recht vorerst an Euklid, der ja schon im Alterthume ὁ *στοιχειωτής* schlechthin genannt zu werden pflegte.[2]) Doch erkannte man nicht minder bereits im Alterthume, dass Euklids Bücher durchaus nicht sämmtliche Elemente der Mathematik umfassen. Es kann in dieser Beziehung vergleichsweise auf die von Simson und Späteren erweiterten Ausgaben des Euklid verwiesen werden, welche in England noch heutigen Tages dem mathematischen Unterrichte zu Grunde gelegt werden.[3]) Ganz ähnlich liesse sich ein griechischer erweiterter Euklid in der Weise herstellen,

---

doxa, welche im dritten Buche Propos. 28–42 behandelt werden, Erycinus, nicht Erycemus. Der Mathematiker Charmander ist zwar von Fabricius angeführt; er konnte aber in Ermangelung einer griechischen Textvorlage nicht in Pape's Wörterbuch der griechischen Eigennamen (dritte Aufl., bearb. von Benseler) aufgenommen werden. Ausserdem ergaben sich als Beiträge aus Pappus zu diesem Lexicon die dort noch fehlenden Namen *Ἐρύκινος*, *Μεγεθίων*, *Πανδροσίων*.

1) In der Praefatio vol. III tom. I p. VI f. ist als wahrscheinlich nachgewiesen worden, dass Pappus nicht, wie man bisher annahm, zu Ende des vierten Jahrhunderts, sondern um nahezu ein Jahrhundert früher geblüht habe.

2) Man vergleiche den Index Graecitatis unter diesem Worte.

3) The Elements of Euclid — also the book of Euclid's Data, by Robert Simson. Referent hat benutzt die 11. Aufl., London 1801, und die 24. Aufl. v. J. 1834. Verkürzte Schulausgaben dieser Simson'schen Bearbeitung des Euklid erscheinen unter verschiedenen Titeln und bei verschiedenen Verlegern noch alljährlich in England.

dass an den geeigneten Stellen diejenigen ergänzenden Elementarsätze eingefügt würden, von denen sich nachweisen lässt, dass sie von alten Mathematikern bereits angewendet worden sind. Und gerade bei Pappus findet sich eine grosse Zahl solcher Sätze ausdrücklich mitgetheilt, während andere von Commandini, Simson und dem Herausgeber durch Vervollständigung der bei Pappus oft auf das äusserste abgekürzten Beweise restituirt worden sind. Aber selbst ein derartig erweiterter Euklid würde durchaus nicht alles enthalten, was die fortgeschrittene Mathematik des Alterthums unter dem Namen der Elemente zusammenfasste. Denn als *στοιχεῖα* im weiteren Sinne wurde eine Reihe grundlegender Werke, wie die Conica des Aristäus und vielleicht auch die des Apollonius, die Phänomena Euklids, die Schrift des Apollonius über die ebenen Oerter und andere bezeichnet, im Gegensatz zu welchen dann die Elemente Euklids *τὰ πρῶτα στοιχεῖα* genannt wurden.[1])

Ferner sind für die Entwickelungsgeschichte der griechischen Mathematik von besonderem Interesse solche Partien bei Pappus, wo eine Einzelfrage der elementaren Geometrie nach allen Seiten hin erweitert und möglichst abschliessend behandelt wird. Offenbar wurde also schon im Alterthum ein Anlauf genommen, von der Behandlung des einzelnen Falles, bei welchem allein die älteste Schule stehen geblieben war, überzugehen zur allgemeinen Betrachtung aller möglichen Fälle, und somit der neuern Methode sich zu nähern. So sind im fünften Buche die einzelnen Sätze, dass der Kreis grösser ist als ein isoperimetrisches Viereck, Fünfeck u. s. w., und dass ein reguläres Polygon grösser ist als ein isoperimetrisches irreguläres von derselben Seitenzahl, erweitert worden zu dem allgemeinen Satze, dass von allen Planfiguren und Volumen, welche gleichen Perimeter, bez. gleiche Oberfläche haben, der Kreis, bez. die Kugel die grössten sind, wobei nachweislich die Anschauung zu Grunde lag, dass der Kreis als ein reguläres Polygon von unendlich vielen Seiten und die Kugel als ein entsprechender Polyeder betrachtet werden können. Zu bemerken ist noch, dass Pappus Untersuchung über die isoperimetrischen Figuren, ausser im fünften Buche seiner Sammlung (wo eine derselben Frage gewidmete Specialschrift Zenodors zu Grunde gelegt ist) noch in der Ueberarbeitung eines anonymen Schriftstellers vorliegt, welche im dritten Bande der Ausgabe des Pappus S. 1189 ff. publicirt worden ist.

1) Der nähere Nachweis hierüber ist aus den im Index Graecitatis unter *στοιχεῖον* angeführten Stellen zu entnehmen.

Wegen der Methode in der Behandlung ist in demselben fünften Buche noch Propos. 28 hervorzuheben, in welcher die einzelnen Sätze des Archimedes über die gekrümmte Oberfläche der Halbkugel, sowie des grösseren und des kleineren Kugelsegments zu einem einzigen Satze zusammengefasst werden.[1])

Am förderlichsten ist die Methode der Zusammenfassung gewesen — und hiermit nähert sich unser Bericht mehr und mehr dem Gebiete der neuern Mathematik — bei den Sätzen analytischer Geometrie, welche in der Vorrede des siebenten Buches von Pappus aufgestellt worden sind. Als Beispiel mögen die bekannten Sätze von den Berührungen (vol. II p. 644, 25 und 648, 3) angeführt werden: „Wenn der Reihe nach drei Elemente, seien es nun Punkte oder Gerade oder Kreise, in derselben Ebene beliebig der Lage nach gegeben sind, so ist durch jeden der gegebenen Punkte (wenn nämlich Punkte gegeben sind) ein Kreis zu ziehen, welcher jede der gegebenen Linien berühre," und „Wenn von den ebengenannten Elementen je zwei gegeben sind, so ist ein Kreis von gegebenem Halbmesser zu beschreiben, welcher die gegebenen Punkte, Geraden oder Kreise berühre". Wie aus dieser allgemeinen Fassung die einzelnen möglichen Fälle mit Nothwendigkeit sich ergeben, deutet Pappus an den angeführten Stellen zwar nur kurz an, aber es haben diese wenigen Worte nicht nur ausgereicht die geometrischen Einzelbeweise zu reconstruiren, sondern sie haben auch ein werthvolles Zeugniss dafür uns überliefert, dass die Anfänge combinatorischer Betrachtungen den griechischen Mathematikern nicht fremd gewesen sind.[2])

Indem wir einer späteren Gelegenheit es vorbehalten, weiter über diejenigen Sätze des Pappus zu sprechen, welche auch für den heutigen Standpunkt der mathematischen Wissenschaft, insoweit dieselbe auf alter Geometrie fusst, noch von Interesse sind, schieben wir jetzt zunächst einige Mittheilungen ein aus einer noch nicht veröffentlichten Jugendschrift Karl Gustav Jacobi's, deren Inhalt vielfache Berührungspunkte mit dem bisher von uns erstatteten Berichte zeigt. Die Abhandlung umfasst 22 Quartblätter und trägt den Titel:

---

1) Vergl. Anm. 1 zu S. 383 und besonders Anm. ** zu S. 387.

2) Vergl. Cantor, Zeitschr. für Math. u. Phys., XXII. Jahrgang, historisch-literarische Abth. S. 176 f. (wiederholt in der Ausgabe des Pappus vol. III p. 1257).

Pappi Alexandrini collectiones mathematicas descripsit explicavit C. G. Jacobi, semin. philol. sod., Berolini, Jan. mense a. 1824.

Wir haben es also mit einer Seminararbeit zu thun, welche Jacobi bald nach Erfüllung seines 19. Lebensjahres (er ist am 10. Dec. 1804 geboren) abgefasst hat.[1]) Dem Berichterstatter ist die Schrift schon seit längerer Zeit durch die Güte des Herrn Professor Borchardt in Berlin mit der Ermächtigung überlassen worden, daraus zu veröffentlichen, was noch jetzt von Interesse scheine. Denn von einem vollständigen Abdruck kann füglich abgesehen werden, weil vieles, was Jacobi bei der Kargheit des ihm damals vorliegenden Materials nur vermuthungsweise beurtheilen konnte, inzwischen durch die Herausgabe des Originaltextes seine quellenmässige Erledigung gefunden hat. Auch entbehrt das Manuscript jeder Bemerkung, aus welcher man etwa entnehmen könnte, dass dem Verfasser diese Erstlingsarbeit später wieder zu Gesicht gekommen sei — wäre dies aber der Fall gewesen, so würde sicherlich vieles geändert worden sein; und solche Stellen, welche der Verfasser selbst allem Vermuthen nach ganz umgeschrieben haben würde, wenn er je an eine Veröffentlichung gedacht hätte, nachträglich noch zu publiciren, dazu liegt doch wohl kein Anlass vor. Wohl aber sind heute noch von Interesse die Abschnitte, welche uns zeigen, wie der Wissens- und Schaffensdrang des Jünglings diejenigen Disciplinen, welche er später als Meister beherrschen sollte, in möglichst nahen Zusammenhang mit der Ueberlieferung der griechischen Mathematiker zu bringen strebte. Er beginnt die Untersuchung in Form einer Dedication an seine Seminargenossen folgendermassen:

'Miramini, commilitones suavissimi, philologum me vobis philologis dissertatiunculam proponere de Pappi Alexandrini collectionibus mathematicis.[2]) Fragmenta exspectatis collecta, monostrophica in stropham et antistropham disposita, alia eiusmodi: iam numeros videtis, figuras. Nec tanta fuisset audacia mea, tam aliena studiis vestris in medium proferre, nisi ingenii vestri excellentia fretus essem, qui bene scitis et, quaecunque ad antiquitatem pertinent, ad philologiam pertinere et post Alexandrum quoque vixisse Graecos. Est vero mathesis Graeca, quem-

---

1) Ueber den Entwickelungsgang Jacobis vergl. Gerhardt, Geschichte der Mathematik in Deutschland, München 1877, S. 246 f.

2) Diese Bezeichnung des Sammelwerkes des Pappus war die damals allein bekannte; erst später ist als Titel des Werkes Συναγωγή, also Singularform ohne weiteren Zusatz, ermittelt worden.

admodum[1]) Graeca philosophia, clarum ingenii humani documentum et, sicuti haec, perfectum aliquod[2]) et absolutum. Hinc pudere debet philologum eius disciplinae vel prima elementa ignorare, in qua tanti erant veteres, ne dicam, quod notum est, quantum Graecae matheseos cognitio ad Platonem, alios intelligendos faciat. Latius enim patet illa, quam vulgo putant philologi, qui elementa fortasse Euclidis — et ne haec quidem, ut fit, optime — reliquorum vero mathematicorum vix nomina cognoverunt. Diophanteam memorem arithmeticen, quae hodie adhuc ab auctore vocatur, tam insigne inventum, ut vix mente concipi possit, quomodo idem rem tantam et invenire et perficere potuerit, ut iure videatur quibusdam nomen Diophanto ab ingenio additum? Nam et hodie non ita multi inveniuntur mathematice[3]) docti, qui omnia eius facile resolvant problemata. Quid de Apollonio dicam Pergaeo, de quo proverbium ortum inter mathematicos: esto mihi magnus Apollonius? Qui theoremata de sectionibus conicis ab antiquioribus accepta tot ac tantis auxit, ut recentiorum operam fere superfluam reddiderit; ille et, quod haud ita notum est, quaestionum de maximis et minimis[4]) auctor, unde tantus fructus in nostram analysim redundavit. Quid de Archimede, regio[5]) illo ingenio, qui — ne de quadratura parabolae, helicis theorematis, aliis eius inventis dicam — primus naturae leges mathematicis rationibus subiecit.[6]) Cuius libros de insidentibus humido (sive de iis quae in aqua vehuntur), quorum alter quaerit, quemnam situm conoides[7]), quae conicarum sectionum circumvolutione gignuntur, aquae immersae occupent, ipso Lagrange iudice[8]), fere nihil a recentioribus additum est. Nec absque eius, quibus theoriae-linearum curvarum fundamenta iecit, principiis, quae multo maioris momenti sunt quam nota illa Euclidis, vel hodie quidquam in rectificatione curvarum et trigonometricarum functionum evolutione perficere possumus. Ita Guldini quae vocatur regula, solidorum, quae volutione plani circa axem gignuntur, volumen aequale esse plano generanti[9]) in viam ducto, quam centrum eius gravitatis — nam et huius fere absolverat leges Archimedes — in circumvolutione

---

1) Dieses Wort ist mit Bleistift unterstrichen, aller Wahrscheinlichkeit nach von der Hand des Professors, welcher die Arbeit durchgesehen hat. Es ist leicht zu sehen, dass ein Ausdruck wie *vix minus quam* oder *similiter ac* passender gewesen wäre. 2) Der Verf. hat *aliquid* gemeint.

3) So der Verf. von zweiter Hand. Er wollte *mathematica*. Von erster Hand stand *mathematici* da. 4) Hierzu am Rande *lib. V. conic.*

5) Dieses Wort ist mit Bleistift unterstrichen. Dem lateinischen Sprachgebrauche würde *divino* besser entsprechen.

6) Auch dieses Wort ist unterstrichen. Vielleicht war *exegit* vorzuziehen.

7) Im Manuscr. *conoidae*, die Endung *ae* mit Bleistift unterstrichen.

8) Hiermit meinte der Verf., wie mir Herr Dr. Amthor in Dresden mittheilt, offenbar die Stelle in der Mécanique analytique, tome I p. 168 der 3. Ausgabe, Paris 1853.

9) So der Verf. durch Correctur aus *generatrici*, wofür zunächst *generatori*, dann das obige geändert worden ist.

transcurrit, iam a Pappo nostro inventa est.[1]) In quo et alia theoremata quae quaestiones Graecorum geometricas testantur, quas hodie ignoramus; de quibus infra. Cuius collectiones mathematicae quasi thesaurus sunt historiae veteris matheseos; nam et omnia ille ante eum inventa cognovit et insignis post eum mathematicus nemo vixit. Qua de causa, licet ille ne e longinquo quidem cum claris illis ingeniis, quae modo nominavi, comparandus sit, accuratius eas describendas delegi. Valete.'

Es folgen nun aus Fabricius Bibliotheca Graeca einige Notizen über das Zeitalter und die Werke des Pappus und eine ausführlichere Besprechung der Uebersetzung Commandinis. Es wird hervorgehoben, dass Commandini selbst nicht die letzte Hand an sein Werk habe legen können, sondern dass dasselbe erst nach seinem Tode mit Unterstützung des Herzog Francesco Maria II. von Urbino erschienen sei. Die Uebersetzung sei ganz wörtlich, oft auf Kosten der Latinität oder des Verständnisses. Mitten im Texte finden sich oft Lücken, 'nescio codicis an ipsius culpa'.[2]) Auf keinen Fall könne die Uebersetzung den griechischen Text ersetzen, und es sei zu wünschen, dass wenigstens die Vorreden der einzelnen Bücher und diejenigen Abschnitte, in welchen zusammenhängende Erörterungen und Untersuchungen (also keine geometrischen Sätze nebst Beweisen) niedergelegt sind, besonders herausgegeben würden. Die Verbesserungen Commandinis beschränken sich meist auf elementare Sachen, besonders auf die Zeichnung der Figuren; oft sei auch Verwirrung eingetreten, indem die Worte des Textes nicht auf die zunächststehende, sondern auf eine frühere Figur sich beziehen. Trotz aller dieser Mängel sei die Ausgabe, so lange der Originaltext fehle, auch für die Kritik brauchbar, da sie vielfach erkennen lasse, wie der griechische Text gelautet habe.

Es folgt nun unter der Ueberschrift 'Liber tertius' eine Angabe des Inhalts dieses Buches. Nach Commandini sollte Pappus dieses

1) Im Manuscr. steht von erster Hand *in Pappo nostro legitur*, von zweiter *a Pappo nostro inventum est*, und dazu am Rande *lib. 7.* (p. 682, 7 der vorliegenden Ausgabe).

2) Nachdem die vorliegende Ausgabe erschienen, hat sich herausgestellt, dass die Lücken im Text fast alle bereits in der von Commandini benutzten griechischen Handschrift sich befanden. Nur ausnahmsweise hat er Abschnitte dieser Handschrift weggelassen. Anders steht es mit grösseren Lücken in den Commentaren, wo der Herausgeber Commandinis das Papier unbedruckt gelassen hat; hier fanden sich also unbeschriebene Stellen im Manuscript Commandinis, welche derselbe später auszufüllen gedachte. Diese Lücken betreffen meist, wie leicht erklärlich, besonders schwierige und dunkle Stellen des griechischen Textes.

Buch einem gewissen 'Cratistus' gewidmet haben. Scharfsinnig bemerkt Jacobi, dieses ὦ κράτιστε müsse Appellativum sein, es sei vielleicht die Anrede an Pappus Sohn Hermodorus, dem das 7. und 8. Buch gewidmet sind. Letztere Vermuthung hat sich nun zwar nicht bestätigt, wohl aber die Deutung von κράτιστος, denn das darauf folgende Nomen proprium Pandrosion (p. 30, 4 der vorliegenden Ausgabe) hatte Commandini einfach weggelassen. Weiter verfolgt Jacobi ziemlich ausführlich die Untersuchung, welche Pappus zu Anfang des dritten Buches über die Unterscheidung der Worte Theorem und Problem anstellt, sowie über die Unthunlichkeit gewisse Probleme durch Sätze der Planimetrie zu lösen. Ein solches Problem ist das bekannte Delische 'datis duabus rectis lineis duas medias proportionales in continua analogia invenire'. Hierüber referirt Jacobi folgendermassen, zunächst den Inhalt von Pappus Worten (p. 34 ff.) weiter angebend:

'Hoc quidam qui magnus geometra habebatur falso per planorum tantum considerationem, quod absurdum est, constructum nostro tradiderat, demonstrationem se additurum pollicitus. Quem Pappus, Hierio[1]) philosopho alias ignoto homine orante, refellit, ita ut demonstret, vera si foret eius constructio, absurdum aliquod consequuturum esse, et id quidem non geometrice tantum, sed etiam per numeros. Errant enim qui arithmeticam sive algebraicam geometriam ignoratam ab antiquis putent; immo in Pappo nostro valde exculta est, unde Fr. Vieta et Cartesius, qui primi recentiorum eam tractarunt, hanc disciplinam hauserunt.'

Es wird nun weiter über die verschiedenen Lösungen des Delischen Problems, welche theils bei Pappus theils bei anderen sich finden, gehandelt, und zuletzt dieser Abschnitt mit folgenden Worten geschlossen:

'Ceterum secundum antiquos tria problematum genera definit: 1. ἐπίπεδα, quae per rectas lineas et circulos qui in plano ortum habent, 2. στερεά, quae per sectionem conicam, 3. γραμμικά, quae per alias lineas curvas, veluti ἕλικας et τετραγωνιζούσας, construuntur. Nos diceremus primum genus aequationis secundi gradus[2]) (vel etiam primi), alterum tertii et quarti gradus, tertium altioris resolutionem poscere. Etenim curva m^{ti} gradus, quam dicimus, et altera n^{ti} gradus non plura quam $m \times n$ intersectionis puncta habere possunt; itaque per duarum (modo ne eiusdem generis sint) sectionum conicarum, quae omnes secundi gradus sunt, intersectiones omnes ad quartum usque gradum aequationes resolvi possunt.'

---

1) Im Manuscript Jacobis steht *Hieronymo* nach Commandini. Vergl. oben S. 321, Anm. 1.

2) Dieses Wort fehlt im Manuscript. Der Verf. wollte das nächstfolgende *gradus* auch hierher bezogen wissen.

Jacobi wendet sich nun zu dem zweiten derjenigen Probleme, welche im dritten Buche von Pappus kritisch erörtert werden. Dasselbe handelt von den *medietates*:

'Recte vero dicit omnem ἀναλογίαν etiam esse μεσότητα, non vice versa μεσότητα omnem etiam ἀναλογίαν. Harmonicam medietatem esse dicit, si medius terminus eadem parte alterum superet qua ab altero superetur, vel si, ut alter extremus ad alterum, ita primus excessus sit ad secundum. Prior definitio obscurior est. E posteriori discimus a, b, c esse in harmonica ratione, si $a : c = b - a : c - b$, id est $\frac{b-a}{a} = \frac{c-b}{c}$; superat vero b proximum terminum numero vel linea $b - a$, itaque $\frac{b-a}{a}$-ta parte ipsius a; c vero superat b quantitate $c - b$, itaque $\frac{c-b}{c}$-ta parte sui ipsius; hinc dicere poterat Pappus quae in priore definitione dixit; nam conditionem $\frac{b-a}{a} = \frac{c-b}{c}$ eandem esse atque $a : c = b - a : c - b$ analogiam iam diximus. Ipse numeros dat 2, 3, 6, qui minimi sunt integri, qui harmonicam medietatem efficiunt.'

Hiernach wird die geometrische Construction der drei Termini des harmonischen Mittels, wie sie Pappus Propos. 9—11 giebt, besprochen und dann die Darstellung der übrigen sieben *medietates* kurz berührt. In der darauf folgenden tabellarischen Uebersicht aller Medietäten, welche nach Commandini fol. 17 (p. 102 f. der vorliegenden Ausgabe) zusammen gestellt ist, werden die kleinsten Zahlen des siebenten Mittels übereinstimmend mit Commandini Propos. 24 auf 5, 3, 2 festgestellt, und dabei die abweichende Ansetzung 7, 4, 3, welche Commandini fol. 17 giebt, berichtigt. Von dem Berichterstatter sind in der vorliegenden Ausgabe p. 97 und 102 f. als kleinste Zahlen 3, 2, 1 (wie bei der zehnten Medietät) angenommen worden, eine Abweichung, worüber im Anhang vol. III p. 1218—20 noch einiges bemerkt worden ist. Indess scheint die Frage der siebenten Medietät noch definitiver Lösung zu bedürfen, wobei die gleich anzuführenden Bemerkungen Jacobis zu berücksichtigen sein werden. Der überlieferte Text bietet hier ebenso wie einmal im fünften Buche (Propos. 9) die interessante Erscheinung einer Lücke gerade da, wo eine ausserordentliche Schwierigkeit zu lösen war. Soll man annehmen, dass Pappus gestorben sei, ehe er die letzte Hand an sein Werk habe legen können? Einen solchen Eindruck macht im übrigen das nach einheitlichem Plan angelegte und sorgfältig ausgeführte Werk nicht. Vielleicht darf man annehmen, dass solche auffällige Lücken, wie wir sie soeben beschrieben

haben (zu den angeführten Stellen kommt noch hinzu Propos. 19 des 3. Buches), herrühren von der Hand eines gelehrten Ueberarbeiters des Pappus, der an diesen Stellen (und wohl mit Recht) Irrthümer des Schriftstellers zu bemerken glaubte, deshalb diese Stellen entweder selbst tilgte oder eine Bemerkung beifügte, welche die Weglassung derselben beim Abschreiben veranlasste, selbst aber nicht im Stande war, etwas Besseres anstatt des Getilgten einzusetzen.

Wir kehren nun zu Jacobi zurück, welcher seiner tabellarischen Uebersicht der Medietäten folgende Bemerkungen beifügt:

'His formulis regula inest, qua has[1]) medietates semper in numeris integris invenire liceat. Id quod pertinet ad Diophanteam analysin sive theoriam numerorum. Maxime vero dolendum est Pappum viam non addidisse, qua ad hasce formulas pervenerit; qui enim ante Pappum lectum[2]) ipse eas invenire tentaverit, rem non ita facile expediri inveniet. Quatuor postremas a iunioribus esse inventas dicit. Unam vero omissam ab iis esse recte me animadvertisse credo. Poterant quidem plures videri, sed adnotandum proportiones

$$a - b : b - c = b : c, \text{ et } a - b : b - c = a : b$$

idem valere atque analogiam $a : b = b : c$, unde patet, cur quinta et sexta, scil. $a - b : b - c = c : b$, $a - b : b - c = b : a$ geometricae contrariae sint appellatae. Quatuor postremis contrariae absurdae fuissent, quia $a - c > a - b$, et $a - c > b - c$. Absurda etiam illa $a - c : b - c = a : b$, unde consequitur $a = b$. Itaque unica, quae adhuc reliqua, est $a - c : b - c = a : c$, quae dat

$$ac - c^2 = ab - ac$$
$$2ac - c^2 = ab$$
$$b = \frac{2ac - c^2}{a}.$$

Ut autem denominator evanescat, ponamus $a = AB^2$, $c = AB$; fit $b = 2AB - A$; et ita AB^2, $2AB - A$, AB undecimam medietatem constituit, quae et ipsa, ut videmus, e divina analogia composita est. Ponendo $A = 1$, $B = 2$, minimi numeri evadunt 2, 3, 4, iidem quam nonae, a qua tamen diversam esse vidimus undecimam. Adnotandum vero neque scribarum neque autoris culpa omissam esse septimae formulam, sed apta ratione, id quod non vidit interpres[3]); est enim $a - c : a - b = b : c$ proportio nihil aliud quam $a = b + c$*). Ceterum quomodo undecimae formulam invenimus, ita reliquas fortasse invenerant veteres.'

1) Im Manuscript steht *hae*.

2) Der Verf. wollte offenbar *antequam Pappum legerit*.

3) Nämlich Commandini.

*) Jacobi scheint hier nicht beachtet zu haben, dass die von ihm verdächtigte Formel mitten im Text p. 86, 4 (womit p. 84, 26 bis 86, 3 zu vergleichen ist), und ohne dass man an ein Verderbniss denken kann, sich verzeichnet findet.

'Hoc problema fusius exposui, commilitones, quia harmonicae medietatis cognitio ad musices veterum theoriam intelligendam necessaria est.'

Aus der Untersuchung über das dritte Problem des dritten Buches und die damit verwandten Sätze (Propos. 28—42) heben wir nur eine Aeusserung hervor, welche in Uebereinstimmung mit dem, was zu Anfang dieses Berichtes hervorgehoben wurde, die Wichtigkeit der Sammlung des Pappus für die Geschichte der griechischen Mathematik hervorhebt:

'Quem Erycinum[1]) etsi alius nemo commemorat, idem nobis praestat Pappus, quasi liber eius ad nostra usque tempora devenisset. Et ita multorum mathematicorum Pappus non nomina tantum, sed etiam ipsa opera continet, ut appareat, quantum eius lectio ad veteris matheseos cognitionem faciat.'

Zu dem vierten Problem des dritten Buches (Propos. 43—58) wird folgendes bemerkt, und sodann unmittelbar zum vierten Buche übergegangen:

'Addit deinde Pappus problema, quod iam in decimo tertio libro Euclidis solutum legimus, "in data sphaera polyhedra describere". Hoc an et ipse dederit vir ille optimus[2]), an Pappus ex ingenio addiderit, non liquet. Saepius vero consilium Pappi, cur haec, cur illa tradiderit, in obscuro est[3]); raro enim ipse causam addit, sicuti initio huius libri. Neque igitur deesse aliquid affirmare licet.'

'Hoc problema libri tertii finem facit; et ad quartum venimus, qui omnium maxime coeca theorematum est aggregatio. E quorum tamen numero unum est tam pulcrum, ut, si et tota mathesis Graeca interiisset, vel hodie, si id unum tantum ad nos pervenisset, quanta fuerit Graecis rerum mathematicarum cognitio, inde divinare possemus. Et quod maxime dolendum est, ne nomen quidem viri scimus, qui egregium theorema invenit. Dicit enim Pappus tantum[4]) in quibusdam libris circumferri hance[5]) propositionem antiquam, quam deinde lemmatibus et theorematis paucis praemissis demonstrat[6]), quam acutissimam demonstrationem nescimus sitne a Pappo an ab auctore theorematis profecta. Quia vero haec propositio recentioribus mathematicis ignota esse videtur — neque enim in recentioribus libris legitur excepto Klügelii lexico mathematico v. Arbelus, sed absque demonstratione, quam tamen apponere ille

---

1) Jacobi schreibt mit Commandini *Erycemum*. Die richtige Namensform ist, wie oben bemerkt, erst später ermittelt worden.

2) Nämlich Euklid.

3) Hier ist es an der Stelle auf die treffenden Bemerkungen Cantors in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. XXII, histor.-lit. Abth. S. 177 f. (wiederholt in der vorliegenden Ausgabe p. 1257 f.) zu verweisen.

4) Dieses Wort ist mit Bleistift unterstrichen, mithin als auffällig notirt.

5) Das Manuscript *hancce*.

6) Vergl. die vorliegende Ausgabe p. 208 f. und danach Propos. 13—18.

solet[1]), neque quos ipse rogavi mathematicos, eam noverant — tradidi olim amico, si quis alius acuto ingenio praeditus[2]) in geometricis *eius theorematis vim ac rationem perspiceret.*[3]) Qui plurima invenit egregia theoremata, quae partim ex eo consequuntur, partim arctius cum eo cohaerent[4]); quae et ipsa fortasse Graecis haud incognita erant. Vix enim credibile est hoc aliquem theorema invenire potuisse, nisi maxime versatus fuerit in quaestionibus quibusdam de tactionibus, longe difficilioribus quam[5]) Apollonii fuerant in libris περὶ ἐπαφῶν, quarum argumentum ex Pappi libro septimo cognoscimus, et quas egregie maximam partem restituit Franc. Vieta in tractatu suo Apollonio Gallo.[6]) Nec mirum tot ac tanta interiisse mathematicorum Graecorum opera, cum iam Pappus queratur rarissima eorum esse exemplaria et plurima manca.'[7])

Hierauf wendet sich Jacobi zu einer summarischen Besprechung derjenigen Haupttheoreme, welche in Propos. 1—18 des vierten Buches enthalten sind. Obgleich er, bereits dem Abschluss seiner Arbeit zueilend, meist sich damit begnügt, den Wortlaut der ein-

1) Offenbar soll stillschweigend ergänzt werden *aliis propositionibus* (scil. quarum demonstrationes ipse non ignorat).

2) Das Manuscript hat *praedito.*

3) Die cursiv gedruckten Worte fehlen im Manuscript, sie sind vom Berichterstatter vermuthungsweise hinzugefügt. Anstatt des folgenden Punktes und *Qui* (mit Initialem) steht im Manuscript Comma und *qui.*

4) Hierzu hat der Verfasser am Rande folgende Note beigefügt: 'Mox ille, spero, publici ea iuris faciet, unde Graeci ingenii laus haud exiguo augebitur'. Wer dieser Freund Jacobis gewesen sein möge und ob die angekündigte Abhandlung desselben später erschienen ist, hat Referent nicht ermitteln können. Nach einer Mittheilung des Herrn Dr. Amthor in Dresden ist das Wichtigste, was bald nach 1824 über diesen Gegenstand erschienen ist, der 80. Satz von Jac. Steiner, Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten, Erster Theil, S. 318 f., wiederholt aus Gergonne's Annales de mathématiques XVIII v. J. 1828.

5) Dieses Wort wiederum mit Bleistift unterstrichen; desgleichen ist die ganze Stelle von *de tactionibus* bis ἐπαφῶν durch einen senkrechten Bleistiftstrich am Rande notirt.

6) Vergl. Chasles, Aperçu historique sur les méthodes en géometrie, p. 52 der Pariser Ausgabe vom J. 1875.

7) Hiermit ist eine bereits von Fabricius (Bibl. Gr. Lib. V cap. 22, II gegen Ende) gemachte Bemerkung wiederholt. Die Stelle findet sich im 8. Buch (p. 1116, 5—7 der vorliegenden Ausgabe); sie rührt aber von einem späteren Bearbeiter der Sammlung des Pappus her, wie wir in der Abhandlung *De Heronis mechanicorum reliquiis in Pappi collectione servatis* in den *Commentationes Mommsenianae,* Berlin 1877, p. 117—120, nachgewiesen haben. Hiernach gilt obige Bemerkung Jacobis für die Zeit, in welcher jener Bearbeiter schrieb, also etwa für den Ausgang des fünften Jahrhunderts n. Chr., denn weiter abwärts lässt sich seine Epoche wohl schwerlich ansetzen.

zelnen Theoreme anzugeben, so finden sich immer noch einige bemerkenswerthe Aeusserungen eingestreut. So kommt er bei Besprechung der 1. Proposition auf die Wirksamkeit Euklids in Alexandria zu sprechen. Nachdem er im Auszuge angeführt hat, was Pappus selbst und sein Bearbeiter im achten Buche (cap. 33—35, p. 676 ff. der vorliegenden Ausgabe) uns mittheilen, fährt er fort, wie folgt:

'Quare quantum debeatur viro[1]), vix dici potest. Qui multo plura in mathematicis profecit, quam ex operibus eius quae extant colligitur.[2]) Nam et Apollonii conicorum quatuor libri primi eius sunt, quod e Pappo cognoscimus, et aliud eius opus exstitit, porismatum libri tres, cuius lemmata Pappus exhibuit in libro septimo, unde divinari quodammodo potest, quam praeclarum illud fuerit; restitutum vero postea est ex divinatione a Roberto Simson[3]), summi ingenii viro et mirum in modum Graecae matheseos perito. Alius quoque operis Euclidis, τόπων πρὸς ἐπιφάνειαν, locorum ad superficiem, duobus libris conscripti, fragmenta Pappus ad finem libri septimi exhibet; quod quam praeclarum fuerit, ex hoc uno theoremate elegantissimo apparet, quod Euclidis esse haud ita multi sciunt.'

Es wird nun Propos. 238 des 7. Buches ihrem Wortlaute nach angeführt. Welche Bedeutung Euklid, abgesehen von seinem Verdienst als Zusammensteller der Elemente, im Gebiete der analytischen Geometrie und der geometrischen Oerter hat, ist, seitdem Jacobi dies schrieb, mehr und mehr anerkannt worden.[4]) Seine eben angeführten Worte mögen also jetzt als veraltet erscheinen; aber immerhin sind sie werthvoll als Zeugniss für den Scharfblick, mit dem bereits der Jüngling durchschaute, auf welche Punkte hauptsächlich ein tieferes Eindringen in die Mathematik der Griechen sich richten müsse. Aus demselben Grunde ist schliesslich noch eine Bemerkung hervorzuheben, welche Jacobi zu Propos. 10 macht:

'Decimum theorema, ad quod demonstrandum septimum, octavum, nonum praemittit, circulum describi iubet, qui tres datos seque contingentes contingat.'

'Hoc vero theorema non construitur, sed algebraice deducitur, res quaesitas datas esse. Nam quod veteres dicunt demonstrare aliquid datum esse, id nobis analytica problematis solutio est. Quam vetus vero sit ea ἀνάλυσις, eo apparet, quod iam Euclides Δεδομένων librum scrip-

---

1) Nämlich dem Euklid.

2) Das Manuscript *collegitur.*

3) Das Manuscript hat *Simpson.*

4) Cantor, Euclid und sein Jahrhundert, Leipzig 1867, S. 14—26, Chasles, Aperçu historique etc. p. 12—15 und 274—284 der Pariser Ausgabe vom J. 1875, derselbe, Les trois livres de porismes d'Euclide, Paris 1860.

serat. *Δεδομένα* enim id genus theorematum vocat, quo demonstratur aliquid datum esse. Cuius generis etiam septimum est theorema[1]), satis difficile, datis quadrilateri, quod unum habeat angulum rectum, lateribus datas etiam esse diametros. Unumquodque datum recte animadvertit Pappus proponi posse sive ut theorema sive ut problema, scilicet si id inveniendum proponatur, quod datum esse demonstrandum est.'

Also auch die wichtige Thatsache ahnte Jacobi bereits, dass die Griechen in der analytischen Geometrie einen hohen Standpunkt erreicht haben, wie dies neuerdings, ausser von Cantor und Chasles (an den kurz vorher angeführten Stellen) und anderen, in einem an den Herausgeber gerichteten Schreiben (vol. III p. 1231 f.) von Herrn Professor Baltzer in Giessen ausgesprochen worden ist.[2])

Soll der Referent selbst, indem er dem Schlusse seines Berichtes sich nähert, es entschuldigen, dass er so lange einen anderen anstatt seiner hat sprechen lassen? Gewiss nicht. Es kam ja nur darauf an, in den Kreisen derjenigen Fachgelehrten, welche den Forschungen auf dem Gebiete der alten Mathematik ferner stehen, ein Interesse anzuregen für die Schätze der Ueberlieferung, welche nun endlich in authentischer Form erschienen sind, nachdem man so lange mit abgeleiteten Quellen sich hstte behelfen müssen. Und was vor einem halben Jahrhundert ein Studirender der Philologie, bereits sich zuwendend der hohen Wissenschaft, in welcher er bald so Grosses leisten sollte, als Erstlingsarbeit geschrieben hat; gilt es nicht fast alles noch jetzt, wenn man Beweise dafür sucht, dass eine Originalausgabe der Sammlung des Pappus ein wirkliches Bedürfniss war?

Was Referent noch ausserdem von Material sich gesammelt hatte, um andere Belege solcher Art hier beizubringen, muss nun allerdings vor der Hand zurückgelegt werden, um nicht die Grenzen des zugemessenen Raumes zu überschreiten. Es genügt aber vielleicht anstatt dieser Belege ein kurzer Hinweis auf die lexicalischen Sammlungen, welche den letzten Halbband der Ausgabe füllen. Da in den *Index Graecitatis* alles aufgenommen ist, was sprachlich oder

1) Propos. 7 des 4. Buches.

2) Auch Herr Dr. Curtze in Thorn äussert sich in einer an den Ref. gerichteten Zuschrift vom 27. XII. 78 über diese Frage, wobei er unter Berufung auf Günther, Geschichte des Coordinatenprincips, den Schwerpunkt der alten analytischen Geometrie in anderen Problemen als dem von Baltzer behandelten Archimedischen findet. Zu erwähnen ist an dieser Stelle noch die Restitution desselben Problems, welche J. L. Heiberg in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. XXIII, hist.-lit. Abth. S. 117—120 giebt.

sachlich in dem Werke des Pappus irgend bemerkenswerth ist, so wird es in jedem einzelnen Falle, eventuell auch mit Zuhilfenahme des Sachregisters oder des Verzeichnisses der Autoren, leicht gelingen, diejenigen Stellen des Pappus aufzufinden, welche für die gerade vorliegende Frage etwa in Betracht kommen. Beispielshalber mögen zuletzt noch zwei Notizen dieser Art hier ihre Stelle finden. Zur geschichtlichen Entwickelung der Lehre von den Sternpolygonen, worüber kürzlich Günther[1]) so trefflich gehandelt hat, kommt die Frage in Betracht, wieweit die Griechen auch übergeeckte Figuren in den Bereich geometrischer Darstellung gezogen haben. Zu diesem Zwecke können im Pappus-Index die Artikel *κοιλογώνιον* und *ὕπτιος* zu Rathe gezogen werden. Ferner im Anschluss an die Pappusstelle, wo *τὰ ἑνὶ διαστήματι γραφόμενα* erwähnt werden (zu vergl. der Index unter *διάστημα*), theilte Herr Professor Cantor in Heidelberg dem Berichterstatter brieflich mit, dass durch jene Stelle offenbar der bisher noch nie beachtete Ursprung der Geometrie mit einer Zirkelöffnung nachgewiesen sei, einer Disciplin, von deren Existenz bei den Griechen allerdings sonst keine Spur bekannt sei, und die später plötzlich bei den Arabern, dann im XV. und XVI. Jahrhundert bei den Italienern auftauche.[2])

Dieses letzte Citat, sowie die frühere Erwähnung der Herren Borchardt und Baltzer giebt dem Berichterstatter willkommenen Anlass, nochmals seinen Dank für die Beiträge, welche mehrere befreundete Gelehrte dem Werke gespendet haben, öffentlich auszusprechen. Nicht minder fühlt sich der Herausgeber zu Danke verpflichtet sowohl für die Unterstützung, welche die Königl. Preussische Akademie der Wissenschaften zur Herstellung des Druckes bewilligt hat, als für die von der Verlagsbuchhandlung behufs würdiger Ausstattung des Werkes gebrachten Opfer.

1) Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathem. Wissenschaften, Leipzig 1876, S. 1--92, und früher in der S. 1 angeführten Abhandlung *Lo sviluppo storico dei poligoni stellati* etc.

2) Vergl. Cantor in der Zeitschr. für Mathem. u. Phys., XXII, histor.-liter. Abth. S. 146 f.

Dresden. Friederich Hultsch.

F. Klein. Ueber die Erniedrigung der Modulargleichungen. (Math. Annalen XIV pag. 417—427.)

Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen. (Ebenda pag. 428—471.)

Eine neue Anwendung derjenigen functionentheoretischen Methoden, deren ich mich in meiner vorletzten Arbeit (Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades, Rep. Bd. 2 pag. 250) bediente, um die Modulargleichungen zu studiren und in den niedersten Fällen in neuer Form aufzustellen.

In dem ersten der beiden vorliegenden Aufsätze behandle ich in diesem Sinne diejenigen Resolventen 5ten, 7ten, 11ten Grades, welche die Modulargleichungen 6ten, 8ten, 12ten Grades einem berühmten Satze von Galois zufolge besitzen, und zeige, dass diese Resolventen in einfachster Form folgendermassen lauten:

$$J = \varphi(y),$$

wo J die absolute Invariante des elliptischen Integrals, y die Unbekannte und φ eine ganze Function mit numerischen Coëfficienten bezüglich vom 5ten, 7ten, 11ten Grade bedeutet. Diese Function φ hat in den drei Fällen folgende charakteristische Eigenschaft:

a) bei $n=5$ enthält $\varphi(y)$ einen linearen Factor cubisch, $\varphi(y)-1$ einen quadratischen Factor doppelt,

b) bei $n=7$ enthält $\varphi(y)$ einen quadratischen Factor cubisch, $\varphi(y)-1$ einen quadratischen Factor doppelt,

c) bei $n=11$ enthält $\varphi(y)$ einen cubischen Factor dreifach und $\varphi(y)-1$ einen biquadratischen Factor doppelt.

In Folge dessen erhält man durch elementaren Ansatz:

1) bei $n=5$:
$$J : J-1 : 1 = (y^2 - 11y + 64)(y-3)^3 : y(y^2 - 10y + 45)^2 : -1728,$$

2) bei $n=7$:
$$J : J-1 : 1 = y\left(y^2 + 7y + \frac{77 \pm \sqrt{-7}}{8}\right)^3 : \left(y^3 + 13y^2 + \frac{425 \pm 19\sqrt{-7}}{8}\, y + \frac{135 \pm 27\sqrt{-7}}{2}\right) \cdot \left(y^2 + 4y + \frac{11 \pm \sqrt{-7}}{8}\right)^2 : -\frac{27}{4}(13 \pm 7\sqrt{-7})$$

Bei $n = 11$ wird die Rechnung weitläufig und ich habe sie noch nicht zum Abschlusse gebracht; ich hoffe die Schlussformel bald auf anderem Wege zu erhalten.

Die Gleichungen 1), 2) sind übrigens nicht eigentlich neu. Schreibt man nämlich in 1) statt $J - 1$ $\frac{27 g_3^2}{\Delta}$, statt y x^2 und zieht aus

$$J - 1 = \varphi(y) - 1$$

beiderseits die Quadratwurzel, so kommt Brioschi's bekannte Gleichung fünften Grades in der Form:

$$x^5 - 10x^3 + 45x = \frac{216 g_3}{\sqrt{-\Delta}};$$

setzt man andererseits in 2) $\frac{g_2^3}{\Delta}$ statt J, $\frac{x^3}{-2^2 \cdot 7(7 \mp \sqrt{-7})}$ statt y und zieht aus

$$J = \varphi(y)$$

beiderseits die Cubikwurzel, so folgt:

$$x^7 - 2^2 \cdot 7^2 (7 \mp \sqrt{-7}) x^4 + 2^5 \cdot 7^4 (5 \mp \sqrt{-7}) z \mp 2^9 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot \sqrt{-7} \cdot \frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}} = 0,$$

und dies ist im Wesentlichen dieselbe Gleichung, welche Hermite im 2. Bande von Tortolini's Annali di Matematica (pag. 59) mitgetheilt hat.

In dem zweiten der hier zu besprechenden Aufsätze stelle ich das Problem: für die Transformation 7[ter] Ordnung die *Galois*'sche Resolvente 168[ten] Grades in zweckmässigster Form zu bilden, und von ihr aus die früher von mir untersuchte Modulargleichung 8[ten] Grades, so wie die im vorhergehenden Aufsatze studirte Resolvente 7[ten] Grades abzuleiten. — Der functionentheoretische Ansatz zeigt ohne Weiteres, dass die Wurzel η dieser Resolvente mit der absoluten Invariante durch eine Gleichung vom Geschlechte $p = 3$ zusammenhängt, und dass diese Gleichung durch 168 eindeutige Transformationen von a priori angebbarer Gruppirung in sich übergeht. Es gelingt daraufhin, durch eine Reihe einfacher Schlüsse die Normalcurve niederster Ordnung zu finden, auf welche man die gesuchte Gleichung eindeutig beziehen kann; sie hat folgende Gleichung:

$$f = \lambda^3 \mu + \mu^3 \nu + \nu^3 \lambda = 0,$$

und geht durch 168 Collineationen der Ebene in sich über, welche sich aus folgenden drei durch Wiederholung und Combination zusammensetzen lassen:

$$1)\quad \lambda' = \gamma\lambda\,,\ \mu' = \gamma^4\mu\,,\ \nu' = \gamma^2\nu\,, \qquad \left(\gamma = e^{\frac{2i\pi}{7}}\right)$$

$$2)\quad \lambda' = \mu\,,\ \mu' = \nu\,,\ \nu' = \lambda\,,$$

$$3)\quad \begin{cases} \sqrt{-7}\cdot\lambda' = (\gamma^6-\gamma)\,\lambda + (\gamma^5-\gamma^2)\,\mu + (\gamma^3-\gamma^4)\,\nu\,, \\ \sqrt{-7}\cdot\mu' = (\gamma^5-\gamma^2)\,\lambda + (\gamma^3-\gamma^4)\,\mu + (\gamma^6-\gamma)\,\nu\,, \\ \sqrt{-7}\cdot\nu' = (\gamma^3-\gamma^4)\,\lambda + (\gamma^6-\gamma)\,\mu + (\gamma^5-\gamma^2)\,\nu\,. \end{cases}$$

Das volle System derjenigen ganzen Functionen von λ, μ, ν, welche bei diesen Collineationen ungeändert bleiben (und die zugleich das volle System der Cavarianten von f ausmachen), ist leicht anzugeben. Es umfasst ausser f nur noch die Hesse'sche Form sechster Ordnung:

$$\nabla = \frac{1}{54}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial\mu} & \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial\nu} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\mu\partial\lambda} & \frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial\mu\partial\nu} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\nu\partial\lambda} & \frac{\partial^2 f}{\partial\nu\partial\mu} & \frac{\partial^2 f}{\partial\nu^2} \end{vmatrix},$$

die Form vierzehnter Ordnung:

$$C = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial\mu} & \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial\nu} & \frac{\partial\nabla}{\partial\lambda} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\mu\partial\lambda} & \frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial\mu\partial\nu} & \frac{\partial\nabla}{\partial\mu} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\nu\partial\lambda} & \frac{\partial^2 f}{\partial\nu\partial\mu} & \frac{\partial^2 f}{\partial\nu^2} & \frac{\partial\nabla}{\partial\nu} \\ \frac{\partial\nabla}{\partial\lambda} & \frac{\partial\nabla}{\partial\mu} & \frac{\partial\nabla}{\partial\nu} & 0 \end{vmatrix}.$$

und die Functionaldeterminante von der 21ten Ordnung:

$$K = \frac{1}{14}\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial\lambda} & \frac{\partial\nabla}{\partial\lambda} & \frac{\partial C}{\partial\lambda} \\ \frac{\partial f}{\partial\mu} & \frac{\partial\nabla}{\partial\mu} & \frac{\partial C}{\partial\mu} \\ \frac{\partial f}{\partial\nu} & \frac{\partial\nabla}{\partial\nu} & \frac{\partial C}{\partial\nu} \end{vmatrix},$$

zwischen denen, vermöge $f = 0$, folgende eine Identität besteht:

$$(-\nabla)^7 = \left(\frac{C}{12}\right)^3 - 27\left(\frac{K}{216}\right)^2.$$

In Folge dessen kann man der Gleichung 168ten Grades eine sehr übersichtliche Form ertheilen. Man setze einfach

$$J : J-1 : 1 = \left(\frac{C}{12}\right)^3 : 27\left(\frac{K}{216}\right)^2 : -\nabla^7\,,$$

während gleichzeitig

$$f = 0$$

ist, und betrachte in diesem Gleichungssysteme die *beiden* Verhältnisse $\lambda : \mu : \nu$ als Unbekannte.

Für die Modulargleichung achten Grades und die Resolvente siebenten Grades ergiebt sich jetzt eine explicite Darstellung der Wurzeln durch eine Lösung $\lambda : \mu : \nu$. Ich hatte der Modulargleichung achten Grades früher die Form ertheilt:

$$\begin{aligned} J : J - 1 : 1 = {} & (\tau^2 + 13\tau + 49)(\tau^2 + 5\tau + 1)^3 \\ & : (\tau^4 + 14\tau^3 + 63\tau^2 + 70\tau - 7)^2 \\ & : 1728\tau\,. \end{aligned}$$

Jetzt finde ich für die acht Wurzeln $\tau_\infty, \tau_0, \cdots \tau_6$ folgende Werthe:

$$\tau_\infty = -\frac{49\lambda^2\mu^2\nu^2}{\nabla},$$

$$\tau_x = -\frac{\left\{\begin{array}{c}\lambda\mu\nu - (\gamma^{3x}\lambda^3 + \gamma^{5x}\mu^{1} + \gamma^{6x}\nu^3) + (\gamma^{6x}\lambda^2\mu + \gamma^{3x}\mu^2\nu + \gamma^{5x}\nu^2\lambda) \\ + 2(\gamma^{4x}\lambda^2\nu + \gamma^{x}\nu^2\mu + \gamma^{2x}\mu^2\lambda)\end{array}\right\}^2}{\nabla}$$

$$(x = 0, 1, 2, \cdots 6).$$

Ich finde ferner für die Wurzeln $y_0, y_1, \cdots y_6$ der zu Anfang dieses Referates mitgetheilten Gleichung siebenten Grades:

$$y_x = \frac{\mp 56\sqrt{-7}\left\{(\gamma^{2x}\lambda^2 + \gamma^{x}\mu^2 + \gamma^{4x}\nu^2) + \frac{-1 \mp \sqrt{-7}}{2}(\gamma^{6x}\mu\nu + \gamma^{3x}\nu\lambda + \gamma^{5x}\lambda\mu)\right\}^3}{\nabla}.$$

Zum Beweise dieser Formeln gebrauche ich gewisse Eigenschaften der Wendetangenten und Doppeltangenten der Curve $f = 0$, auf die ich hier der Kürze wegen nicht eingehen kann; ebenso will ich nur erwähnen, dass die früher bereits von mir hervorgehobene Eigenthümlichkeit der Modulargleichung achten Grades, eine Jakobi'sche Gleichung zu sein, hier darauf zurückkommt, dass bei der Curve $f = 0$ ein System von Berührungscurven dritter Ordnunng mit gerader Charakteristik ausgezeichnet ist. — Meine Arbeit enthält ausserdem eine genaue Darlegung der auf die verschiedenen Irrationalitäten bezüglichen Verzweigungen, wobei ich, wie früher, in ausgiebiger Weise die Darstellung durch Figuren verwende. Diese Figuren sollen für die Probleme siebenten Grades dieselbe Bedeutung beanspruchen, wie die Gestalt des Ikosaeders für die Probleme fünften Grades.

Die hauptsächlichen der hiermit berührten Resultate habe ich bereits früher in zwei Noten veröffentlicht, welche ich am 4. März

und 20. Mai vorigen Jahres der Erlanger Societät vorlegte. Ich zeigte dort ausserdem, dass sich nunmehr die Zurückführung derjenigen Gleichungen siebenten Grades, welche die Gruppe der Modulargleichung haben, auf eben diese Modulargleichung explicite bewerkstelligen lässt (wegen der Problemstellung vergl. Kronecker: „Ueber Gleichungen siebenten Grades“ in den Berliner Monatsberichten von 1858.) Hierauf bin ich in den gegenwärtig vorliegenden Aufsätzen noch nicht eingegangen; ich hoffe demnächst ausführlicher auf diese und verwandte Fragen zurückkommen zu können.

München, den 9. Februar 1879.

F. Klein.

G. Eneström: Differenskalkylens historia. I. (Upsala Universitets Årsscrift 1879. Matematik och Naturvetenskap. I.) Upsala 1878. (4. u. 71 S. 8.

Die ersten Spuren der Differenzenrechnung müssen aus den Untersuchungen über Interpolation, Reihen und Theorie der Differentiale zusammengesucht werden. Newton gab erst 1687 in Philosophia naturalis principia mathematica die allgemeine Interpolationsformel

$$u_x = u_0 + x\Delta u_0 + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 u_0 + \cdots$$
$$+ \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n-1}\Delta^{n-1}u_0$$

als Lösung des Problems: Eine parabolische Curve durch gegebene Punkte zu ziehen. Zwei andere verwandte Formeln finden sich in seiner Methodus differentialis (1711). Etwas später als Newton versuchten auch Hermann, Cotes und Craig das Interpolationsproblem zu lösen. Auf der andern Seite gelang es Leibniz, Montmort und Jakob Bernoulli durch Untersuchungen über die Reihen ein willkürliches Glied durch die Differenzen des ersten Gliedes, oder eine willkürliche Differenz durch die Glieder auszudrücken; freilich muss zugestanden werden, dass die allgemeinen Formeln nicht gegeben sind. Der letztere verdient besonders hier erwähnt zu werden als Erfinder der nach ihm benannten Bernoullischen Zahlen, welche bekanntlich in der umgekehrten Differenzen-

rechnung häufig gebraucht werden. In methodischer Hinsicht ist zuletzt das Hervortreten der Differenzenrechnung durch die Ausbildung der Differentialrechnung wesentlich befördert worden. Dagegen finden sich vor 1715 gar keine Spuren einer Theorie der Differenzengleichungen.

Sehr wenig war also für die Differenzenrechnung gethan, als Taylor (geb. in Edmonton 1685, gest. zu London 1731) seine tiefgehende aber schwer verständliche Methodus incrementorum directa et inversa, 1715 (neue Titelausg. 1717, Aufl. 2 1862) veröffentlichte, welche die erste systematische Darstellung der Differenzenrechnung enthält. Taylor bezeichnet die erste Differenz (incrementum) der variablen Quantität x durch $\underset{\cdot}{x}$, die zweite Differenz durch $\underset{\cdot\cdot}{x}$ oder $\underset{2}{x}$, u. s. w., so dass die n^{te} Differenz ist $\underset{n}{x}$. Die successiven Werthe bezeichnet er durch Accente, so dass, wenn $x = u_z$ ist,

$$\overset{\prime\prime}{x} = u_{z-2}\,,\ \overset{\prime}{x} = u_{z-1}\,,\ x = u_z\,,\ \underset{\prime}{x} = u_{z+1}\,,\ \underset{\prime\prime}{x} = u_{z+2}\,,\ \text{u. s. w.}$$

Die Theorie der endlichen Differenzen wird von Taylor hauptsächlich als eine Theorie der Differenzengleichungen gegeben; lautet ja schon der erste Satz: data aequatione quantitates variabiles involvente invenire incrementa, obgleich er thatsächlich nur enthält, dass

$$\triangle^n u_x = u_{x+n} - n u_{x+n-1} + \cdots\cdots + (-1)^n u_x\,.$$

In den folgenden Sätzen zeigt Taylor, dass

$$\triangle x^{(m)} = m x^{(m-1)}\,,\quad \Sigma x^{(m)} = \frac{x^{(m+1)}}{m+1}$$

$$\triangle x^{(-m)} = -\, m x^{(-m-1)}\,,\quad \Sigma x^{(-m)} = -\frac{x^{(-m+1)}}{m-1}\,,$$

ferner dass, wenn

$$h = \triangle x\,,\quad u_{x+nh} = u_x + n\triangle u_x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\triangle^2 u_x + \cdots + \triangle^n u_x$$

und

$$u_{x+h} = u_x + \frac{h}{1}\frac{du_x}{dx} + \frac{h^2}{1\cdot 2}\frac{d^2u_x}{dx^2} + \cdots\,.$$

Noch beweist er, dass eine Differenzengleichung nothwendiger Weise ein Integral haben muss, und dass das allgemeine Integral einer Differenzengleichung r^{ter} Ordnung r arbiträre Constante hat, giebt einige specielle Integrationsmethoden und wendet die Differenzenrechnung auf Summirung, Interpolation und Bestimmung gewisser Coefficienten an. Für die nähere Formulirung dieser und

der übrigen Sätze **Taylors** verweise ich auf die Abhandlung; ich erwähne nur, dass **Taylor** bei der Coefficiëntenbestimmung die Gleichungen

$$u_{x+1} = (2x+1)u_x,$$
$$u_{x+1} = (2x+1)u_x + (x+1)u_x$$

integrirt, und dass seine Methode auf die allgemeine Gleichung

$$u_{x+1} = A_x u_x + B_x$$

angewendet werden kann.

Weitere Beiträge zur Differenzenrechnung giebt **Taylor** in Philosophical Transactions 1717 und in Moivres Miscellanea Analytica; zwar zeigt er auf der letzten Stelle nur eine sehr specielle Integrationsmethode an. Dagegen hat er in Philosophical Transactions 1717 ein neues Zeichen eingeführt; ihm ist nämlich

$$|x| = \Sigma x$$

und allgemein

$$^n[x] = \Sigma^n x.$$

Ferner hat er hier noch die gewöhnlichen Ausdrücke für

$$\triangle(u_x v_x),\ \triangle^n(u_x v_x),\ \Sigma(u_x v_x),\ \Sigma^n(u_x v_x),\ \Sigma^n a^x \text{ und } \Sigma a^x \varphi(x)$$

hergeleitet.

Dies alles hat **Taylor** also zur Ausbildung der Differenzenrechnung geleistet. Die Fehler seiner Darstellung sind dagegen, dass er die Differenzenrechnung in allzu nahe Beziehung zur Differentialrechnung gebracht hat, und dass seine Bezeichnung sehr unbequem, seine Ausdrucksweise sehr dunkel und schwerverständlich ist. Aber dennoch ist sein Verdienst um die Differenzenrechnung so gross, dass beinahe ein halbes Jahrhundert verging, ehe dieselbe weiter geführt ward, und wenn einige Verfasser **Nicole** als Miterfinder der Differenzenrechnung nennen, so beweist dies nur, dass sie die Schriften **Taylors** nicht gelesen oder nicht verstanden haben.

Die zweite noch nicht erschienene Abtheilung behandelt die Geschichte der Differenzenrechnung bis zu **Laplace** und **Condorcet**; die zwei noch folgenden Abtheilungen werden die Ausbildung derselben bis auf unsere Zeit verfolgen.

G. Eneström.

R. Beez: Ueber das Riemann'sche Krümmungsmass höherer Mannigfaltigkeiten. (Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. XXIV, S. 1—17, 65—82.)

Die epochemachende Schrift B. Riemann's: „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" hat durch die von H. Weber und R. Dedekind in den gesammelten Werken Riemann's zum ersten Male veröffentlichte Abhandlung: „Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab illustrissima Academia Parisiensi propositae" eine wichtige Ergänzung und in analytischer Beziehung einen höchst befriedigenden Abschluss erhalten. Obwohl diese Arbeit nämlich in der Hauptsache von isothermen Linien in einem erwärmten unbegrenzten Körper handelt, so enthält sie doch im zweiten Theil einen rein mathematischen Excurs mit der Ueberschrift: „De transformatione expressionis $\Sigma_{\iota\iota'} b_{\iota\iota'} ds_\iota ds_{\iota'}$, in formam datam $\Sigma_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'} dx_\iota dx_{\iota'}$, welcher in knappester Form die Frage erörtert, wann es möglich sei, die wesentlich positive quadratische Form $\Sigma b_{\iota\iota'} ds_\iota ds_{\iota'}$ der n Differentiale ds_1, ds_2, $\cdots$ ds_n, bei welcher die Coefficienten $b_{\iota\iota'}$ Functionen der n Variabelen s_1, s_2, $\cdots$ s_n sind, in die quadratische Form $\Sigma_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'} dx_\iota dx_{\iota'}$ von ebenso viel Differentialen dx_1, dx_2, $\cdots$ dx_n zu verwandeln, bei welcher die Coefficienten a_{ik} constant und eventuell der Einheit gleich sind. Die Bedingung für die Möglichkeit dieser speciellen Transformation wird dahin bestimmt, dass die Coefficienten $b_{\iota\iota'}$ nebst ihren ersten und zweiten Derivirten der Gleichung

$$\text{I)} \quad \frac{\partial^2 b_{\iota\iota''}}{\partial s_{\iota'} \partial s_{\iota'''}} + \frac{\partial^2 b_{\iota'\iota'''}}{\partial s_\iota \partial s_{\iota''}} - \frac{\partial^2 b_{\iota\iota'''}}{\partial s_{\iota'} \partial s_{\iota''}} - \frac{\partial^2 b_{\iota'\iota''}}{\partial s_\iota \partial s_{\iota'''}}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\nu\nu'} (p_{\nu\iota'\iota'''} p_{\nu'\iota\iota''} - p_{\nu\iota\iota'''} p_{\nu'\iota'\iota''}) \frac{\beta_{\nu\nu'}}{B} = 0,$$

in welcher

$$p_{\iota\iota'\iota''} = \frac{\partial b_{\iota\iota'}}{\partial s_{\iota'}} + \frac{\partial b_{\iota\iota}}{\partial s_{\iota'}} - \frac{\partial b_{\iota'\iota''}}{\partial s_\iota}$$

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ b_{n1} & & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\beta_{\nu\nu'} = \frac{\partial B}{\partial b_{\nu\nu'}},$$

gesetzt ist und sämmtliche ι und ν die Zahlenreihe 1, 2, $\cdots$ n durchlaufen, identisch genügen müssen. Schreibt man die linke

Seite der Gleichung I) zur Abkürzung $(\iota\iota'\iota''\iota''')$, so lässt sich in dem allgemeinen Falle, dass die Coefficienten $b_{\iota\iota'}$ und ihre ersten und zweiten Derivirten die Gleichung I) nicht befriedigen, ein zu der quadratischen Form $\Sigma_{\iota\iota'} b_{\iota\iota'} ds_\iota ds_{\iota'}$ covarianter Ausdruck

A) $$\delta^2 \Sigma b_{\iota\iota'} ds_\iota ds_{\iota'} - 2 d\delta \Sigma b_{\iota\iota'} ds_\iota \delta s_{\iota'} + d^2 \Sigma b_{\iota\iota'} \delta s_\iota \delta s_{\iota'}$$

aufstellen, welcher, wenn man die Variationen der zweiten Ordnung d^2, $d\delta$, δ^2 so bestimmt, dass die Gleichungen stattfinden:

$$\delta' \Sigma b_{\iota\iota'} ds_\iota \delta s_{\iota'} - \delta \Sigma b_{\iota\iota'} ds_\iota \delta' s_{\iota'} - d \Sigma b_{\iota\iota'} \delta s_\iota \delta s_{\iota'} = 0$$

$$\delta' \Sigma b_{\iota\iota'} ds_\iota ds_{\iota'} - 2 d \Sigma b_{\iota\iota'} ds_\iota \delta' s_{\iota'} = 0$$

$$\delta' \Sigma b_{\iota\iota'} \delta s_\iota \delta s_{\iota'} - 2 \delta \Sigma b_{\iota\iota'} \delta s_\iota \delta' s_{\iota'} = 0,$$

in die ebenfalls covariante quadrilineare Form

II) $$\Sigma(\iota\iota'\iota''\iota''')(ds_\iota \delta s_{\iota'} - ds_{\iota'} \delta s_\iota)(ds_{\iota''} \delta s_{\iota'''} - ds_{\iota'''} \delta s_{\iota''})$$

übergeht. Wenn daher die quadratische Form $\Sigma b_{\iota\iota'} ds_\iota ds_{\iota'}$ durch die Substitution neuer Variabeln x in die quadratische Form

$$\Sigma a_{\iota\iota'} dx_\iota dx_{\iota'}$$

transformirt wird, so geht auch die aus der ersteren abgeleitete quadrilineare Form II) in die aus der zweiten abgeleitete entsprechende quadrilineare Form über. Sollen im speciellen Falle die Coefficienten $a_{\iota\iota'}$ ohne Ausnahme constant sein, so verschwinden sämmtliche Coefficienten der zweiten quadrilinearen Form. Dies aber zieht das identische Verschwinden der ersten quadrilinearen Form nach sich, was wiederum nur dann eintreten kann, wenn sämmtliche Coefficienten $(\iota\iota'\iota''\iota''')$ identisch Null werden.

Die im Vorstehenden notirten Resultate — bis auf das von Riemann gegebene Schema A) zur Bildung der quadrilinearen Covariante II) hat unabhängig von Riemann auch Lipschitz gefunden und in seiner vom 4. Januar 1869 datirten berühmten Abhandlung „Untersuchungen im Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen“ in Borchardt's Journal Bd. 69 veröffentlicht. Aus einer neueren Abhandlung desselben Verfassers: „Bemerkungen zu dem Princip des kleinsten Zwanges“, Borch. J. Bd. 82, erfahren wir aber ferner, dass ihm auch der Umstand, auf welchem der eigenthümliche Algorithmus Riemanns beruht, bereits seit einigen Jahren bekannt war und dass man von seinen Formeln ohne Schwierigkeit zu dem Riemann'schen Schema A) gelangen könne.

Wenn trotzdem der Ref. in der obigen Abhandlung — allerdings gestützt auf die Lipschitz'schen Arbeiten — eine directe Verification der Riemann'schen Form A) unternommen hat, so ist dies aus dem

Grunde geschehen, weil dieselbe ungleich leichter sich bewerkstelligen lässt als die Ableitung der Lipschitz'schen Gleichung 37), Borch. J. Bd. 72 S. 16, beziehentlich der Gleichung 74ᵃ Bd. 70 p. 99, aus welchen Lipschitz den Riemann'schen Ausdruck A) deducirt. Diese Verification nebst dem Beweis, dass die Coefficienten $(\iota\iota'\iota''\iota''')$ nicht unabhängig von einander verschwinden, auch wenn die Form $\Sigma b_{\iota\iota'} ds_\iota ds_{\iota'}$ von n Differentialen nicht aus einer Form Σdy_ι^2 von $n+1$ Differentialen mit Zuhilfenahme einer Gleichung

$$f(y_1 y_2 \cdots y_{n+1}) = 0$$

entstanden ist — was Lipschitz in seinem „Beitrag zur Theorie der Krümmung", Borch. J. Bd. 81 S. 240 in Zweifel zieht — bilden den Inhalt des zweiten und dritten Abschnitts der obigen Abhandlung, nachdem im ersten die Ableitung der Gleichung I) ausführlich reproducirt worden ist.

Der vierte Abschnitt handelt von der Beziehung der quadrilinearen Covariante II) zum Gauss'schen Krümmungsmass. Riemann nimmt ohne jegliches Bedenken an, dass auch wenn die Form II) nicht verschwindet, der Ausdruck

$$\text{III)} \qquad -\frac{1}{2}\frac{\Sigma(\iota\iota'\iota''\iota''')(ds_\iota \delta s_{\iota'} - ds_{\iota'}\delta s_\iota)(ds_{\iota''}\delta s_{\iota'''} - ds_{\iota'''}\delta s_{\iota''})}{\Sigma b_{\iota\iota'} ds_\iota ds_{\iota'} \Sigma b_{\iota\iota'} \delta s_\iota \delta s_{\iota'} - (\Sigma b_{\iota\iota'} ds_\iota \delta s_{\iota'})^2}$$

das Krümmungsmass einer Fläche bedeute, deren Linearelement in einem Raume von n Dimensionen durch $\sqrt{\Sigma b_{\iota\iota'} ds_\iota ds_{\iota'}}$ gegeben sei und welche sich so umbiegen lasse, dass sie in unseren Anschauungsraum hineinfalle. Diese Fläche würde erhalten, wenn man vom Punkte $s_1, s_2 \cdots s_n$ alle kürzesten Linien ziehe, in deren Anfangselementen die Variationen der s in dem Verhältniss:

$$\alpha ds_1 + \beta\delta s_1 : \alpha ds_2 + \beta\delta s_2 : \cdots : \alpha ds_n + \beta\delta s_n$$

stehen, worin α und β unabhängige Parameter bedeuten. Man hat also nach Riemann's eigener Angabe es mit Flächen zu thun, welche in einem Raum von n Dimensionen enthalten sind.

Bekanntlich hat aber Gauss sein Krümmungsmass nur für gewöhnliche d. h. solche Flächen entwickelt, welche in einem ebenen Raume von drei Dimensionen liegen und für diese den Satz abgeleitet, dass sie sich beliebig umbiegen lassen, ohne dass ihr Krümmungsmass geändert wird, dass sie also, wenn das Krümmungsmass constant ist, sich mit Biegung in sich selbst verschieben lassen. Eine Ausdehnung dieser Sätze auf gewundene Flächen, d. h. solche Flächen, welche einen Raum von mehr als drei Dimensionen durch-

setzen, ist aber gewiss nicht ohne Weiteres zulässig. Man müsste doch wenigstens für den nächst einfachen Fall, dass nämlich die betrachtete Fläche in einem ebenen Raume von vier Dimensionen enthalten ist — also analytisch durch zwei Gleichungen $f(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$ $\varphi(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$ zwischen vier Variabeln gegeben ist, nachweisen können, dass sich ihr Krümmungsmass auf die Form bringen lasse, welche Gauss im XI. Artikel der disquisitiones circa superficies curvas für die gewöhnliche Fläche aufgestellt hat. Nachdem Ref. schon früher diesen kritischen Punkt der Riemann'schen Krümmungstheorie angedeutet hat (s. Schlömilch Ztschr. f. Math. u. Physik XXI p. 392), glaubt er jetzt den Beweis erbracht zu haben, dass es überhaupt unmöglich ist, die Theorie des Gauss'schen Krümmungsmasses auf gewundene Flächen auszudehnen, da der Osculationsraum derselben — das Analogon der Osculationsebene einer Linie doppelter Krümmung — nicht eindeutig bestimmt werden kann, sondern sich mit der Richtung ändert, in der man von einem Punkt zu einem benachbarten der Fläche fortschreitet.

Zum Schluss gestattet sich Ref. noch eine kurze Bemerkung über die Tendenz seiner Arbeiten. Wenn es sich bei der mathematischen Theorie des Krümmungsmasses lediglich um eine rein analytische Verallgemeinerung handelte, so dass die Bezeichnung „Krümmungsmass" nur ein symbolischer Ausdruck, eine „façon de parler" wäre, wie wenn man in der neuern Geometrie von unendlich entfernten oder imaginären Punkten, Geraden, krummen Linien etc. redet oder wie wenn der Analytiker sich der Sprache der Geometrie bedient, um Sätze, die für Zahlenmannigfaltigkeiten gelten, kurz und so zu sagen anschaulich(!) auszudrücken — dann könnte man ohne Bedenken die Formel III) als das Krümmungsmass der quadratischen Form $\Sigma b_{\iota\iota'} ds_\iota ds_{\iota'}$ bezeichnen. Soll aber die Formel III) als Grundlage für metaphysische Speculationen über den Raum dienen, dann ist es Pflicht der Wissenschaft, bei aller Verehrung für den Genius Riemann's, offen die Haltlosigkeit dieser Interpretation aufzudecken. Dabei erkennt aber Ref. ebenso aufrichtig es als das unbestreitbare Verdienst Riemann's an, dass er der mathematisch-philosophischen Speculation über den Raum durch die Aufstellung des Begriffs eines ebenen Raumes — der in der That ein völlig neuer ist — überhaupt erst die Bahn geöffnet hat. An Riemann also knüpfen die neueren Untersuchungen über den Raum an und wer auch mit denselben gegenwärtig sich beschäftigt — mag er nun zu gleichen Resultaten wie Riemann ge-

langen oder nicht — immer wird er, wenn er ehrlich ist, offen und dankbar bekennen müssen, dass Riemann ihm zu seinen Speculationen den Weg gebahnt hat.

Plauen i. V. R. Beez.

M. Noether: Ueber die Gleichungen 8ten Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Curven 4ter Ordnung. (Mathem. Ann. XV.)

Dieser Aufsatz soll zunächst gewisse, bei der Curve 4ter Ordnung auftretende, aber bisher noch nicht behandelte Kegelschnittsysteme untersuchen. Man kann nämlich die 28 Doppeltangenten so in sieben mal vier zerlegen, dass durch die Berührungspunkte je vier solcher ein Kegelschnitt geht, was, jeder Zerlegung entsprechend, ein System von 7 Kegelschnitten liefert. Nun sind von diesen 7-Systemen 24 · 315 uneigentliche, indem bei denselben je ein Kegelschnitt ausgezeichnet auftritt, aber ausserdem existiren 135 eigentliche Systeme.

Um die Beziehungen dieser letzteren Systeme zu einander und zu anderen Systemen vollständig zu behandeln, mussten zwei verschiedene Theorieen entwickelt werden, die ich indess eingehender, über den unmittelbaren Zweck hinaus, darlege, um sie allgemeiner anwendbar zu machen. Die gewöhnliche Bezeichnungsweise der Doppeltangenten, durch die Paare von 8 Grössen, wie sie nach den Arbeiten von Hesse, Aronhold und Cayley (vgl. Salmon's „höhere Curven") angewandt wird, zeichnet eine der 36 Schaaren von Berührungspunkten 3ter Ordnung vor den übrigen aus. Diese Weise musste daher so ausgebildet werden, dass sie nun für alle Uebergänge zu beliebigen Systemen bequem verwerthbar wird.

Ferner hat die Auszeichnung der einen der 36 Schaaren zur Folge, dass die Gleichung für die Doppeltangenten sich auf eine Gleichung achten Grades reducirt, für welche unser Kegelschnittsystem, wenn man ein solches adjungirt, eine wichtige Resolvente liefert — nämlich eine Gleichung 7ten Grades, deren Wurzeln sich zu Tripeln ordnen. Aber es existiren schon seit lange Untersuchungen über specielle Gleichungen achten Grades; zunächst von Galois, Betti, Kronecker, Hermite über die Modulargleichung 8ten Grades, welche der Transformation 7ter Ordnung der elliptischen Functionen

entspricht. Diese Gleichung hat eine Resolvente 7ten Grades, mit einer Gruppe von 168 Substitutionen; aber die wesentlichste Eigenschaft dieser speciellen Gleichung, die ich bisher nicht ausgesprochen finde, ist wiederum die oben bezeichnete Anordnung der Wurzeln in 7 Tripel. Ferner hat Mathieu die Gleichungen achten Grades behandelt, deren Wurzeln in Quadrupelpaaren geordnet sind: auch diese besitzen die Resolvente 7ten Grades mit der Tripeleigenschaft. Da diese Zusammenhänge bisher nicht klargelegt worden sind, war es nöthig, dieselben zu entwickeln, was durch sehr einfache Betrachtungen geschieht. Es mag dabei bemerkt werden, dass die allgemeinen Gleichungen 7ten Grades mit Tripeleigenschaft eben jene sind, welche, nach neueren Mittheilungen von F. Klein, durch elliptische Functionen gelöst werden können.

Erlangen. **M. Noether.**

Giambattista Biadego: Pietro Maggi matematico e poeta veronese (1809—1854). Verona, H. F. Münster. 1879.

Pietro maggi fu uno dè più distinti matematici italiani del presente secolo (1809—1854). Il suo nome è molto poco conosciuto nella scienza, e però l'A. si è proposto di esporre i suoi lavori che sono molteplici.

La biografia si divide in tre parti: la prima è puramente biografica; la seconda discorre degli scritti scientifici del Maggi; la terza dei suoi lavori letterarii.

La vita del Maggi a un interesse non solo cittadino ma nazionale. Uno dè suoi fratelli morì nelle carceri di Mantova, martire della patria.

Quanto alla sua vita come scienziato deve ricordarsi ch' egli, discepolo del Bordoni d' Pavia, tenne le veci del suo maestro l'ab. Giuseppe Zamboni, il celebre inventore della pila a secco, nella cattedra di Fisica al Liceo di Verona: e che poi fu professore di matematica applicata (meccanica ed idraulica) all' Università di Padova, dove succedette a Carlo Conti di Legnago.

Il Maggi si occupè specialmente di Fisica e di geometria analitica, Trattò le quistioni geometriche che interessano la fisica-matematica.

Il primo suo lavoro è un *Saggio* sulla Teoria delle induzioni elettrodinamiche, nel quale egli diede per primo, sulle orme di Ampère, la teoria di questi fenomeni (1832). In questo lavoro egli formulè quella legge fisica che poscia prese il nome del Lenz, che la dimostrè poco dopo (Poggendorff's Annalen. 31. Bd.).

Ira i molti suoi lavori di fisica va ricordato quello in cui descrive una sua sperienza, mediante la quale dimostrò l'influenza della magnetizzazione sulla conducibilità calorifica del ferro dolce. Egli descrive questa sperienza anche in una lettera al De la Rive inserita nella Biblioth. univ. de Genève to. XIV a. 1850.

I primi suoi lavori geometrici sono l'uno su una nuova maniera di evolute e di evolventi e di un sistema di rette nello spazio. In questo lavoro egli suppone che il filo per mezzo del quale si descrive l'evolvente si fisso ad ambedue i suoi copi: chiama evolventi ed evolute ellittiche questa nuova maniera di curve: e dimostra in questo lavoro il teorema del Dupin che nel sistema di raggi lucidi che ammettono trajettoria ortogonale questa à luogo eziandio dopo un numero qualunque di riflessioni e rifrazioni.

Altro suo lavoro tratta delle linee di stringimento e d'allargamento, e contiene poi alcune applicazioni meccaniche ed idrauliche.

Il Maggi fu Membro Effettivo dell' Istituto Veneto di scienze lettere ed arti, e vi lesse nel 1852 un suo rimarcherale ed importantessimo lavoro sugli avvicinamenti (contatti) di vario ordine dei sistemi a 3 dimensioni. Ira l'altre cose egli dimostra in questo lavoro in forma più generale il teorema del Babinet sulla media fra le curvature d' più linee disegnate in una superficie e passanti per uno stesso punto, nonchè altro da cui deduce quelle del Lamé quando le tre famiglie di superficie sono a vicenda normali esse si tagliano continuamente sulle loro linee di massima e minima curvatura.

Più tardi egli generalizzò il teorema seguente di Joachimsthal (Journ. de Crelle Vol. XXX) „se una linea di curvatura principale d'una superficie sarà piana l'angolo compreso dalla superficie stessa e dal piano che sulla detta linea la può tagliare si serba per tutto il corso di questa invariabile".

La presente biografia che contiene un resoconto dei suoi lavori è pure corredata da una completa bibliografia degli scritti

editi ed inediti. Vi sono pubblicate alcune cose **inedite**, come ad es. alcune lettere e la Prefazione ad un suo **trattato giovanile** sulle sezioni coniche. V' à pure una notizia d'una **sua memoria inedita** in cui combatte i principii di **meccanica molecolare** del Fusinieri.

Verona. G. B. Biadego.

O. Schmitz-Dumont: Die mathematischen Elemente der Erkenntnisstheorie. Grundriss einer Philosophie der mathematischen Wissenschaften. (Berlin. Carl Duncker's Verlag. 1878. XV. 452 S. 8. M. 12.)

Vorliegende Arbeit entstand aus Untersuchungen über die logischen Formen, welche den Formeln der mathematischen Analysis correspondiren, um daraus ein endgültiges Urtheil über die Deutungen zu erlangen, welche diesen Formeln gegeben werden können. Hierzu war eine eingehende Kritik und theilweise neue Feststellung der mathematischen Grundbegriffe nothwendig, was seinerseits wieder ein Zurückgehen auf die Elemente der Begriffbildung überhaupt und demgemäss eine neue Grundlegung der gesammten Erkenntnisstheorie erforderte. Als Ausgangspunkt hierzu diente die Thatsache, dass überhaupt Etwas existirt, welche Thatsache in dem Gegensatz „Denken — Empfinden" formulirt wurde, entgegen dem in der Logik gewöhnlich üblichen Gegensatz „Denken — Sein"; alle von der gewöhnlichen Entwickelung der Erkenntnisstheorie hier als verschieden gefundenen Resultate sind reine Consequenzen jenes als Leitprinzip benutzten Gegensatzes. Als Gesammtresultat der logisch metaphysischen Untersuchungen in den Abtheilungen A und E und der mathematischen in B, C, D ergab sich der strenge Beweis des von Leibnitz aufgestellten, von den neueren Philosophen und Mathematikern bestrittenen Satzes, dass alle mathematischen Disciplinen incl. der Mechanik, sowohl ihren Grundbegriffen wie Combinationen nach aus dem Identitätsatze als einzigem Denkgesetze abgeleitet werden können, ohne irgend eine specifische Erfahrung zu Hülfe zu nehmen. Zur Bestätigung des Beweisverfahrens dienen verschiedene neue mathematische Resultate, welche sich auf höchst einfache Weise und ungesucht aus dem Grundprincip ergeben.

In Abtheilung *B.* Arithmetik, ergiebt dies Princip, dass alle combinatorischen Gebilde des Denkactes, sowohl in ihrer einfachsten Gestalt als Zahlen, wie auch in den verwickeltsten analytischen Formeln, einer zwiefachen Betrachtungsweise zugänglich sind, nach dem Begriff der Quantität und dem der Qualität; und dass diese zwei Betrachtungsweisen nothwendig sind, wenn man alle bei den analytischen Formeln zulässigen Deutungen finden will. Es wird gezeigt, dass die qualitative Betrachtung heute schon bei vielen mathematischen Untersuchungen versteckterweise ausgeführt wird, dass sie aber zu einem allgemeinen Princip erhoben werden muss, wenn sie ihre ganze Fruchtbarkeit entfalten soll, und dass damit zugleich alle metamathematischen Unbegreiflichkeiten verschwinden. Es ergiebt sich eine allgemein logische Interpretation der Imaginärformen, woraus die Fundamentalsätze der Gleichungen als einfache Corollare hervorgehen. Als ein Resultat der qualitativen Zahlbetrachtung zeigt sich, dass nur Complexe von 2, 3 und 4 Einheiten eine eindeutige Vertauschbarkeit ihrer Elemente besitzen können, und dass die Unlösbarkeit einer allgemeineu Gleichung von höherem Grade als dem vierten auf demselben logischen Grunde beruht wie die Undenkbarkeit eines Raumes von mehr als drei zueinander senkrechten Richtungen. Der ausgedehnteste Gebrauch qualitativer Betrachtungsweise wird in der Infinitesimalrechnung gemacht, demzufolge Formenrechnung genannt, weil die Hauptbedeutung derselben von der Form der analytischen Ausdrücke abhängt und nicht von der Grösse der hier gebrauchten Factoren. Hierdurch wird eine Entwickelung der Differenzenmethode ermöglicht, welche die Begriffe des Unendlichkleinen und -Grossen als unnöthig und alogisch principiell ausschliesst, ohne bei irgend einer Anwendung der Analysis zu versagen.

In Abtheilung *C.* Geometrie, wird die denknothwendige Ableitung der Begriffe „Grösse der Ausdehnung, Richtung der Ausdehnung“ gegeben, wodurch das Euklidische Parallelenaxiom sich in eine Nominaldefinition verwandelt. Aus dieser genauen Definition des Richtungsbegriffes folgt ein arithmetischer Beweis der Dreidimensionalität des Raumes, d. h.: das zu Betrachtungen der Lage nothwendige Continuum, dessen eine Geometrie überhaupt zur Aufnahme ihrer Gebilde bedarf, kann nur 3 dimensionale Unterscheidungen zulassen. Die Ursache der neueren metamathematischen Speculationen stellt sich dabei heraus als: die nicht erkannte oder beachtete Vieldeutigkeit mehrerer analytischer Symbole. Dieselbe

Ursache erweist auch die Unvollkommenheit der Euklidischen Methode bei Aufstellung der Sätze über Congruenz. Dem gegenüber wird hier eine streng logische Definition der Congruenz gegeben, wodurch die symmetrischen Figuren als incongruent sich herausstellen, und die geometrischen Paradoxien symmetrischer Körper verschwinden. Weiterhin wird gegeben eine philosophische Deutung des Princips der Dualität, der Osculationen, und im Anschluss an das arithmetisch Imaginäre eine generelle und rein logische Interpretation des geometrisch Imaginären, woraus sich dessen Bedeutung für die analytische Behandlung mechanischer Probleme ergiebt.

Ebenso wie durch die Lösung des Raumproblems die Geometrie, so werden durch Analyse der Begriffe „Masse, Bewegung, Kraft“ die Betrachtungen der Mechanik in die allgemeine Logik eingeführt. Bewegung ergiebt sich dabei als Quotient von Zeit und Raum, Masse als Zahlfactor, und der Kraftbegriff der reinen Mechanik als die einfach logische Beziehung von Masse und Bewegung, die eben deshalb nur eine eindeutige sein kann, nicht verschiedene Arten von Kraft zulässt; die empirischen Kräfte dagegen sind verschiedene oft irrthümliche Anwendungen dieses rein logischen Kraftbegriffes auf Einzelreihen von Erscheinungen, denen wir, zuweilen mit Recht, zuweilen mit Unrecht, eine gemeinsame Natur zuschreiben. Dadurch werden die sogenannten Principien der Mechanik als rein logische Sätze erwiesen, die ihren Schein von Empirismus nur durch das mangelhafte Verständniss der ihnen zu Grunde liegenden Begriffe, speziell durch die nicht ausgeführte Trennung des logischen (Kraft-)Functionalbegriffes von seinen empirischen Anwendungen erhielten.

Die weitere Entwickelung dieser Sätze führt sodann (Abtheilung *E*) zu einer atomistischen Theorie von absoluter Einfachheit, oder wie man zu sagen pflegt, zu einer Construction der Körperwelt mit Hülfe einer einzigen Kraft oder Stoffart. Diese Theorie erweist sich also fähig, die bisherigen allgemein anerkannten Spezialerklärungen der Physik in sich aufzunehmen, und lässt ausserdem noch einen grossen Spielraum für neue Constructionen; die hier gegebenen beanspruchen nur das Stadium eines ersten Versuches.

O. Schmitz-Dumont.

F. Folie: Eléments d'une théorie des Faisceaux, par F. Folie, administrateur-inspecteur de l'université de Liége, chargé du cours de géométrie supérieure, membre de l'académie de Belgique. Liége, A. Decq, libraire.

Die wichtigsten, in diesem Werke enthaltenen Sätze, sind folgende. Wir geben sie nur für die Curven dritter Ordnung an, obgleich sie in dem Werke bis auf die fünfte ausgedehnt sind, und sich noch weiter ausdehnen lassen. Die correlativen Sätze für die Curven dritter Classe wird man gleich aus den ersteren ableiten können.

Vermittelst dieser Sätze wird man eine, durch neun Punkte bestimmte Curve dritter Ordnung, sehr einfach beschreiben können. Die Auflösung ist doch in dem, ganz theoretischen, Werke nicht enthalten.

I. *Pappus'scher Satz. Sind zwei conjugirte Dreiseite einer Curve* 3ter *Ordnung eingeschrieben*), so sind die Producte der Abstände eines beliebigen Punktes der Curve von den Seiten eines jeden Dreiseit analogisch**).*

II. *Desargues'scher Satz. In demselben Falle schneidet eine beliebige Gerade die Curve und die Seiten der beiden Dreiseite in drei ternen Punkten der Involution.*

III. *Pascal'scher Satz. In einem Systeme von zwei, einer Curve* 3ter *Ordnung conjugirten Vierseiten, begegnen sich die vier Paare entgegengesetzter Seiten in vier Punkten, welche auf derselben Geraden liegen.*

IV. *Satz. Wenn man drei mit drei, in beliebiger Ordnung, die Paare entgegengesetzter Seiten von zwei, einer Curve* 3ter *Ordnung conjugirten Vierseiten zusammensetzt, so bekommt man ein Pascal'sches Hexagon.*

V. *Satz. In einem System von zwei einer Curve* 3ter *Ordnung conjugirten n Seiten schneiden sich die Paare nicht adjacenter Seiten in* $n(n-3)$ *Punkten, welche auf einer Curve* $(n-3)^{ter}$ *Ordnung liegen.*

VI. *Satz. Anharmonische Eigenschaft* 3ter *Ordnung. Wenn man einen beliebigen Punkt einer Curve* 3ter *Ordnung mit den Ecken von zwei derselben conjugirten Dreiseiten verbindet, so ist das anharmonische Verhältniss des gebildeten Strahlbüschels constant; und dieses Verhältniss ist gleich demjenigen der Abstände zwischen den Durchschnittspunkten der Strahlen mit einer beliebigen Geraden.*

*) Siehe Fondements d'une géométrie supérieure Cartésienne, par F. Folie.
**) Ibid.

Der Ausdruck dieses anharmonischen Verhältnisses 3ter Ordnung ist folgender, wenn man die sechs Strahlen mit 1 ⋯ 6 und den Sinus der, zwischen den Strahlen 1 und 2, u. s. w., enthaltenen Winkel mit (12), u. s. w. bezeichnet:

$$r_3 = \frac{(12)\cdot(34)\cdot(56)}{(61)\cdot(23)\cdot(45)},$$

welcher Ausdruck einfacher geschrieben wird:

$$r_3 = (1\,2\,3\,4\,5\,6)\,.$$

VII. *Satz.* In demselben Falle, wie im Satze VI *ist auch das Verhältniss des Productes der Sinusse der im ersten Dreiseit, von seinen Seiten ab bis zu den anstossenden Strahlen gerechneten Winkel, mit dem Producte der Sinusse der in dem zweiten Dreiseit ebenso gerechneten Winkel eine constante Grösse.*

VIII. *Satz. Evolutorische Eigenschaft.*
Wenn ein vollständiges Vierseit einer Curve 3ter Ordnung eingeschrieben ist, und man zieht durch drei beliebige Ecken desselben die Tangenten der Curve, so schneidet eine beliebige Gerade die Seiten der beiden, durch diese drei Ecken und diese drei Tangenten bestimmten Dreiecke, in 3 Paaren Punkten der Evolution;

das heisst, wenn diese 3 Paare Punkte mit 1 ⋅⋅ 3, 1′ ⋅⋅ 3′ bezeichnet werden: $12'\cdot 23'\cdot 31' = +\, 1'2\cdot 2'3\cdot 3'1\,.$

Derselbe Satz gilt auch, wenn das eine Dreieck einem Kegelschnitte eingeschrieben, und das andere durch seine Ecken umgeschrieben ist. — Ferner findet man in dem erwähnten Buche eine vorläufige Forschung über die Involution und das anharmonische Verhältniss 3ter Ordnung, so z. B. den Ausdruck der ersteren mittelst des zweiten:

$$(1\,1'21''31''')\cdot(12'22''32''')\cdot(13'23''33''') = -1\,, \quad \text{u. s. w.}$$

F. Folie.

Friedrich Polster: Geometrie der Ebene (Planimetrie) bis zum Abschlusse der Parallelen-Theorie. (Würzburg 1877/78. Staudinger.) (Auszug aus dem Vorworte.)

In einem Artikel über „Parallelen-Theorie", welcher in dem 8. Hefte des XIII. Bandes der „Blätter für das Bayerische Gymnasial- und Realschulwesen" i. J. 1877 erschienen ist, habe ich ge-

zeigt, dass die Geometrie bei unbedingter Nebeneinanderstellung des 8. und des 9. Axioms Euklid's nicht in sich widerspruchsfrei sei, wenn Euklid's Beschränkung auf Raumgrössen von vollständiger Begrenzung aufgehoben wird, wie es dem neueren Standpunkte der Geometrie entspricht. Demnach ist die unvermittelte Nebeneinanderstellung der beiden citirten Axiome unvereinbar mit Bertrand's Definition des Winkels. Daher habe ich in dem allegirten Artikel eine andere Fassung des 9. Axioms Euklid's vorgeschlagen, durch deren Anerkennung jeder Widerspruch auf dem neueren Standpunkte der Geometrie ausgeschlossen wird.

Da ich Euklid's Definition des Winkels für unfruchtbar halte, so habe ich mich der Definition Bertrand's angeschlossen, durch welche mit Hilfe der modificirten Fassung des 9. Axioms das 11. Axiom Euklid's (oder ein Aequivalent desselben) als Axiom entbehrlich, als Theorem streng beweisbar wird.

Mein „Versuch einer Parallelen-Theorie“ fällt in eine Zeit, welche in Folge der Vergeblichkeit zahlreicher Versuche, besonders der hervorragendsten, von berühmten Mathematikern der neueren Zeit (wie Bertrand und Legendre) unternommenen Versuche, die 2000 Jahre alte Lücke in der Parallelen-Theorie auszufüllen und dadurch die sogenannte „crux geometrica“ aus der Welt zu schaffen, in vielen Fachkreisen eine gewisse Resignation gereift hat, so dass ihnen im Sinne von Gauss die absolute Aussichtslosigkeit aller hierauf gerichteten Bestrebungen als Dogma gilt. Dass ich als ein Mann ohne Namen in der Wissenschaft durch diesen ungünstigen Umstand von meinem Versuche nicht abgeschreckt worden bin, verdanke ich der mich beherrschenden Ueberzeugung, dass in der Wissenschaft eine selbst von der grössten wissenschaftliche Autorität approbirte Resignation keine Berechtigung habe, weil sie den Fortschritt der Wissenschaft hemme, und dass es im Interesse der Wissenschaft ihrem geringsten Anhänger nicht verwehrt sein dürfe, seinen Versuch zu ihrer Förderung beizutragen.

Seit der Veröffentlichung des allegirten Artikels ist mir ein Einwand gegen meinen Versuch einer Parallelen-Theorie nicht bekannt geworden. So lange ein begründeter Einwurf hiegegen nicht erhoben wird, bin ich wohl befugt, diesen Versuch als gelungen zu erachten.

Wenn meinė Discussion in dem allegirten Artikel das Richtige getroffen hat, so ist implicite der Standpunkt der sogenannten „Pangeometrie“ überwunden, welcher, auf der Grundlage der Resignation

erwachsen, in der jüngsten Zeit vorzugsweise als streng wissenschaftlich gegolten hat.

In gewissem Sinne haben durch meine Parallelen-Theorie diejenigen Mathematiker nicht Unrecht erhalten, welche die weit verbreitete Ueberzeugung getheilt haben, dass der Parallelen-Theorie ohne Annahme eines besonderen Axioms, über dessen Form die Ansichten auseinander gegangen sind, eine in sich logisch geordnete Behandlung niemals zu Theil werden könne. Der Kern ihrer Intention, dass bei Aufhebung des 11. Axioms Euklid's mit denjenigen von den übrigen Axiomen desselben, welche heute noch als solche allgemein anerkannt werden, in der überlieferten Form unmöglich auszukommen sei, ist durch meine Theorie acceptirt. Nur wird man überrascht sein, dass sich die Sache einfacher gestaltet hat, als man wohl gedacht haben mag. Eine präcisere Fassung eines dieser Axiome, welche sich (selbst abgesehen von der Parallelen-Theorie) unentbehrlich gezeigt hat zur Vermeidung von Widersprüchen, reicht für die Parallelen-Theorie aus, was gewiss vom wissenschaftlichen Standpunkte aus, welcher ein Minimum von Axiomen erheischt, allgemein befriedigen wird.

Würzburg. Friedrich Polster.

P. Mansion: (Deux) Leçons d'analyse infinitésimale. (Gand. Hoste. 1876. 32 p. in-8⁰.)

Elementary Demonstration of a Fundamental Principle of the Theory of Functions. (From the Report of the British Association for the Advancement of Sciences for 1876.) $1\frac{1}{2}$ page in-8⁰.

Elementary demonstration of Taylor's Theorem for Functions of an imaginary Variable. (From the Messenger of Mathematics, New Series, No. 86, June 1878). $2\frac{1}{2}$ pages in-8⁰.

Résumé du cours d'analyse infinitésimale de l'université de Gand (Objet et méthode de l'analyse infinitésimale. Principes fondamentaux). (Gand. Hoste. 1877. 32 pages in-8⁰.)

Note sur quelques principes fondamentaux d'analyse. (Sera publié dans le t. III des Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1879.) Bruxelles, F. Hayer. 8 pages in-8⁰.

Ces divers écrits contiennent, sous une forme plus rigoureuse que la plupart des Manuels élémentaires, un exposé des principes

fondamentaux de l'analyse infinitésimale. Voici les principales matières traitées dans ces opuscules et notes.

1. L'analyse élémentaire a pour objet l'étude des fonctions rencontrées dans les éléments, c'est-à-dire, les fonctions algébriques rationnelles ou exprimables par radicaux, les fonctions exponentielles et logarithmiques et les fonctions circulaires, *que la variable indépendante soit réelle ou imaginaire.* 2. L'analyse infinitésimale se distingue de l'analyse algébrique, qui étudie les mêmes fonctions, en ce qu'elle emploie comme principal procédé d'investigation la méthode des limites ou la méthode infinitésimale, qui est équivalente. 3. Exposé des principes de la méthode des limites en admettant *explicitement,* comme point de départ, le postulat fondamental: *une quantité toujours croissante a une limite finie ou infinie* (c'est-à-dire, que la quantité inverse a pour limite zéro, toutes les expressions où entre le mot infini ayant un sens conventionnel). Limite d'une fonction élémentaire quelconque de quantités variables: elle s'obtient en remplaçant les variables par leurs limites, sauf si l'on est conduit ainsi à une forme indéterminée. Limite de $[\sin x : x]$, $[l(1+x):x)$ pour $x=0$. 4. Principe de substitution des infiniment petits ou méthode infinitésimale (d'après *Duhamel*). 5. Définitions et propriétés des fonctions hyperboliques, des exponentielles imaginaires, des logarithmes imaginaires etc., sans l'emploi des séries: si $z=x+yi$, $e^z=e^x(\cos x+i\sin y)$, par définition. Démonstration élémentaire du théorème: $\lim\ [(e^z-1):z]=1$, si $\lim\ z=0$, même quand $(y:x)$ n'a pas de limite. 6. Continuité des fonctions. Théorème de Cauchy: Une fonction d'une variable réelle, continue entre deux valeurs, passe par toutes les valeurs intermédiaires. Théorème de Heine: Une fonction fx continue de x_0 à X l'est *également* entre ces limites. Ce théorème est indispensable pour établir rigoureusement les principes du calcul intégral. 7. Dérivée: définition dans le cas ordinaire, puis quand la fonction ou la variable deviennent infinies. Démonstration élémentaire et rigoureuse du théorème: Si une fonction a une dérivée unique et égale à une constante a, cette fonction est de la forme $ax+b$, b étant une constante; cas où $a=0$. 8. Les démonstrations ordinaires de la formule

$$\frac{dF(u,v)}{dx}=\frac{\delta F}{\delta u}\frac{du}{dx}+\frac{\delta F}{\delta v}\frac{dv}{dx},$$

contiennent un postulat, que l'on peut éviter en démontrant successivement cette formule pour toutes les fonctions composées consi-

dérées en analyse élémentaire. 9. La limite de $Sf(x)\Delta x$, de x_0 à X, est une quantité parfaitement déterminée, quelque soit le mode de subdivision de l'intervalle de x_0 à X, pourvu que $f(x)$ soit continue, (ou même discontinue de manière les produits $f(x)\Delta x$, là ou elle est discontinue, aient une somme indéfiniment décroissante) (d'après *Cauchy*). Extension aux limites de sommes doubles ou triples. Intégrales. 10. La démonstration ordinaire de la formule

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{x_0}^{x} f(x, \alpha)\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{df(x, \alpha)}{d\alpha}\,dx$$

n'est pas rigoureuse, même si x_0, X sont finis, et $f(x, \alpha)$ fonction continue de x et de α. 11. Principes fondamentaux de la théorie des séries; théorème de *Riemann* (*Werke*, p. 221), avec des exemples élémentaires; conditions pour qu'une série soit intégrable (d'après *Darboux*). Distinction entre les caractères de convergence

$$\text{Lim}\,[\lim\,(u_{n+1} + \cdots + u_{n+p})_{p=\infty}]_{n=\infty}$$

la limite pour $p = \infty$ étant prise avant la limite pour $n = \infty$, et

$$\lim\,(u_{n+1} + \cdots + u_{n+p})_{p=\infty\,,\; n=\infty}$$

p et n croissant indéfiniment en même temps. Le premier caractère est nécessaire et suffisant, le second nécessaire, pour que $u_1 + u_2 + u_3 +$ etc. soit une série convergente. 12. Théorème de Rolle ou théorèmes équivalents de Lagrange et de Cauchy:

$$\frac{\Delta Fx}{\Delta x} = F'(x + \vartheta\Delta x), \quad \frac{\Delta Fx}{\Delta fx} = \frac{F'(x + \vartheta\Delta x)}{f'(x + \vartheta\Delta x)}, \quad 0 < \vartheta < 1\,.$$

Le théorème de Rolle peut se démontrer, par la méthode qui sert à établir la proposition fondamentale du No. 7, base du calcul intégral. Cela provient de ce que le théorème de Rolle est équivalent à cette proposition fondamentale, écrite sous la forme

$$Fx - Fx_0 = \lim \overset{x}{\underset{x_0}{S}} F'x\Delta x.$$

Les théorèmes de Rolle, de Lagrange, de Cauchy sont la traduction de cette proposition géométrique: *Si une courbe AIB, continue entre les points A et B, et dont la tangente s'infléchit d'une manière continue entre ces points est coupée par la sécante AB, il y a un point intermédiaire I où la tangente est parallèle à AB.* 13. Le théorème de Rolle s'étend sans peine aux fonctions d'une variable imaginaire. On trouve ainsi

$$FZ - Fz_0 = \lim \overset{Z}{\underset{z_0}{S}} F'z\delta z = R[(Z - z_0)F'z_1] + I[(Z - z_0)F'z_2],$$

en posant $\alpha = R(\alpha + \beta i)$, $\beta i = I(\alpha + \beta i)$, et z_1, z_2 étant tels que $z_1 = z_0 + \vartheta_1 (Z - z_0)$, $z_2 = z_0 + \vartheta_2 (Z_1 - z_0)$, $0 < \vartheta_1$ ou $\vartheta_2 < 1$. 14. Par le procédé de *Cox*, le variable étant réelle ou imaginaire, on déduit du théorème précédent, celui de Taylor avec les formes du reste de Lagrange, de Cauchy, de Schlömilch, de Darboux, de Falk et de Laplace. 15. On peut trouver ainsi, même en ne s'appuyant que sur le lemme géométrique du no. 13, les développements en série infinie de e^z, $\log(1 + z)$, $(1 + z)^m$, chaque fois qu'ils existent. 16. Dans la discussion du reste

$$r_n = \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdots n} F^n(\vartheta x)$$

de Lagrange, quand x est réel, il ne suffit pas de prouver que $F^n x$, a une limite finie, quand n croit indéfiniment, x *étant donné*, pour que $\lim r_n = 0$; en effet, $F^n(\vartheta x)$, où ϑx est fonction de n, pourrait avoir, pour $n = \infty$, une limite différente de celle de $F^n x$, pour n'importe quelle valeur de x.

Elemente der Theorie der Determinanten mit vielen Uebungsaufgaben. Leipzig, B. G. Teubner. 1878. VI u. 50 S.

Sur l'élimination. (Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris, t. LXXXVII, p. 975—978; 16 décembre 1878.)

Le premier de ces deux écrits est la traduction, revue et corrigée, de l'opuscule annoncé, page 41 du tome I[er] du *Repertorium*. Cette traduction a été faite par le Dr. *Horn* de Munich, et le Professeur *S. Günther* a bien voulu en surveiller l'impression et ajouter une préface et quelques exercices. L'édition allemande diffère de l'édition française en ce qu'elle contient beaucoup plus d'exercices et une discussion, d'après *Rouché*, d'un système d'équations linéaires. Nous signalons à ce propos, une petite faute que nous avons oublié d'indiquer dans les Errata. A la page 41, ligne 23, après *R*, il faut ajouter: (no. 28); de même, p. 25, ligne 27, p. 37 ligne 30, on doit intercaler les mots: *im Allgemeinen.*

Le second écrit est le complément du premier. Nous exposons, par une méthode extrêmement élémentaire, les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux équations algébriques aient un nombre déterminé de racines communes. L'idée fondamentale est la suivante: Si α, β, γ sont des racines de $F(x) = 0$, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha^p F(\alpha), & \alpha^q, & \alpha^r \\ \beta^p F(\beta), & \beta^q, & \beta^r \\ \gamma^p F(\gamma), & \gamma^q, & \gamma^r \end{vmatrix}$$

est identiquement nul. Des déterminants analogues égalés à zéro, conduisent aisément aux conditions pour que deux équations aient k racines communes, par un procédé semblable à celui de Sylvester, dans la méthode dialytique. Cette idée nouvelle permet, d'ailleurs, de simplifier aussi bien le méthode de Bézout et Cauchy que celle d'Euler et de Sylvester.

Sur la Théorie des Nombres. 28 pages in 8.
Démonstration d'une théorème relatif à un déterminant remarquable. (Extrait du Bulletin de décembre 1878 de l'Académie de Belgique.) 8 pages in-8⁰.

Le premier de ces opuscules est la réunion de quelques articles, en général, d'un caractère purement pédagogique. 1. *Note sur un principe élémentaire d'arithmétique.* Rectification d'une erreur de Poinsot relative au théorème: Si l'on a N points rangés en cercle et qu'on les joigne de h en h, h étant premier à N, on passe nécessairement par les N points avant de retomber sur le point de départ. 2. *Généralisation du théorème de Nicomaque:* la puissance $k^{ième}$ d'un nombre entier n est la somme de n nombres impairs consécutifs, savoir, ceux qui sont les plus voisins de n^{k-1}. 3. *Généralisation d'un théorème de M. H.-J.-S. Smith.* Le théorème de M. Smith consiste dans l'égalité:

$$\begin{vmatrix} [1, 1], & [1, 2], & \cdots, & [1, n] \\ [2, 1], & [2, 2], & \cdots, & [2, n] \\ [\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ [n, 1], & [n, 2], & \cdots, & [n, n] \end{vmatrix} = \varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(n),$$

$[i, k]$ désignant le plus grand comme diviseur de i et k, $\varphi(i)$ étant la fonction numérique bien connue qui indique combien il y a de nombres premiers et non supérieurs à i. Le déterminant de M. Smith est symétrique et tel que le $k^{ième}$ élément de la $i^{ième}$ ligne, est égal au $(k - i)^{ième}$ élément de cette ligne, si $k > i$; de plus les éléments de la diagonale sont $1, 2, \cdots, n$. Dans l'article, on donne la valeur d'un déterminant formé d'après cette loi, mais où les éléments de la diagonale sont quelconques; on en déduit le moyen de mettre un produit de n facteurs sous forme d'un déterminant de ce genre. Ce dernier résultat est établi directe-

ment, par multiplication de deux déterminants, dans la note de l'Académie de Belgique, dont le titre est donné ci-dessus. 4. *Sur le théorème de Fermat* ($B^{\varphi(N)} - 1$ est divisible par N, si B est premier à N). Notice historique: la seconde démonstration d'Euler est identique au principe fondamental de la théorie des fractions périodiques. La démonstration dite de Poinsot appartient en réalité à Catalan ou même à Gauss. 5. *Loi de réciprocité des résidus quadratiques.* Démonstration extrêmement simple formée en rapprochant des théorèmes connus; elle ne suppose aucune connaissance préliminaire en arithmétique, autre que celle de la théorie du plus grand commun diviseur. Voici l'ordre suivi: Lemme de Gauss. On en déduit le théorème de Fermat. Celui-ci, à son tour donne le criterium d'Euler pour distinguer les résidus des non-résidus. Le reste de la démonstration s'achève d'après Zeller.

Le 3e de ces articles contient, par inadvertance, une démonstration complétement erronée, et d'ailleurs inutile, de la formule $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, quand a et b sont premiers entre eux. Cette erreur est rectifiée dans une note, qui contient, en outre, une démonstration simple, due à Catalan, de la formule $2\sigma(n) = n\varphi(n)$, où $\sigma(n)$ est la somme des $\varphi(n)$ nombres premiers et non supérieurs à n.

P. Mansion.

L. Koenigsberger: Ueber die Reduction Abel'scher Integrale auf elliptische und hyperelliptische. (Mathematische Annalen.)

Im 4ten Hefte des 86ten Bandes des Borchardt'schen Journals habe ich die Frage behandelt, ob sich von vornherein charakteristische Eigenschaften für die Moduln derjenigen elliptischen Integrale angeben lassen, auf welche sich gewisse Abel'sche Integrale von der Form

$$\int f(x, \sqrt{R(x)})\, dx$$

reduciren lassen, worin f eine rationale und R eine ganze Function von z bedeutet. Ich spreche in dieser neuen Arbeit eines der dort gefundenen Resultate etwas anders in der folgenden Form aus: die Integrale von der Gestalt

$$\int \psi(x) (\sqrt[n]{R(x)})^r dx,$$

in denen n und r relativ prim liefern als einzig mögliche Reductionsformeln auf elliptische Integrale

$$\int \psi(x)\left(\sqrt[3]{R(x)}\right)^r dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z^3-1}}, \quad \int \psi(x)\left(\sqrt[4]{R(x)}\right)^r dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z^4-1}}$$

$$\int \psi(x)\left(\sqrt[6]{R(x)}\right)^r dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z^6-1}},$$

von denen die letzte wegen der Transformirbarkeit des rechtsstehenden elliptischen Integrales mit der ersten zusammenfällt.

Es wird nun gezeigt, dass genau dieselben Sätze bestehen, wenn es sich um die Reduction ähnlicher Integralformen für algebraisch auflösbare Gleichungen überhaupt handelt d. h. um Integrale von der Form

$$\int Q_\varrho\, p^{\frac{\varrho}{n}}\, dx,$$

worin Q_ϱ und p algebraische Functionen einer bestimmten Ordnung bezeichnen, und nun die Frage in Angriff genommen, wie man alle reducirbaren Integrale der angegebenen Form wirklich aufstellen kann. Man findet zuerst — wenn der Einfachheit wegen in der Aufzählung der Resultate wieder Q_ϱ und p als rationale Functionen vorausgesetzt werden —, dass, wenn zwei Functionen $f(x)$ und $R(x)$ so bestimmt werden, dass

$$\left(1 - f^2(x)R(x)\right)\left(1 - k^2 f^2(x) R(x)\right)$$

nur Doppelfactoren besitzt, alle auf je ein elliptisches Integral reducirbaren hyperelliptischen Integrale erster Gattung, wenn

$$\sqrt{\left(1 - f^2(x)R(x)\right)\left(1 - k^2 f^2(x) R(x)\right)} = F(x)$$

gesetzt wird und F eine rationale Function bedeutet, erhalten werden in der Form

$$\int \frac{\frac{1}{2} f(x) R'(x) + f'(x) R(x)}{R(x) F(x)} \sqrt{R(x)}\, dx = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

und zwar durch die Substitution $z = f(x)\sqrt{R(x)}$.

Mit Berücksichtigung der complexen Multiplication der in Frage kommenden elliptischen Integrale und mit Hülfe des Abel'schen Theorems findet man ferner, dass, wenn $f(x)$ und $R(x)$ so gewählt werden, dass der Ausdruck

$$f(x)^3 R(x)^\varrho - 1 = F(x)^2$$

nur Doppelfactoren besitzt, sämmtliche Abel'sche Integrale der

verlangten Form, welche auf elliptische Integrale reducirbar sind, in dem Ausdruck enthalten sind

$$\int^{\bullet} \frac{\frac{\varrho}{3} f(x)R'(x) + f'(x)R(x)}{R(x)F(x)} \left(\sqrt[3]{R(x)}\right)^{\varrho} dx,$$

und zwar werden dieselben dann durch die Substitution

$$Z = f(x)\left(\sqrt[3]{R(x)}\right)^{\varrho}$$

auf das elliptische Integral

$$\int^{\bullet} \frac{dz}{\sqrt{z^3 - 1}}$$

zurückgeführt; für die Reductionsformel

$$\int^{\bullet} \psi(x)\left(\sqrt[6]{R(x)}\right)^{\varrho} dx = \int^{\bullet} \frac{dz}{\sqrt{z^6 - 1}}$$

bleibt alles unverändert, nur ist $f(x)$ und $R(x)$ so zu bestimmen, dass

$$f(x)\left[f(x)^3 R(x)^{\varrho} - 1\right]$$

ein vollständiges Quadrat ist.

Endlich ergiebt sich durch wiederholte Anwendung des Abel'schen Theorems, dass für die als nothwendig erkannte Gestalt der Reductionsformel

$$\int^{\bullet} \psi(x)\left(\sqrt[4]{R(x)}\right)^{\varrho} dx = \int^{\bullet} \frac{dz}{\sqrt{z^4 - 1}}$$

alle reducirbaren Integrale erhalten werden, wenn man

$$\psi(x) = \frac{\frac{\varrho}{4} f(x)R'(x) + f'(x)R(x)}{R(x)F(x)}$$

setzt, worin die rationale Function $f(x)$ und die ganze Function $R(x)$ der Bedingung zu unterwerfen sind, dass

$$f(x)^4 R(x)^{\varrho} - 1$$

das Quadrat einer rationalen Function $F(x)$ ist.

Es wird ferner noch die Frage der Reduction der in der obigen Form enthaltenen Abel'schen Integrale auf hyperelliptische Integrale behandelt, und die Gleichung charakterisirt, welcher der complexe Multiplicator der hyperelliptischen Reductionsintegrale genügen muss; sodann wird die Reductionsgleichung untersucht

$$\int^{\bullet} \psi(x)\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^{r} dx = \int^{\bullet} \frac{f(z_1)dz_1}{\sqrt{z_1^{2p+1} - 1}} + \int^{\bullet} \frac{f(z_2)dz_2}{\sqrt{z_2^{2p+1} - 1}} + \cdots + \int^{\bullet} \frac{f(z_p)dz_p}{\sqrt{z_p^{2p+1} - 1}},$$

in welcher, wie aus allgemeinen Sätzen der Transformationstheorie der Abel'schen Integrale folgt, die Grössen $z_1, z_2, \cdots z_p$ die Lösungen einer Gleichung p^{ten} Grades

$$z^p + f_1\left(x, (\sqrt[2p+1]{R(x)})^r\right) z^{p-1} + \cdots + f_p\left(x, (\sqrt[2p+1]{R(x)})^r\right) = 0$$

bedeuten, worin $f_1, f_2, \cdots f_p$ rational aus den in ihnen enthaltenen Grössen zusammengesetzt sind, und die zu jenen z-Grössen gehörigen Irrationalitäten durch einen Ausdruck von der Form bestimmt sind

$$\sqrt{z_\varrho^{2p+1} - 1} = F\left(z_\varrho, x, (\sqrt[2p+1]{R(x)})^r\right),$$

in welchem F wiederum eine rationale Function vorstellt.

Es wird wieder mit Hülfe geschlossener Umläufe der Variabeln x die obige Gleichung auf eine andere der Form

$$(2p+1)\int \psi(x)\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r dx = \sum_0^{p-1} {}_k A_k \sum_0^{2p} {}_s \alpha^{-s} \sum_1^p {}_\varrho \int \frac{z_{\varrho s}^k \, dz_{\varrho s}}{\sqrt{z_{\varrho s}^{2p+1} - 1}}$$

zurückgeführt, wenn

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_{p-1} z^{p-1}$$

gesetzt wird, und eine solche vermöge der Substitution

$$z_{\varrho s} = \alpha^{m_s} t_{\varrho s},$$

in welcher α eine $2p+1^{\text{te}}$ primitive Einheitswurzel und m_s der Congruenz genügt

$$m_s(k+1) \equiv s \bmod (2p+1),$$

hergeleitete Summe

$$\sum_0^{2p} {}_s \sum_1^p {}_\varrho \int \frac{t_{\varrho s}^k \, dt_{\varrho s}}{\sqrt{t_{\varrho s}^{2p+1} - 1}}$$

nach dem Abel'schen Theorem behandelt, indem man die Form der unbestimmten Coefficienten des Abel'schen Theorems zu bestimmen sucht. Es mag hier genügen, das Resultat in Folgendem anzugeben: Die Gleichung

$$\sum_0^{2p} {}_s \sum_1^p {}_\varrho \int \frac{t_{\varrho s}^k \, dt_{\varrho s}}{\sqrt{t_{\varrho s}^{2p+1} - 1}} = \int \frac{Z_1^k \, dZ_1}{\sqrt{Z_1^{2p+1} - 1}} + \cdots + \int \frac{Z_p^k \, dZ_p}{\sqrt{Z_p^{2p+1} - 1}}$$

ist so beschaffen, dass, wenn man

$$Z_\varrho = W_\varrho y^\lambda$$

setzt, worin

$$y = \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r \text{ und } \lambda(k+1) \equiv 1 \bmod (2p+1)$$

ist, die Grössen

$$W_1, W_2, \cdots W_p$$

die Lösungen einer Gleichung

$$W^p + \mathfrak{M}_1 W^{p-1} + \cdots + \mathfrak{M}_{p-1} W + \mathfrak{M}_p = 0$$

sind, deren Coefficienten rational aus x zusammengesetzt sind, während die Irrationalitäten

$$\sqrt{W_\varrho^{2p+1} y^{\lambda(2p+1)} - 1} = \sqrt{W_\varrho^{2p+1} R(x)^{\lambda r} - 1}$$

sich als rationale Functionen von W_ϱ darstellen lassen, deren Coefficienten wiederum rational aus x zusammengesetzt sind; ferner wird gezeigt, dass in den obigen Formeln auch sämmtliche Beziehungen enthalten sind, welche derartige Transformationen liefern.

Es wird sodann die Behandlung des Problems für hyperelliptische Integrale erster Ordnung zu Ende geführt; wie für hyperelliptische Integrale höherer Ordnung die Bedingungsgleichungen herzustellen sind, denen nach den obigen Gleichungen die Coefficienten der Substitutionsfunctionen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots \mathfrak{M}_p$ und des Polynoms des Abel'schen Integrals unterliegen müssen, zeige ich in einer demnächst im 3ten Hefte des 87ten Bandes von Borchardt's Journal erscheinenden Arbeit: „Erweiterung des Jacobi'schen Transformationsprincips", über die ich bereits im letzten Hefte des Repertoriums referirte, und ich behalte mir die Anwendung der dort gegebenen Methoden auf die oben behandelten Probleme bis zum Erscheinen dieser Arbeit vor.

Wien. L. Koenigsberger.

Otto Hesse: Ueber Sechsecke im Raume. (Aus den hinterlassenen Papieren von Otto Hesse mitgetheilt durch S. Gundelfinger. Borchardt's Journal Bd. 85 S. 304—314.)

In dieser Abhandlung giebt Hesse einen analytischen Beweis des Satzes:

„Wenn im Raume irgend ein Sechseck U und ein Punkt U_0 gegeben ist, und wenn man drei gerade Linien zieht, welche die gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks paarweise schneiden, so

sind die Schnittpunkte auf den aufeinanderfolgenden Seiten des Sechsecks U die aufeinanderfolgenden Ecken eines Brianchon'schen Sechsecks V, dem der Brianchon'sche Punkt U_0 zugehört. Das einbeschriebene Sechseck V bestimmt unzweideutig ein Hyperboloid, auf dem es liegt. Dieses Hyperboloid wird von den Seiten des gegebenen Sechsecks U überdies noch in sechs Punkten geschnitten, die in derselben Reihenfolge die Ecken sind eines zweiten, dem gegebenen einbeschriebenen und auf dem Hyperboloide liegenden Brianchon'schen Sechsecks V mit einem Brianchon'schen Punkte U_7".

Im Verlaufe des Beweises werden in aller Ausführlichkeit Methoden entwickelt, welche die Coordinaten dieses Punktes U_7 durch die Coordinaten der 7 gegebenen Punkte U_0, $U_1 \cdot \cdot \cdot U_6$ ausdrücken lehren und welche ohne vollständige Wiedergabe hier nicht wohl mitgetheilt werden können. Nach einem bekannten Satze Hesse's (cfr. Borchardt's Journal Bd. 73 S. 370) ist durch die vorliegende Arbeit gleichzeitig in neuer und directer Weise das Problem gelöst: Wenn sieben Schnittpunkte (U_0, $U_1 \cdot \cdot U_6$) dreier Oberflächen zweiter Ordnung gegeben sind, den achten Schnittpunkt (U_7) zu bestimmen.

Tübingen. S. Gundelfinger.

S. Gundelfinger: Ueber die Transformation einer gewissen Gattung von Differentialgleichungen in krummlinige Coordinaten. (Borchardt's Journal Bd. 85 S. 295—303.)

Im 36. Bande des Crelle'schen Journals, S. 119, hat Jacobi, theilweise nach Lamé's Vorgang, gezeigt, dass es zur Transformation der Potentialgleichung: $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ in beliebige allgemeine (orthogonale oder anorthogonale) Coordinaten hinreicht, das Quadrat des Linienelementes zu transformiren. Diese Eigenschaft der Potentialgleichung bildet nur einen speciellen Fall eines allgemeinen Satzes, welcher, zusammen mit einigen daran geknüpften Anwendungen, den Gegenstand der in der Ueberschrift bezeichneten Arbeit bildet und folgendermassen ausgesprochen werden kann:

Es seien $\xi_0, \xi_1, \cdots \xi_n$; $x_0, x_1, \cdots x_n$ zwei Reihen willkürlicher und von einander vollkommen unabhängiger Variabeln. Ferner bedeute V eine Function der $x_0, x_1, \cdots x_n$, und J irgend eine simultane Invariante, welche man aus dem Systeme algebraischer Formen der $\xi_0, \xi_1 \cdots \xi_n$:

$$\text{I)}\quad \begin{aligned} &\xi_0^2 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2, \\ &\xi_0 \frac{\partial V}{\partial x_0} + \xi_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial V}{\partial x_n}, \\ &\xi_0^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_0^2} + 2\xi_0\xi_1 \frac{\partial^2 V}{\partial x_0 \partial x_1} + \cdots + \xi_n^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2}, \\ &\xi_0^3 \frac{\partial^3 V}{\partial x_0^3} + 3\xi_0^2\xi_1 \frac{\partial^3 V}{\partial x_0^2 \partial x_1} + \cdots + \xi_n^3 \frac{\partial^3 V}{\partial x_n^3}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

bilden kann, indem man die Differentialquotienten

$$\frac{\partial V}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_l}, \quad \frac{\partial^3 V}{\partial x_k \partial x_l \partial x_m}, \quad \cdots (k, l, m = 0, 1 \cdots n)$$

als constant betrachtet. Um alsdann die Differentialgleichung $J = 0$ in irgend welche krummlinigen, durch die Substitutionen

$$x_0 = \varphi_0(\varrho_0, \varrho_1 \cdots \varrho_n), \cdots x_n = \varphi_n(\varrho_0, \varrho_1, \cdots \varrho_n)$$

definirten Coordinaten zu transformiren, genügt es, in dem Ausdrucke für das Quadrat des Linienelementes:

$$dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 = e_{00}\, d\varrho_0^2 + 2e_{01} d\varrho_0 d\varrho_1 + \cdots + e_{nn}\, d\varrho_n^2$$

die Coefficienten e_{kl} zu kennen.

Der Beweis wird in der Art geführt, dass man ein **System von** Grössen $X_0, X_1 \cdots X_n$ einführt, welche mit den ξ_k genau ebenso zusammenhängen, wie die $d\varrho_k$ mit den dx_k, und welche also die Gleichung befriedigen:

$$\xi_0^2 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = e_{00} X_0^2 + 2e_{01} X_0 X_1 + \cdots + e_{nn} X_n^2 .$$

Setzt man dann im Anschlusse an eine von Herrn Christoffel eingeführte Bezeichnungsweise

$$\begin{bmatrix} lm \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial e_{mi}}{\partial \varrho_l} + \frac{\partial e_{li}}{\partial \varrho_m} - \frac{\partial e_{lm}}{\partial \varrho_i}\right), \quad i = 0 \cdots n,$$

$$E = \Sigma \pm (e_{00} e_{11} e_{22} \cdots e_{nn}),$$

$$\frac{\partial E}{\partial e_{0k}} \begin{bmatrix} lm \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\partial E}{\partial e_{1k}} \begin{bmatrix} lm \\ 1 \end{bmatrix} + \cdots + \frac{\partial E}{\partial e_{nk}} \begin{bmatrix} lm \\ n \end{bmatrix} = E \cdot \begin{Bmatrix} lm \\ k \end{Bmatrix},$$

so ergiebt sich:

$$\frac{\partial X_k}{\partial x_0}\xi_0 + \frac{\partial X_k}{\partial x_1}\xi_1 + \cdots + \frac{\partial X_k}{\partial x_n}\xi_n = -\begin{Bmatrix} 00 \\ k \end{Bmatrix} X_0^2 - 2\begin{Bmatrix} 01 \\ k \end{Bmatrix} X_0 X_1 - \cdots - \begin{Bmatrix} nn \\ k \end{Bmatrix} X_n^2,$$

$$\sum_k \frac{\partial V}{\partial x_k}\xi_k = \sum_k \frac{\partial V}{\partial \varrho_k} X_k,$$

$$\sum_k \sum_l \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_l}\xi_k \xi_l = \sum_l \sum_m \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho_l \partial \varrho_m} - \sum_k \begin{Bmatrix} lm \\ k \end{Bmatrix} \frac{\partial V}{\partial \varrho_k}\right) X_l X_m$$

. . . .

Diese Relationen lehren auf Grund der charakteristischen Eigenschaft einer Invariante die Differentialgleichung $J = 0$ sofort in die krummlinigen Coordinaten ϱ_k transformiren.

Das Verfahren wird an zwei einfachen Beispielen beleuchtet, nämlich an der Transformation der Summe $\sum_k \frac{\partial^2 V}{\partial x_k^2}$, sowie der Ausdrücke für die Hauptkrümmungsradien einer Fläche

$$V(x_0, x_1, x_2) = \text{const.}$$

im Punkte x_0, x_1, x_2.

Tübingen. S. Gundelfinger.

Albert Fliegner: Versuche über das Ausströmen der atmosphärischen Luft durch Mündungen in dünner Wand. (Civilingenieur, XXIV. Bd., S. 201.)

Die Versuche sind mit sechs verschiedenen Mündungen angestellt, deren Durchmesser zwischen 3,17 und 11,36^{mm} lagen. Es sind die directen Versuchsresultate mitgetheilt, und daran eine Discussion derselben angeschlossen. Darin ist zunächst nachgewiesen, dass eine strenge Formel für den Ausfluss durch eine derartige Mündung nicht aufzustellen geht. In die gewöhnliche Formel für das Ausflussgewicht darf man nämlich nicht den Mündungsquerschnitt als obere Grenze der Integration einführen, weil in ihm hier convergirende Geschwindigkeitsrichtungen vorhanden sind. Den kleinsten Strahlquerschnitt darf man aber eigentlich auch nicht benutzen, weil in ihm die Pressung nicht constant ist, sondern nach innen zu wächst. Auch ist die Zustandsänderung der Luft bis in diesen Querschnitt nicht mehr umkehrbar.

Will man doch die Contractionsverhältnisse einigermassen untersuchen, so muss man Annäherungen machen. Man muss den kleinsten Strahlquerschnitt als Integrationsgrenze einführen, in ihm einen mittleren constanten Druck annehmen, der angenähert so gross zu erwarten ist, wie in der Ebene einer gut abgerundeten Mündung bei derselben inneren und äusseren Pressung. Die Nichtumkehrbarkeit des Processes muss vernachlässigt werden. Der Ausflussexponent n lässt sich nicht genau bestimmen, da zwar die inneren Widerstände angenähert dieselben sind, wie bei einer gut abgerundeten Mündung, eine Wärmemittheilung von aussen dagegen hier in nur verschwindend kleinem Betrage zu erwarten ist. n ist von beiden Umständen abhängig, man kann aber ihren Einfluss nicht quantitativ trennen, jedenfalls muss n aber zwischen 1,37, dem Werthe für gut abgerundete Messingmündungen und $k = 1,41$ für vollkommen adiabatisches Ausströmen liegen. Hiernach kann man Grenzen für den Contractionscoefficienten (α) aus den Versuchen berechnen.

Dieser Coefficient zeigte sich nun abhängig vom Durchmesser der Mündung (D) und dem Verhältnisse der äusseren Pressung, p_0, zur inneren, p_m. Durch angenäherte Rechnungen ist nachgewiesen, dass α innerhalb engerer Grenzen mit D so zusammenhängen muss, dass

$$\alpha = \beta\,(1 - \gamma D)$$

ist, wobei β eine Function der Pressungen, γ eine absolute Con-

stante bedeutet. Die Gestalt der Function β lässt sich nicht durch Rechnung finden, doch kann man schliessen, dass sie mit abnehmendem Ueberdrucke auch abnehmen muss. Aus den Versuchen ergab sich, dass man mit genügender Genauigkeit

$$\beta = a + b \cos \frac{p_0}{p_m} \pi$$

setzen kann (a und b constant).

Schliesslich ist noch eine empirische Formel für das Ausflussgewicht entwickelt

$$G = (3465 - 10000\, D)\, F \sqrt{\frac{p_m^2 - p_0^2}{T_m}},$$

worin alle Längen in Metern, die Pressungen in Atmosphären einzusetzen sind (F ist der Mündungsquerschnitt, T_m die innere Temperatur). Es ist noch gezeigt, dass die vorhandenen Abweichungen der directen Beobachtungsresultate von dieser Formel sich leicht aus den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern herleiten lassen.

Zürich. A. Fliegner.

Milinowski: 1) Die Abbildung von Kegelschnitten auf Kreisen, 2) Zur Theorie der Kegelschnitte, 3) Die Kegelschnitte behandelt für die oberen Classen höherer Lehranstalten von Simon und Milinowski. Zweite Abtheilung: Ellipse und Hyperbel von Milinowski. (Berlin, Calvary.)

Die beiden ersten Abhandlungen (Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 86) und der zuletzt genannte Leitfaden verfolgen denselben Zweck, die bisher der elementar-synthetischen Behandlung nicht recht zugänglichen Eigenschaften der Kegelschnitte, nämlich die Polareigenschaften und die Sätze von Pascal und Brianchon auf elementarem Wege herzuleiten.

Beschreibt man um den einen Brennpunkt mit der grossen Axe des Kegelschnitts einen Kreis, so schneidet jeder Radius desselben Kreis und Kegelschnitt in zwei Punkten; der erstere heisse das Bild des zweiten, die Tangente in jenem das Bild der Tangente in letzterem. Durch die so hergestellte centrale Abbildung übertragen sich die Kreiseigenschaften unmittelbar auf den Kegelschnitt.

Eine andere Art der Abbildung, welche auch für die Parabel gilt, beruht auf der Erzeugung eines Kegelschnitts als Ort des Mittelpunktes eines Kreises, der zwei feste Kreise berührt. Ist A

ein Punkt des Kegelschnitts, so lässt sich um ihn ein Kreis beschreiben, der die festen Kreise berührt. Den Berührungspunkt 𝔄 mit dem einen derselben nenne man das Bild von A, die Tangente im ersten das Bild der Tangente in A, so folgt sofort, dass das Bild eines harmonischen Gebildes wieder ein solches ist. Daraus aber ergeben sich die Polareigenschaften.

In der zweiten Abhandlung wird zur Ableitung dieser Eigenschaften die harmonische oder involutorische Verwandtschaft gebraucht (vgl. Reye, Geometrie der Lage, Zweite Abtheilung, S. 106), ein Princip, welches, wie ich einer Mittheilung des Hrn. Professor Schröter entnehme, von Möbius in den Berichten der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften (25. Oct. 1856) unter dem Titel „Theorie der collinearen Involution von Punktepaaren in der Ebene und im Raume" zuerst dargelegt ist. Beschreibt man nämlich um einen Kegelschnitt mit seinem halben Parameter einen Kreis, so bildet dieser mit dem Kegelschnitte eine involutorische Curve (Reye a. a. O. Seite 110). Das Involutionscentrum ist der Brennpunkt; die Involutionsaxe wird dadurch leicht bestimmt, dass die zum Brennpunkte gehörende Leitlinie die Mittelsenkrechte dieser Axe und des Brennpunktes ist. — Vor den zuerst genannten Abbildungen hat dieses Princip deshalb den Vorzug, weil es einen elementaren Beweis des Satzes liefert, dass durch fünf Punkte ein Kegelschnitt bestimmt ist.

Die letzte Methode ist zur Herstellung eines Leitfadens der Kegelschnitte benutzt worden, welcher auf elementarem Wege die Hauptsätze aus der Theorie der Kegelschnitte ableitet. Sie leistet übrigens mehr, indem sie ohne Schwierigkeit auch die Eigenschaften der Kegelschnittbüschel und einige Haupteigenschaften der Oberflächen II. O., namentlich in Bezug auf ihre Axen und Kreisschnitte in elementarer Weise entwickeln lässt.

Zu dem Referate über die Abhandlung: Zur synthetischen Behandlung der ebenen Curven III. O. muss ich die Bemerkung, dass der von Reye gegebene Beweis des Satzes: Jede Curve III. O., welche durch zwei projectivische Büschel I und II. O. erzeugt ist, kann auf unendlich viele Arten durch solche Büschel erzeugt werden, nicht allgemein ist, berichtigen. Dieser Beweis ist allgemein, denn die im Referate genannten Strahlen SP und SQ, ... dürfen nicht homologe sein.

Milinowski.

U. Dini: Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali. (Pisa Nistri 1878.)

Gli studî accurati che in questi ultimi anni furono intrapresi da alcuni scienziati tedeschi intorno ai principii fondamentali dell' Analisi, posero in chiaro che in questi principii non si era portato quel rigore che si richiede nella matematica. Tutti i trattati di Calcolo infinitesimale pubblicati sin ora presentano quà e là dei difetti; perocchè, esaminate accuratamente molte delle dimostrazioni che in essi si danno, si riconosce che non sono complete, che vi sono dei teoremi che non possono minimamente considerarsi come dimostrati, ed altri, quando non si vogliano cangiare i metodi di dimostrazione usati, richiedono delle restrizioni delle quali non si fà mai parola; e poichè alcuni di questi teoremi possono considerarsi come fondamentali per l'Analisi infinitesimale, ben s' intende come sia pregio dell' opera il cercare fino a qual punto i teoremi stessi possano riguardarsi come giusti, e se altri teoremi siano da sostituirsi a quelli che un accurato esame avesse mostrato pienamente difettosi. — Io perciò, che fino dal principio della mia vita scientifica mi ero elevato dei dubbii intorno ad alcuni dei principii dell' Analisi che pure vedeva comunemente accettati come indiscutibili, incoraggiato dalla lettura dei lavori tedeschi, e dopo di essere riuscito a rendere rigorosi alcuni dei teoremi sui quali potevano farsi obiezioni, pensai far cosa utile di pubblicare un libro nel quale venissero raccolte alcune teorie e osservazioni generali che possono dirsi fondamentali per gli studii analitici, e venisse mostrato come dovessero modificarsi, sia nelle dimostrazioni, sia negli enunciati, i teoremi principali dell' Analisi infinitesimale, onde porli al coperto di qualunque obiezione. Questo pertanto fu lo scopo che io mi prefissi nell' accingermi alla pubblicazione del mio libro; ma per circostanze sopravvenute dipoi, io dovei cangiare alquanto il mio piano, e limitarmi a trattare solo una parte di ciò che aveva pensato dapprima di fare. Nel mio libro perciò io mi limito a esaminare soltanto i punti veramente fondamentali della scienza per le funzioni di variabili reali, e poichè penso ora di pubblicare un trattato completo di Calcolo differenziale e integrale del quale un primo abbozzo fu già autografato per uso dei miei studenti, mi riserbo di mostrare in questo trattato che seguendo i principii e i metodi da me sviluppati nel presente libro, tutti i dubbii, tutte le obiezioni che giustamente si erano sollevati intorno agli antichi processi, infirmano sì alcuni dei teoremi che

erano stati fin ora riguardati come fondamentali, come ad es: quello della esistenza in generale della derivata delle funzioni finite e continue, ma si possono ancora enunciare in un modo del tutto rigoroso e spesso anche più generale di quello che si fosse fatto fin quì, la maggior parte degli altri teoremi dell' Analisi infinitesimale; nè questo, sebbene aumenti notevolmente l'estensione del trattato, può dirsi a carico della chiarezza; che anzi, almeno per quanto ne sò dall' esperienza che ne ho fatto nelle mie lezioni, si riducono così estremamente chiari quei principii dell' Analisi che si erano trovati sempre astrusi, e non bene intelligibili.

Lo ripeto dunque, il libro che ho pubblicato non tocca tutti i punti contestati dall' Analisi; pero esso tocca quelli che possono riguardarsi come fondamentali, e i metodi che ho seguito, oltre a portarvi abbastanza chiarezza, sono utili anche per la trattazione di molte questioni importanti dell' Analisi superiore.

Venendo ora ai particolari, dirò che avendo voluto prendere le mosse dai primi fondamenti dell' Analisi, nel primo capitolo del mio libro ho trattato dei numeri incommensurabili, introducendoli nella scienza col rigore che si trova nei lavori di Dedekind, Heine e Cantor su questo soggetto.

Data allora in modo chiaro e preciso la nozione di numero, ho potuto esporre con pieno rigore nel capitolo terzo la teoria dei limiti, dopo di avere trattato nel secondo dei gruppi di numeri e di punti (*Punktmenge*) di Cantor. Dei teoremi che io espongo sui limiti alcuni li credo nuovi, e per essi, come pel metodo tenuto nell' esporli, trovo che anche le altre teorie possono venire trattate in modo molto chiaro, e preciso.

Lo studio generale che io voleva fare, dovendo essere indipendente da ogni concetto sulla possibilità o nò della rappresentazione analitica e geometrica delle quantità da considerarsi, è stato naturale che per la definizione di funzione io adottassi quella che chiamo di Dirichlet, per la ragione che a questo celebre matematico si deve l'averla data pel primo facendo astrazione da ogni idea di dipendenza analitica e geometrica fra la funzione stessa e la variabile. Io espongo nel quarto capitolo questo concetto di funzione; nel quinto dò le proprietà generali delle funzioni finite e continue in tutto un intervallo, e nel sesto tratto delle funzioni che chiamo infinite volte discontinue (funzioni linearmente discontinue di Hankel), per passare poi nel settimo e nell' ottavo ad esporre alcuni studî generali sulle derivate e sulle serie; occupandomi specialmente della

convergenza in ugual grado delle serie, dei loro limiti, e della loro derivazione termine a termine; e i risultati di questi studii li credo noti soltanto in parte. Il lettore troverà che in questi capitoli e, segnatamente nel quinto, io ho cercato di dimostrare molte proprietà che fin ora si erano considerate come di una evidenza intuitiva, ma ciò non sarà trovato inutile da chi abbia famigliarità con questo genere di studj. Gli errori che si erano commessi fin ora provengono appunto dai concetti troppo limitati che erano, può dirsi, cresciuti con noi, sia per essere stati alle prime apparenze, sia per essersi voluti di troppo ajutare colla rappresentazione analitica e geometrica delle funzioni, ritenendo che dovesse accadere sempre ciò che accadeva per le funzioni che ordinariamente erano venute in considerazione; era quindi naturale che in un libro il cui scopo principale era quello di riportare il rigore in molti dei principii della scienza, si dovesse incominciare col bandire tutto ciò che a questa mancanza di rigore aveva dato origine.

La memoria di Hankel sulle funzioni che hanno infinite oscillazioni è a dirsi pregievolissima, non ostante gli errori che quà e là vi si trovano, perocchè in essa questo illustre matematico, troppo presto rapito alla scienza, mostrò pel primo come col suo teorema della condensazione della singolarità possano costruirsi infinite funzioni analitiche che presentano infinite discontinuità e infinite oscillazioni in un intervallo finito, o che essendo sempre continue mancano di derivata in infiniti punti di qualsiasi porzione dell' intervallo che si considera. Io espongo perciò nel 9° capitolo questo principio di Hankel della condensazione delle singolarità, riducendolo perfettamente rigoroso con valermi dei teoremi generali sulle serie esposti nel capitolo precedente; e nel capitolo 10° poi mostro come possano aversi infinite funzioni pure analitiche che mancano di derivata in ogni punto di un intervallo finito, ritrovando fra queste funzioni anche quella data dal Du Bois-Reymond nel Vol. 79 del giornale di Borchardt.

Nel capitolo 11° poi, tornando a fare studj generali intorno alla esistenza delle derivate delle funzioni $f(x)$ finite e continue, trovo utile valermi dei rapporti $\frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h}$ che chiamo *rapporti incrementali*, e di certi numeri che da essi dipendono che io chiamo gli *estremi oscillatorii* dei rapporti medesimi. La considerazione di questi estremi oscillatorii mi ha condotto a rinvenire molti teoremi sulle funzioni continue, in parte relativi alla esistenza delle

derivate, e m' è stata pure d'immenso giovamento nel capitolo seguente nel quale tratto diffusamente delle proprietà degli integrali definiti, della integrazione per parti, della integrazione per serie ec...; e ove col mezzo degli estremi oscillatorii ho potuto ottenere varii teoremi generali ai quali dapprima neppure avrei pensato di poter giungere.

Il Capitolo sugli integrali definiti segna la fine del mio libro nel quale io pure riconosco varii difetti, primo dei quali una certa mancanza di ordine nella trattazione delle materie; il chè deve specialmente attribuirsi alle varie ciscostanze che non mi hanno permesso di procedere regolarmente nella pubblicazione, costringendomi invece a interromperla di sovente.

Nel piano più esteso che io mi era formato dapprima, io aveva stabilito di aggiungervi alcuni studj sulla rappresentazione analitica delle funzioni per serie di Fourier, per serie di funzioni sferiche,.... e sulle funzioni di più variabili, per trattare poi rigorosamente degli integrali multipli, della derivazione e integrazione sotto il segno integrale, della continuità degli integrali ec....

La lentezza però colla quale procedeva la pubblicazione che era stata incominciata fino dal 1875, il pensare che, dopo avere esposti nel libro i concetti generali e fondamentali, avrei potuto riservare le altre cose ad altri trattati speciali da pubblicarsi in appresso, mi consigliarono a limitare come ho fatto il libro stesso. Ed ora appunto, fermo nei proponimenti fatti ho incominciato la stampa di un libro nel quale tratto della rappresentazione analitica delle funzioni per serie di Fourier e, più estesamente, per serie formate di funzioni speciali come ad es: quelle di Bessel, le sferiche, le circolari nelle quali figurano come valori di un parametro variabile le radici di una equazione trascendente; e mi riservo poi di pubblicare il trattato completo di Calcolo differenziale e integrale di cui dissi in principio essere già stato autografato un abbozzo, e nel quale si trovano molti degli studii indicati sopra.

Pel libro che ora ho pubblicato, debbo, come già ho fatto nell' introduzione, rendere sentite grazie al Sig. Schwarz, alle cui gentili communicazioni io devo la conoscenza di alcuni teoremi e di alcuni metodi di dimostrazione; come debbo altresi scusarmi presso quei matematici che avendo ottenuto risultati simili o uguali ai miei non sono stati da me neppure ricordati, o lo sono stati erroneamente.*)

*) Così ad es: io ho attribuito al Sig. Weierstrass la formula (28) della

Le circostanze nelle quali la publicazione facevasi, e la gran quantità di lavori scientifici che via si pubblicavano, facevano sì che io non potessi sapere se altri prima di me avesse pubblicato qualche cosa di simile, o, sapendolo, non sempre fossi ben sicuro intorno al primo scopritore; talchè credei miglior partito quello da me adottato di tacermi generalmente senz' altro.

Pisa. Ulisse Dini.

August Weiler: Die Bewegung des Punktes, welcher von einem abgeplatteten Sphäroid angezogen wird. (Astronomische Nachrichten Nr. 2203, 4, 5.)

1. Die mathematischen Wissenschaften erfreuen sich jetzt einer allgemeineren Beachtung, als in einer früheren Zeit. Die Grenzen ihres Gebietes rücken immer weiter hinaus, und es ist unmöglich vorauszusehen, welches Ziel ihrer Herrschaft gesteckt ist. Doch ist hervorzuheben, dass die Antriebe, welche dem Forscher den Weg vorzeichnen, aus zwei verschiedenen Quellen entspringen. Auf dem Gebiete der Mathematik kann sich Jeder selbst eine Aufgabe stellen, indem er, von Bekanntem ausgehend, eine gegebene Richtung weiter verfolgt. Das Anderemal ist der Anschluss an bekannte Vorstellungen nicht gegeben; aber es ist die Welt der äusseren Erscheinungen, welche zu einer mathematischen Untersuchung die Aufforderung gibt.

Die Aufgabe der ersten Art erweist sich für den Unternehmer in der Regel als die dankbare. Sie wird nach einem im Voraus entworfenen Plane durchgeführt, und die fertige Arbeit findet eine willige Aufnahme. Die andere Aufgabe ist von vornherein schon eine dornenvolle Unternehmung, wenn ihre Bewältigung den bekannten Hilfsmitteln Trotz bietet. Nachdem alle denkbaren Versuche gescheitert sind, findet sich der Unternehmer bereit, Zugeständnisse zu machen, welche er von vornherein abgelehnt haben würde, und wird unversehens auf ein fremdes Gebiet gedrängt. Wenn ihm hier endlich ein Erfolg zu Theil geworden ist, so begegnet er neuen

---

Pag. 296, mentre per essere preciso avrei dovuto dire che il Sig. Du Bois-Reymond la pubblicò pel primo e ne mostrò la importanza colle sue utili applicazioni nei suoi studii sulla serie di Fourier; e il Sig. Weierstrass la trovò egli pure e la comunicò ai suoi studenti senza pero pubblicarla.

Schwierigkeiten in seiner Absicht, denselbeu auch Andern zugänglich zu machen. Er hat so viele Vorstellungen, auf welche er seine Untersuchung stützen wollte, über Bord werfen müssen, und nun soll er den Gedankengang wiedergeben, welcher ihm den Erfolg gebracht hat. Wenn ihm auch dies gelungen ist, so hat er doch nur eine widerstrebende Aufnahme zu erwarten. Der Unvorbereitete wird den ihm geläufigen Standpunkt festzuhalten bemüht sein und, wenn derselbe umgangen ist, vorerst abgeneigt sein. Ich bitte den geehrten Leser, nicht unbillig zu urtheilen, wenn ich es unternehme, über eine Aufgabe der letzteren Art zu berichten.

2. Wenn die Bewegung zweier homogenen kugelförmigen Massen keinem andern Einfluss unterliegt als der gegenseitigen Anziehung, so erfolgt sie in derselben Weise, wie wenn jede Masse in dem Mittelpunkt der Kugel vereinigt wäre, und ist durch die Kepler'schen Gesetze bestimmt. Die Weltkörper sind aber keine Kugeln, und insbesondere ist die Gestalt der Erde die eines abgeplatteten Sphäroids. Ich denke mir nun, der Mond habe die Kugelgestalt, und es soll die Bewegung des Mondes bestimmt werden unter der Voraussetzung, dass derselbe keinem andern Einflusse unterworfen sei als der Anziehung des Erdsphäroids.

Die Mathematiker sind gewöhnt, ein Problem der Mechanik, dessen Lösung von der Integration gegebener Differentialgleichungen abhängt, auf die sogenannte Quadratur oder auf die Integration solcher Ausdrücke zurückzuführen, welche Funktionen einer einzigen Veränderlichen sind. Es kann aber Niemand beweisen, dass jedes Problem der Mechanik diese Eigenschaft hat, und ich glaube annehmen zu dürfen, dass die vorliegende Aufgabe diese Eigenschaft nicht habe. Man kann aber die Lösung dieser Aufgabe in der Form von unendlichen Reihen geben, welche sich als Funktionen einer einzigen veränderlichen Grösse darstellen. Nimmt man die Aufgabe in der allgemeinen Gestalt, wie sie in der Ueberschrift dieser Abhandlung ausgesprochen ist, so könnte vielleicht die Convergenz dieser Reihen in einem gegebenen Falle in Zweifel gezogen werden. Unter denjenigen Voraussetzungen aber, welche in der Bewegung des Mondes um das Erdsphäroid vorliegen, sind schon wenige Glieder dieser Reihen ausreichend, um dem Resultat eine grosse Genauigkeit zu geben. Um die Lösung der Aufgabe in dieser einfachen Gestalt zu erhalten, gehe ich von der Voraussetzung aus, dass die Abplattung des Sphäroids ein kleiner Bruchwerth sei, dass ferner die linearen Ausmessungen des Sphäroids kleine Bruch-

theile der Entfernung des angezogenen Punktes seien, und dass dies während des ganzen Verlaufs der Bewegungserscheinung so bleibe.

Ich erhalte die Lösung der Aufgabe vermittelst der bei den Astronomen üblichen Methode der Störungen. Hiernach bestimmen sich die gesuchten Veränderlichen durch die Integration von Ausdrücken, welche Funktionen einer unabhängigen und zugleich der gesuchten Veränderlichen sind. Die gesuchten Veränderlichen müssen die Eigenschaft haben, dass für jeden unendlich kleinen Zeitraum ihre Variationen kleine Bruchtheile der Variation der unabhängigen Veränderlichen sind. Es sollen also, um dies in die Sprache der Analysis zu übertragen, die Derivirten der gesuchten Veränderlichen nach der unabhängen Veränderlichen kleine Bruchwerthe sein. Die so beschaffenen Veränderlichen heissen die Elemente der Störung, und man gelangt zu einer ersten Näherung, indem man unter dem Integralzeichen die Elemente der Störung als beständige Grössen ansieht. Durch die Variation dieser Constanten gelangt man zu einer zweiten Näherung, und man kann eine beliebige Grenze der Genauigkeit erreichen, indem man die Variation der Constanten wiederholt in Anwendung bringt.

Wenn ein Massenpunkt von einem zweiten Massenpunkte angezogen wird, so beschreibt er eine Ellipse, in deren einem Brennpunkte der zweite Massenpunkt liegt. Bezogen auf den Ort des zweiten Massenpunktes hat die Ellipse eine unveränderliche Lage im Raum. Der Leitstrahl der angezogenen Masse beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume. Dies ist aus den Kepler'schen Gesetzen bekannt. Wird ein Massenpunkt von einem abgeplatteten Sphäroid angezogen, so ist unter der Voraussetzung, dass die Abplattung des Sphäroids ein kleiner Bruchwerth sei, dass ferner die linearen Ausmessungen des Sphäroids kleine Bruchtheile der Entfernung des angezogenen Punktes seien, die Bahn des angezogenen Punktes wenig verschieden von einer Ellipse, deren einer Brennpunkt mit dem Mittelpunkt des abgeplatteten Sphäroids zusammenfällt. Die Wahl der Veränderlichen, durch welche die ungestörte Ellipse in die Bahn des angezogenen Punktes übergeführt wird, ist für den Fortgang der Rechnung von Wichtigkeit. Ich betrachte den Parameter der Ellipse als veränderlich. Das Achsenverhältniss, und daher auch das Exzentrizitätsverhältniss, welches von den Astronomen schlechtweg die Exzentrizität der Ellipse genannt wird, soll unveränderlich sein. Ich stelle ferner die Forderung, dass jene Gleichung, durch welche in der ungestörten Ellipse die wahre Ano-

malie als Funktion der Zeit gegeben ist, in der gestörten Ellipse unverändert fortbestehe. Dagegen ist für die grosse Achse der Ellipse eine Drehung um den Brennpunkt vorgesehen. Auch die Ebene der Ellipse soll ihre Lage im Raum ändern. In Bezug auf eine im Raum festangenommene Ebene ist sie durch die Neigung der Ebenen zu einander und durch die Richtung der Knotenlinie bestimmt. Hiernach sind die von mir in die Aufgabe eingeführten Elemente der Störung der Parameter der Ellipse und die Bewegung der grossen Achse, ferner die Neigung und der Knoten der Bahn.

3. Der Mittelpunkt des abgeplatteten Sphäroids werde als Nullpunkt eines rechtwinkeligen Coordinatensystems, dessen Ebene der xy mit dem Aequator des Sphäroids zusammenfällt, angenommen. Die Achse der z fällt dann mit der Umdrehungsachse des Sphäroids zusammen und die Differentialgleichungen der Bewegung des angezogenen Punktes sind auf Grund bekannter Sätze die folgenden:

$$-\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{3mx}{\varrho^3}\int_0^1 \frac{u^2\,du}{\left(1+\frac{\lambda u^2}{\varrho^2}\right)^2}$$

$$-\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{3my}{\varrho^3}\int_0^1 \frac{u^2\,du}{\left(1+\frac{\lambda u^2}{\varrho^2}\right)^2}$$

$$-\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{3mz}{\varrho^3}\int_0^1 \frac{u^2\,du}{1+\frac{\lambda u^2}{\varrho^2}}.$$

Es ist m eine positive Beständige, ebenso $\lambda = a_1^2 - b_1^2$, worin a_1 und b_1 die grosse und die kleine Halbachse des Sphäroids bezeichnen. Ferner ist ϱ die kleine Halbachse desjenigen Sphäroids, welches durch den angezogenen Punkt geht, und zugleich dem gegebenen Sphäroid homofokal ist. Zur Bestimmung von ϱ ist daher die Gleichung gegeben:

$$\frac{x^2+y^2}{\varrho^2+\lambda} + \frac{z^2}{\varrho^2} = 1.$$

Ich entwickele nun die in den Differentialgleichungen der Bewegung vorkommenden bestimmten Integrale nach Potenzen des Verhältnisses $\frac{\lambda}{\varrho^2}$, und drücke alsdann die Veränderliche ϱ durch die neuen Veränderlichen $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ und $s = \frac{z}{r}$ aus. Es ist r

die Entfernung des angezogenen Punktes von dem Mittelpunkt des Sphäroids, oder der Leitstrahl des angezogenen Punktes, und s bezeichnet den Sinus des Winkels, welchen der Leitstrahl mit der Ebene des Aequators bildet. Die Differentialgleichungen der Bewegung schreiben sich dann in der kanonischen Form:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dW}{dx}=\frac{x}{r}\left(\frac{dW}{dr}-\frac{s}{r}\frac{dW}{ds}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dW}{dy}=\frac{y}{r}\left(\frac{dW}{dr}-\frac{s}{r}\frac{dW}{ds}\right)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{dW}{dz}=\frac{z}{r}\left(\frac{dW}{dr}-\frac{s}{r}\frac{dW}{ds}\right)+\frac{1}{r}\frac{dW}{ds},$$

in welcher die Kräftefunktion W sich, nachdem man alle Potenzen von $\frac{\lambda}{r^2}$, welche den zweiten Grad übersteigen, vernachlässigt hat, in der folgenden Form darstellt:

$$W=\frac{m}{r}+\frac{1}{10}\frac{m\lambda}{r^3}(1-3s^2)+\frac{3}{8}\frac{m\lambda^2}{r^5}\left(\frac{3}{35}-\frac{6}{7}s^2+s^4\right).$$

Unserer Voraussetzung zufolge ist $\frac{\lambda}{r^2}$ ein kleiner Bruchwerth; und wenn insbesondere die Bewegung des Mondes um die Erde betrachtet wird, so ist beiläufig

$$\frac{\lambda}{a_1^2}=\frac{1}{150},\ \frac{a_1^2}{r^2}=\frac{1}{3600},\ \text{folglich}\ \frac{\lambda}{r^2}=\frac{1}{540000}.$$

Es ist hier die Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen der sechsten Ordnung verlangt. Zwei Integrale des Systems lassen sich sehr einfach in geschlossener Form darstellen. Man findet die beiden Integrale

1) $$x'^2+y'^2+z'^2+a=2W$$

2) $$xy'-yx'=b,$$

wo a und b die Integrationsbeständigen sind, und die oben gestrichenen Buchstaben die ersten Derivirten nach der Zeit bezeichnen. Mit Hilfe dieser Integrale kann man das System der sechsten Ordnung auf ein System der vierten Ordnung zurückführen. Diese Reduktion wird wesentlich gefördert, wenn man an die Stelle der rechtwinkeligen Coordinaten des angezogenen Punktes Polarcoordinaten in die Gleichungen einführt.

4. Durch den Leitstrahl r legen wir eine Ebene, welche mit der Ebene des Aequators den Winkel i bildet. Der Winkel, welchen der Leitstrahl mit der Knotenlinie bildet, sei u, ferner ϑ der Winkel,

welchen die Knotenlinie mit der Achse der x bildet. Man erhält dann zum Behuf der Transformation die Gleichungen:

3) $$\frac{x}{r} = \cos\vartheta \cos u - \cos i \sin\vartheta \sin u$$

4) $$\frac{y}{r} = \sin\vartheta \cos u + \cos i \cos\vartheta \sin u$$

5) $$\frac{z}{r} = \sin i \sin u .$$

Die Forderung, dass die durch den Leitstrahl gelegte Ebene zugleich die Ebene der Bahn des angezogenen Punktes sei, führt zu der Differentialgleichung

6) $$(yz' - zy') \cos\vartheta - (xz' - zx') \sin\vartheta = 0 .$$

Wir zerlegen diese Gleichung in die beiden einfacheren:

7) $$yz' - zy' = n \sin i \sin\vartheta$$

8) $$xz' - zx' = n \sin i \cos\vartheta ,$$

wo n eine noch unbestimmte Veränderliche ist. Aus 7 und 8 folgt die weitere Gleichung

9) $$xy' - yx' = n \cos i ,$$

und das Integral 2 geht über in

10) $$n \cos i = b .$$

Ferner geht in Folge der Gleichungen 7, 8, 9 das Integral 1 über in

11) $$r'^2 + \frac{n^2}{r^2} + a = 2W.$$

Aus den Gleichungen 3, 4, 5 bilden wir die Differentialgleichungen

12) $$i' = \sin i \cot u\, \vartheta'$$

13) $$u' + \cos i\, \vartheta' = \frac{n}{r^2} ,$$

und durch die Differentiation die Gleichung 6 noch die Gleichung

14) $$b\vartheta' = \cot^2 i\, s \frac{dW}{ds} .$$

Die Bedeutung der Veränderlichen n ist aus der Gleichung 13 ersichtlich. Sie bezeichnet die Flächengeschwindigkeit des Leitstrahls in der Ebene der Bahn, und ist wohl zu unterscheiden von der Flächengeschwindigkeit des Leitstrahls gegen die grosse Achse der Ellipse, weil wir auch der grossen Achse der Ellipse eine Bewegung in der Ebene der Bahn zugetheilt haben.

Durch die Gleichungen 11, 12, 13, 14 sind, nachdem man die

Veränderliche n vermittelst 10 eliminirt hat, die Derivirten von $r\,i\,u\,\vartheta$ als Functionen dieser Veränderlichen gegeben. Diese Gleichungen bilden daher das noch zu integrirende System der vierten Ordnung. Wir bemerken, dass die Veränderliche ϑ in den Gleichungen nicht vorkommt, woraus folgt, dass zur Bestimmung der Veränderlichen $r\,i\,u$ ein System der dritten Ordnung vorliegt. Nachdem man das System der dritten Ordnung integrirt hat, erhält man die Veränderliche ϑ durch eine Quadratur.

Auch die unabhängige Veränderliche t kommt in den oben erwähnten vier Differentialgleichungen nicht vor. Wenn man anstatt t die unabhängige Veränderliche u in die Gleichungen 11 und 12 einführt, so erhält man ein System der zweiten Ordnung, durch welches die Veränderlichen r und i als Function von u bestimmt sind. Ich glaube indessen nicht, dass Jemand einen Vortheil erlangen wird, wenn er die Integration dieses Systems der zweiten Ordnung in Angriff nimmt.

Das zu integrirende System der dritten Ordnung besteht aus den Gleichungen 11, 12, 13, und man kann aus denselben die Veränderlichen $r\,i\,u$ als Funktion der Zeit bestimmen, nachdem man die Veränderliche n vermittelst 10 eliminirt hat. Man findet aber, dass es vortheilhafter ist, die Gleichung 10 zur Elimination von i zu verwenden. Ich ersetze daher die Gleichung 12, durch welche die Derivirte i' gegeben ist, durch die folgende

$$15)\qquad n' = \frac{ds}{du}\frac{dW}{ds}.$$

Das zu integrirende System der dritten Ordnung besteht dann aus den Gleichungen 11, 13, 15.

5. Wenn das Sphäroid zur Kugel wird, wenn also $\lambda = 0$ ist, so hat man $W = \frac{m}{r}$ und $\frac{dW}{ds} = 0$. Aus den Gleichungen 10, 12, 14 folgt dann, dass die Veränderlichen $n\,i\,\vartheta$ in die Beständigen $n_0 i_0 \vartheta_0$ übergehen, und es bleiben nur zwei Differentialgleichungen übrig. Ferner ist $u' = v'$, und die Gleichungen 11 und 13 gehen über in

$$16)\qquad r'^2 + \frac{n_0^2}{r^2} + a = \frac{2m}{r}$$

$$17)\qquad v' = \frac{n_0}{r^2},$$

aus welchen die ungestörte elliptische Bewegung folgt.

Auch für den Fall, dass die Bahn des angezogenen Punktes in die

Ebene des Aequators hineinfällt, hat man nur die zwei Differentialgleichungen 11 und 13 zu integriren. Denn es ist dann $i = 0$, $s = 0$ und daher auch $\frac{dW}{ds} = 0$. Ferner folgt aus den Gleichungen 10 und 14, dass die Veränderlichen n und ϑ in die Beständigen n_0 und ϑ_0 übergehn. In der vorliegenden allgemeineren Aufgabe aber eliminire ich die Veränderliche n aus der Gleichung 11 vermittelst der Gleichung 15, und erhalte zur Bestimmung des Leitstrahls r eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung. Ich setze noch $W = \frac{1}{r^2} V$, und erhalte die Differentialgleichung der zweiten Ordnung

18) $$(rr')' + a = \frac{1}{r}\frac{dV}{dr},$$

Das zu integrirende System der dritten Ordnung besteht nun aus den Gleichungen 13 und 18, und diese Gleichungen sollen nach der Methode der Störungen integrirt werden.

Wir haben in 2. angenommen, die Bahn des angezogenen Punktes sei wenig verschieden von einer Ellipse, deren einer Brennpunkt mit dem Mittelpunkt des abgeplatteten Sphäroids zusammenfällt. Ich schreibe die Gleichung der Ellipse $\frac{p}{r} = 1 + e\cos v$, und nehme an, dass die Excentricität e eine Beständige, der Parameter p eine Veränderliche sei. Um die wahre Anomalie v als Function der Zeit darzustellen, bediene ich mich der Gleichung $cv' = \left(\frac{p}{r}\right)^2$, wo c gleichfalls eine Beständige ist. Hiernach ist die Flächengeschwindigkeit des Leitstrahls gegen die grosse Achse der Ellipse proportional dem Quadrate des Parameters, und die Gleichung $cv' = (1 + e\cos v)^2$ ist identisch mit derjenigen, welche für die ungestörte elliptische Bewegung gefunden wird. Ihre Integration verlangt, dass man die wahre Anomalie v durch die exzentrische ε ersetze. Man setzt $\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}$, und erhält das Integral in der bekannten Form:

$$\frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{c}(t - t_0) = \varepsilon - e\sin\varepsilon.$$

Aus der Bedeutung der Winkel u und v folgt, dass die Differenz $w = u - v$ die Bewegung der grossen Achse der Ellipse gegen die Knotenlinie ausdrückt. Die aus dem Systeme der dritten Ordnung zu bestimmenden Elemente der Störung sind daher der Parameter

p und des Perigäum w. Eliminirt man die Veränderlichen r und u vermittelst der Gleichungen $\frac{p}{r} = 1 + e \cos v$ und $w = u - v$, so geht die Gleichung 18 in eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung über, aus welcher der Parameter p als Function von v gefunden wird. Nachdem man den Parameter in dieser Weise bestimmt hat, erhält man die Veränderliche n in endlicher Gestalt aus der Gleichung 11. Ferner wird durch die Elimination der Veränderlichen $n\, r\, u$ die Gleichung 13 in eine Differentialgleichung der ersten Ordnung übergeführt, aus welcher das Perigäum w als Function von v folgt.

Wenn $\lambda = 0$ gesetzt wird, so ist die Bahn des angezogenen Punktes eine ungestörte Ellipse, und die Veränderliche p geht in die Beständige p_0 über. Die oben angenommenen Gleichungen sind dann $\frac{p_0}{r} = 1 + e \cos v$ und $cv' = \left(\frac{p_0}{r}\right)^2$, und müssen in dieser Form übereinstimmen mit den Gleichungen 16 und 17. Diese Forderung hat einige Beziehungen zwischen den bis dahin eingeführten unbestimmten Beständigen zur Folge. Man findet die drei Gleichungen:

$$\frac{1}{c} = \sqrt{\frac{m}{p_0^3}}, \quad n_0 = \frac{p_0^2}{c} = \sqrt{m p_0}$$

$$a = \left(\frac{p_0}{c}\right)^2 (1 - e^2) = \frac{m}{p_0}(1 - e^2).$$

Hiernach sind die Beständigen $c\, n_0 a$ als Funktionen von e und p_0 dargestellt. Man kann sich denken, die Integrationsbeständige a sei durch die neue Beständige e ersetzt worden. Es ist aber bemerkenswerth, dass durch die Elimination von r vermittelst der Gleichung $\frac{p}{r} = 1 + e \cos v$, wo v bestimmt ist durch die Gleichung $cv' = \left(\frac{p}{r}\right)^2$, neben der Veränderlichen p die unbestimmte Beständige p_0 in die Störungsgleichungen eingeführt wird.

6. Dem Bisherigen zufolge ist die Differenz $\frac{p^2}{p_0^2} - 1$ eine kleine Grösse, welche wir ein Störungsglied nennen. Ich setze abkürzend $\left(\frac{r}{p}\right)^2 \left(\frac{p^2}{p_0^2} - 1\right) = 2\zeta$, und führe die Gleichung 18, indem ich den Leitstrahl eliminire, über in

$$19) \qquad c^2\zeta'' + \left(\frac{p}{r}\right)^3 \zeta = \frac{p_0^2}{r}\frac{d\Omega}{dr} + P.$$

Für den Fall $\lambda = 0$ geht die Veränderliche $V = r^2 W$ über in $V = mr$. Ich setze daher $V = mr + mp_0 \Omega$ und finde

$$\Omega = q\frac{p_0}{r}(1 - 3s^2) + \frac{15}{2}q^2\left(\frac{p_0}{r}\right)^3\left(\frac{3}{7} - \frac{30}{7}s^2 + 5s^4\right),$$

wo noch abkürzend $\frac{1}{10}\frac{\lambda}{p_0^2} = q$ gesetzt ist. Ferner ist auf der rechten Seite der Gleichung 19 einzusetzen:

$$P = \frac{1}{2}\frac{p}{r}\left(\frac{p}{p_0} - 1\right)^2\left(1 + \frac{2p_0}{p}\right).$$

Da sich $\frac{p}{p_0} - 1$ als ein Störungsglied der ersten Ordnung darstellt, so ist P als ein Störungsglied der zweiten Ordnung zu betrachten. In der Gleichung 19 sind alle Störungsglieder der ersten Ordnung bekannte Funktionen von v. Durch zwei Quadraturen bestimmt sich die erste Näherung von ζ. Nachdem man die erste Näherung aufgefunden hat, ergeben sich durch die Variation der Constanten auch die Störungsglieder der zweiten Ordnung als Funktion von v, und durch weitere Quadraturen kann man die zweite Näherung des Integrals erhalten.

Die Gleichung 19 integrirt sich nach bekannten Methoden. Die einfachere Gleichung $c^2\zeta'' + \left(\frac{p}{r}\right)^3\zeta = 0$ hat die partikularen Integrale $\zeta = \frac{r}{p}\cos v$ und $\zeta = \frac{r}{p}\sin v$. Ich setze daher, um das Integral der Gleichung 19 zu erhalten,

$$\zeta = \frac{r}{p}(k\cos v + h\sin v),$$

und finde alsdann zur Bestimmung der Veränderlichen k und h die Gleichungen

$$20)\qquad -\frac{dk}{dv} = \left(\frac{r}{p}\right)^3 \sin v\left(\frac{p_0^2}{r}\frac{d\Omega}{dr} + P\right)$$

$$21)\qquad \frac{dh}{dv} = \left(\frac{r}{p}\right)^3 \cos v\left(\frac{p_0^2}{r}\frac{d\Omega}{dr} + P\right).$$

Den Parameter der gestörten Ellipse erhält man alsdann aus der Gleichung

$$22)\qquad \frac{p^2}{p_0^2} - 1 = 2\frac{p}{r}(k\cos v + h\sin v).$$

Auch die Derivirte p' ist nun als gegeben zu betrachten. Man hat die Gleichung

$$23)\quad -c\left(\frac{r}{p}\right)^2\frac{pp'}{p_0^2} = \frac{p}{r}(k\sin v - h\cos v) + e\sin v\,(k\cos v + h\sin v).$$

Es ist bemerkenswerth, dass in diesem Werthe p zwei überzählige willkürliche Beständige vorkommen. Die Integration der Differentialgleichung zweiter Ordnung hat zwei willkürliche Beständige im Gefolge. Als solche kann man die Grössen p_0 und t_0 betrachten, von welchen die letztere durch die Integration der Gleichung $cv' = \left(\frac{p}{r}\right)^2$ eingeführt wird. Ausser p_0 und t_0 kann man noch die Integrationsbeständigen k_0 und h_0 in den Werth p aufnehmen. Diese Beständigen k_0 und h_6 dürfen zwar den Betrag eines Störungsgliedes der ersten Ordnung nicht überschreiten, weil sonst die Convergenz der unendlichen Reihen, durch welche das Integral der Gleichung 19 ausgedrückt ist, geschwächt würde. Im Uebrigen aber sind sie willkürlich, und man kann leicht zeigen, dass die Beständige h_0 mit einer Correction der Beständigen t_0 zusammenfällt, dass ferner die Beständige k_0 eine Correktion der Beständigen p_0 und e zur Folge hat, in solcher Weise, dass der Quotient $\frac{1-e^2}{p_0}$ unveränderlich ist.

7. Wir haben $\frac{1}{10}\frac{\lambda}{p_0^2} = q$ gesetzt, und es ist daher für die Verhältnisse der Mondbahn beiläufig $q = \frac{1}{5400000}$. Es hat den Anschein, dass man eine grosse Genauigkeit im Resultat erreiche, wenn alle Störungsglieder der zweiten Ordnung vernachlässigt werden, weil dieselben mit q^2 multiplizirt sind. Es sind aber dabei noch andere Einflüsse entscheidend. Wir bemerken, dass sich die Störungsglieder als trigonometrische Funktionen von v und w darstellen, dass sich also ihre numerischen Werthe zwischen gewissen Grenzen bewegen. Die Störungsglieder werden integrirt, und die Grenzwerthe des Integrals liegen nicht weit entfernt von den Grenzwerthen des Störungsgliedes. Dies ist nicht mehr richtig für den Fall, dass das Störungsglied Funktion von w allein ist. Unter den Störungsgliedern der ersten Ordnung gibt es keine, welche diese Beschaffenheit haben. Dagegen finden sich unter den Störungsgliedern der zweiten Ordnung in den Gleichungen 20 und 21 beziehungsweise die Glieder $\sin 2w$ und $\cos 2w$. Es wird sich unten zeigen, dass die Veränderliche w neben trigonometrischen Gliedern auch ein der Zeit proportionales Glied enthält. In diesem Glied ist der Coefficient der Zeit ein sehr kleiner Bruch, welcher nach vollzogener Integration des Störungsgliedes als Nenner mit demselben verbunden ist. Daher kommt es, dass das Integral der oben er-

wähnten Störungsglieder zweiter Ordnung nicht mehr mit q^2, sondern nur noch mit q multiplizirt, und in Folge dessen gleichwerthig einem Störungsgliede der ersten Ordnung ist. Indem ich die erwähnten Störungsglieder der zweiten Ordnung bei der Integration der Gleichungen 20 und 21 berücksichtige, erhalte ich die Integrale:

$$24)\quad k = -q\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right)\cos v$$
$$-\frac{1}{4} q \sin^2 i\,(\cos(2u + v) - 3\cos(2u - v) + 2l\cos 2w)$$

$$25)\quad h = -q\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right)\sin v$$
$$-\frac{1}{4} q \sin^2 i\,(\sin(2u + v) + 3\sin(2u - v) - 2l\sin 2w).$$

Der beständige Coeffizient l folgt aus den Störungsgliedern der zweiten Ordnung, und ich finde

$$-\frac{l}{e} = \frac{22}{7} + \frac{1}{7}\,\frac{5\sin^2 i}{4 - 5\sin^2 i}.$$

Da nun die Veränderlichen k und h bekannt sind, so kennt man auch die Veränderlichen p und p' auf Grund der Gleichungen 22 und 23. Man bildet daher die Gleichungen: 26) und 27)

$$k\cos v + h\sin v = -q\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right) + \frac{1}{2} q\sin^2 i\,(\cos 2u - l\cos(2u - v))$$
$$k\sin v - h\cos v = \qquad + q\sin^2 i\left(\sin 2u - \frac{1}{2} l\sin(2u - v)\right).$$

Ferner findet man die Veränderliche n, durch welche die Flächengeschwindigkeit des Leitstrahls in der Ebene der Bahn ausgedrückt ist, vermittelst der Gleichung 11. Indem man r' durch p' ersetzt, führt man die Gleichung 11 über in die folgende:

$$28)\quad \frac{n^2}{n_0^2} - 1 = 2\Omega + 2ek\frac{p^2}{p_0^2} - \left(\frac{p^2}{p_0^2} - 1\right)^2 + 2\left(\frac{r}{p_0}\right)^2 P - c^2\left(\frac{r}{p_0}\right)^4 \frac{p'^2}{p^2}.$$

Endlich erhält man noch, wenn n bekannt ist, die Veränderliche i aus der Gleichung 10. Man findet die Gleichung: 29)

$$\frac{\cos i}{\cos i_0} - 1 = -\frac{1}{2} q\sin^2 i\left(3\cos 2u + e\cos(2u+v) + 3e\cos(2u-v) - le\cos 2w\right).$$

8. Wir gehen jetzt zur Integration der Gleichung 13 über, aus welcher die Veränderliche $w = u - v$, oder die Bewegung der grossen Achse der Ellipse gegen die Knotenlinie zu bestimmen ist. Indem ich den Werth n in die Gleichung 13 einsetze, führe ich dieselbe über in:

$$30)\quad \frac{dw}{dv} + \cos i\frac{d\vartheta}{dv} = \frac{p_0^2}{p^2}\,\Omega - \left(\frac{p^2}{p_0^2} - 1 - ek\right) + N.$$

Die Grösse N enthält nur Störungsglieder der zweiten und höheren Ordnungen. Indem ich wie bisher die Störungsglieder vernachlässige, welche die zweite Ordnung überschreiten, erhalte ich den folgenden Werth:

$$N = -\frac{1}{2}(\Omega + ek)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{p_0^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{r}{p}\right)^2 P - \frac{e^2}{2}\left(\frac{r}{p}\right)^4 \frac{p'^2}{p_0^2}.$$

Durch die Integration der Gleichung 30 entsteht:

$$31)\qquad w + \cos i\,\vartheta = w_0 + 3q\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left(v + \frac{2}{3}e\sin v\right)$$

$$+ q\sin^2 i\left(\frac{1}{4}(1 + le)\sin 2u + (l + e)\sin(2u - v) + g\sin 2w\right),$$

wo der beständige Coefficient g den Störungsgliedern der zweiten Ordnung entnommen ist. Aus dem mit v multiplizirten Gliede ersieht man, dass die säkulare Bewegung der grossen Achse der Ellipse in derselben Richtung erfolgt, wie die Bewegung des Leitstrahls der angezogenen Masse, aber sehr viel langsamer als diese.

Schliesslich erhalten wir die Veränderliche ϑ durch die Integration der Gleichung 13. Wir finden das Integral:

$$32)\qquad \vartheta - \vartheta_0 = -3q\cos i\,(v + e\sin v)$$

$$+ \frac{1}{2}q\cos i\left(3\sin 2u + e\sin(2u + v) + 3e\sin(2u - v) + f\sin 2w\right),$$

wo der beständige Coefficient f aus den Störungsgliedern der zweiten Ordnung folgt. Das mit v multiplizirte Glied des Integrals zeigt eine rückgängige Bewegung der Knotenlinie an.

9. Ich habe nun die Integrale der Differentialgleichungen aufgestellt, aus welchen die Bewegung eines von dem abgeplatteten Sphäroid angezogenen Massenpunktes folgt. Wiewohl ich nur die allerersten Glieder der unendlichen Reihen aufgezeichnet habe, so ist damit doch eine beträchtliche Genauigkeit erreicht. Die vernachlässigten Glieder sind sehr viel kleiner als die vorliegenden, weil sie den Faktor q^2 haben. Eine starke Convergenz der Reihen erfordert übrigens nicht gleichzeitig jene beiden in der Bewegung des Mondes sich erfüllenden Voraussetzungen. Ausreichend ist die Forderung, dass der in 3. definirte Quotient $\frac{\lambda}{r^2}$ ein kleiner Bruchwerth sei, was noch vereinbar ist mit einem Abplattungsverhältniss, welches nahe bei der Einheit liegt. Die Gültigkeit der Integrale erstreckt sich über jeden wenn auch noch so grossen Zeitraum.

In den Integralen 26, 27, 31 sind die Coefficienten auch der-

jenigen Glieder, welche als Funktionen von v eine kurze Periode haben, von den Störungsgliedern der zweiten Ordnung abhängig. Daraus folgt, dass die Integrale, wenn man die Störungsglieder der zweiten Ordnung vernachlässigen wollte, selbst für einen kurzen Zeitraum in ihrer numerischen Bedeutung eine andere Gestalt erhalten würden. Dieser Umstand ist den Astronomen entgangen, und auch Hansen, welcher viel Sorgfalt auf die Aufgabe verwendet hat, kannte ihn nicht. Es war für mich leichter, die Analysis so weit zu verfolgen, weil ich dieselbe auf geometrische Betrachtungen gegründet habe, welche einfacher sind als die bei den Astronomen bisher üblichen.

In den obigen Integralen haben alle Glieder den Faktor q, und die meisten Glieder haben ausserdem noch den Faktor $\sin^2 i$. Es ist i der Winkel, welchen die Ebene der Bahn des angezogenen Punktes mit der Ebene des Aequators bildet. Wenn man die Anwendung auf die Mondbahn macht, so ist zu bemerken, dass dieser Winkel in der Wirklichkeit ausser der oben bestimmten noch andere grössere Variationen erleidet. Die letzteren sind aber eine Folge der störenden Anziehung der Sonnenmasse, und müssen daher in der von uns behandelten Aufgabe als nicht vorhanden angesehen werden. Wir geben dem Winkel i den mittleren Werth $23^0 28'$, und daraus folgt $\sin^2 i = \frac{4}{25}$. Aber der Faktor q allein schon ist ausreichend, um zu bewirken, dass alle periodischen Glieder der obigen Integrale für die Beobachtung durchaus unmerklich sind. Denn es ist beiläufig $q = \frac{1}{5400000} = \frac{1}{27}''$. Nur die mit v multiplizirten Glieder der Integrale haben nach einer mässig grossen Anzahl von Umläufen des Mondes einen für die Beoabachtung merklichen Betrag.

Wenn ich in dem Vorstehenden nachgewiesen habe, dass die Astronomen die vorliegende Aufgabe fehlerhaft gelöst haben, so kann es anderseits den Anschein haben, als sei diese Berichtigung für die Theorie des Mondes bedeutungslos, weil es sich nur um unmerkliche Grössen handele. Ich sehe aber die vorliegende Aufgabe als die Vorarbeit zu einer verwickelteren Aufgabe an, welche ich ein andermal zu behandeln mir vorbehalte. Wenn nämlich bei der Bestimmung der Mondbahn neben der sphäroidischen Gestalt der Erde auch die Anziehung der Sonnenmasse berücksichtigt wird, so ergeben sich Störungsglieder der zweiten Ordnung, welche sehr

viel beträchtlicher sind als die in der obigen Aufgabe vorkommenden. Für den Fall, dass sich unter diesen Störungsgliedern der zweiten Ordnung wieder solche finden, welche Funktionen von w allein sind, gelangt man vielleicht zu dem nicht befremdlichen Resultate, dass auch die periodischen Glieder der Mondbahn durch den Einfluss der sphäroidischen Gestalt der Erde Störungen erleiden, welche wohl merklich sind.

Berichtigungen zu meiner Mittheilung im Repert. Bd. II.

S. 260 Z. 12 v. o. anst. einiger lies: aller.
S. 264 Z. 9 v. u. anst. durch lies: durch eine.
S. 266 Z. 17 v. u. anst. aufrecht erhalten lies: vorziehen.

Mannheim. Aug. Weiler.

L. Kiepert: Auflösung der Gleichungen fünften Grades. (Borchardt's Journal Bd. 87 S. 114—133.)

Die algebraischen Untersuchungen, welche bisher zur Auflösung der Gleichungen fünften Grades durchgeführt sind, liefern wesentlich einfachere Resultate, wenn man die von Herrn Weierstrass für die Theorie der elliptischen Functionen gegebenen Methoden*) benutzt statt der Jacobi'schen, weil der Jacobi'sche Modul k, der zu einer allgemeinen Form 4. Grades gehört, keine rationale Function von den Coefficienten dieser Form ist, sondern von ihren Linearfactoren abhängt, während die von Herrn Weierstrass benutzten Invarianten g_2 und g_3 rationale Functionen der Coefficienten sind.

Es sei die elliptische Function definirt durch die Gleichung

1) $$p'^2u = 4p^3u - g_2pu - g_3$$

und

2) $$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2.$$

Die 6 Grössen, welche aus Δ durch Transformation 5. Grades hervorgehen, seien

*) Die wichtigsten Formeln, die sich auf die von Herrn Weierstrass in seinen Vorlesungen eingeführte Function pu beziehen, habe ich in meiner Abhandlung „Wirkliche Ausführung der ganzzahligen Multiplication der elliptischen Functionen“ vorausgeschickt. (Borchardt's Journal Bd. 76 p. 21—33.)

$$D,\; D_0,\; D_1,\; D_2,\; D_3,\; D_4,$$

und zwar sollen diese Grössen bezüglich den Perioden

$$\frac{2\omega}{5},\quad \frac{2\omega'}{5},\quad \frac{2\omega'+48\omega}{5},\quad \frac{2\omega'+96\omega}{5},\quad \frac{2\omega'+144\omega}{5},\quad \frac{2\omega'+192\omega}{5}$$

entsprechen, wenn 2ω und $2\omega'$ die ursprünglichen Fundamentalperioden sind. Es lässt sich dann zeigen, dass

$$\text{3)}\quad \begin{cases} f = \left(\dfrac{D}{\Delta^5}\right)^{\frac{1}{24}} = \dfrac{1}{p\left(\frac{2\omega}{5}\right) - p\left(\frac{4\omega}{5}\right)} \\[2ex] = e^{-\frac{2\eta\omega}{5}}\,\sigma\left(\dfrac{2\omega}{5}\right)\sigma\left(\dfrac{4\omega}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}\cdot h^{\frac{5}{12}} \prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1-h^{10\nu}\right)}{\Delta^{\frac{1}{6}}\cdot h^{\frac{1}{12}} \prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1-h^{2\nu}\right)} \\[2ex] = \dfrac{\sqrt{5}\sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\lambda} h^{\frac{5(6\lambda+1)^2}{12}}}{\Delta^{\frac{1}{6}}\sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\lambda} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}}}, \end{cases}$$

und

$$\text{4)}\quad f_r = \left(\frac{D_r}{\Delta^5}\right)^{\frac{1}{24}} = \frac{1}{p\left(\frac{2\omega'+48r\omega}{5}\right) - p\left(\frac{4\omega'+96r\omega}{5}\right)}$$

$$= e^{-(2\eta'+48r\eta)\frac{\omega'+24r\omega}{5}}\,\sigma\left(\frac{2\omega+48r\omega}{5}\right)\sigma\left(\frac{4\omega'+96r\omega}{5}\right)$$

$$= \frac{-\varepsilon^r h^{\frac{1}{60}} \prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1-h^{\frac{2\nu}{5}}\varepsilon^{24r\nu}\right)}{\Delta^{\frac{1}{6}} h^{\frac{1}{12}} \prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1-h^{2\nu}\right)} = \frac{-\sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\lambda}\varepsilon^{r(\lambda+1)^2} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{60}}}{\Delta^{\frac{1}{6}}\sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\lambda} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{60}}}$$

wird, wobei

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}},\quad h = e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}$$

ist. Aus dieser Summenentwicklung folgen dann unmittelbar die Relationen

$$5)\quad \begin{cases} f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = f\sqrt{5}, \\ f_0 + \varepsilon^2 f_1 + \varepsilon^4 f_2 + \varepsilon f_3 + \varepsilon^3 f_4 = 0, \\ f_0 + \varepsilon^3 f_1 + \varepsilon f_2 + \varepsilon^4 f_3 + \varepsilon^2 f_4 = 0, \end{cases}$$

und damit ist bewiesen, dass f^2, f_0^2, f_1^2, f_2^2, f_3^2, f_4^2 die Wurzeln einer Gleichung sind von der Form

$$6)\quad (f^2+a)^5(f^2+5a)+10b(f^2+a)^3+4c(f^2+a)+5b^2-4ac=0.$$

Eine solche Gleichung, die nur von den drei Konstanten a, b, c abhängig ist, wird eine Jacobi-Kronecker'sche Resolvente genannt. In dem vorliegenden Fall wird

$$a = 0, \quad b = \frac{1}{\Delta} \text{ und } c = -\frac{3g_2}{\Delta^2},$$

also

$$6^a)\quad \Delta^2 f^{12} + 10\Delta f^6 - 12g_2 f^2 + 5 = 0.$$

Andre Ausdrücke, die gleichfalls einer Jacobi-Kronecker'schen Resolvente genügen, sind

$$7)\quad \begin{cases} f' = \frac{1}{2}(\Delta f^5 - 5f^{-1}), \quad f'' = \frac{1}{2}(\Delta f^9 + 9f^3), \\ \varphi = \frac{1}{2}(\Delta f^5 + 5f^{-1}), \quad \varphi' = f^3, \quad \varphi'' = \frac{1}{2}(\Delta f^7 + 7f). \end{cases}$$

Die allgemeinsten Ausdrücke von dieser Eigenschaft haben dann die Form

$$pf + qf' + rf''$$

oder

$$p_1\varphi + q_1\varphi' + r_1\varphi'',$$

wo p, q, r, p_1, q_1, r_1 noch ganz beliebige Konstanten sind.

Die Jacobi-Kronecker'sche Resolvente (6) oder (6^a) lässt sich noch auf den fünften Grad herabdrücken, indem man nach dem Vorgange von Herrn Brioschi

$$8)\quad y_r = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(f^2 - f_r^2\right)\left(f_{r+2}^2 - f_{r+3}^2\right)\left(f_{r+4}^2 - f_{r+1}^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{-(\varepsilon^2+\varepsilon^3)}}{\sqrt{5}}\left(f^2 - f_r^2\right)\left(f_{r+4} - f_{r+1}\right)$$

$$(r = 0, 1, 2, 3, 4)$$

setzt. Es werden dann y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 die Wurzeln der Gleichung

$$9)\quad \Delta^3 y^5 + 10\Delta^2 y^3 + 45\Delta y - 216 g_3 = 0.$$

Auf diese Brioschi'sche Resolvente lässt sich aber die Auflösung

einer allgemeinen Gleichung fünften Grades zurückführen. Diese sei

10) $$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

und habe die Wurzeln x_0, x_1, x_2, x_3, x_4. Setzt man nun

11) $$z = x^2 - ux + v,$$

so wird z wieder die Wurzel einer Gleichung fünften Grades, in der man aber durch passende Wahl der Grössen u und v die Koefficienten von z^4 und z^3 gleich Null machen kann, so dass die Gleichung übergeht in

12) $$z^5 + 5lz^2 - 5mz + n = 0.$$

Dabei ist u die Wurzel der quadratischen Gleichung

13) $$\begin{aligned}&(2A^2 - 5B)u^2 + (4A^3 - 13AB + 15C)u\\ &\quad + (2A^4 - 8A^2B + 10AC + 3B^2 - 10D) = 0,\end{aligned}$$

während

14) $$\left\{\begin{aligned} 5v &= -Au - A^2 + 2B,\\ 5l &= -C(u^3 + Au^2 + C) + D(4u^2 + 3Au + 2B)\\ &\qquad - E(5u + 2A) - 10v^3,\\ 5m &= -D(u^4 + Au^3 + Bu^2 + Cu + D)\\ &\qquad + E(5u^3 + 4Au^2 + 3Bu + 2C) + 5v^4 + 10lv,\\ n &= -E(u^5 + Au^4 + Bu^3 + Cu^2 + Du + E)\\ &\qquad - v^5 - 5lv^2 + 5mv.\end{aligned}\right.$$

Führt man jetzt noch die Grössen α, β, g_2 und Δ durch die Gleichungen

15) $$\left\{\begin{aligned} &2(l^4 - lmn + m^3)\alpha = -(11l^3 + ln^2 - 2m^2n) \pm l\sqrt{\Delta'},\\ &\pm \beta^2 = l^3[l^2\alpha^2 + 11lm\alpha + 64m^2 - 27ln],\\ &\pm 12g_2 = l\alpha^2 + 3m\alpha - n,\\ &\pm \Delta = l^2[(ln - m^2)\alpha + mn]\end{aligned}\right.$$

ein, wo Δ' die Discriminante der Gleichung (12) ist, so geht die Gleichung (12) durch die Substitution

16) $$z = -\frac{\alpha + \beta y}{3 + \Delta y^2}$$

über in die Gleichung (9).

Zur vollständigen Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades hat man also mit Hülfe der Formeln (13), (14) und (15) die Grössen u, v, α, β, g_2 und Δ zu berechnen, dann findet man $h = e^{\frac{\omega' \pi i}{\omega}}$ mit Anwendung einer hypergeometrischen Reihe als Function von $\frac{g_2^3}{\Delta}$ und

die Grössen f, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 durch die Formeln (3) *und* (4); *bestimmt man schliesslich aus der Gleichung* (8) *den Werth von y_r, und dann aus der Gleichung* (16) *den Werth von z_r, so wird für $r = 0$, 1, 2, 3, 4*

$$x_r = -\frac{E + (z_r - v)(u^3 + Au^2 + Bu + C) + (z_r - v)^2(2u + A)}{u^4 + Au^3 + Bu^2 + Cu + D + (z_r - v)(3u^2 + 2Au + B) + (z_r - v)^3}.$$

L. Kiepert: Zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen. (Borchardt's Journal Bd. 87 S. 199—216.)

Das, was in meiner Abhandlung über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades von der Transformation fünften Grades gesagt ist, lässt sich verallgemeinern und auf die Transformation $n$ten Grades übertragen. Man erhält dadurch die Modulargleichungen in einer Form, die eine verhältnissmässig einfache Berechnung derselben möglich macht, und für die Theorie der algebraischen Gleichungen von Wichtigkeit ist.

Sind nämlich 2ω, $2\omega'$ die Fundamentalperioden der elliptischen Function pu, und ist die Primzahl n grösser als 3, so wird

$$1)\qquad P = \prod_{\alpha=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[p\left(\frac{2\alpha\omega}{n}\right) - p\left(\frac{4\alpha\omega}{n}\right) \right]$$

eine symmetrische Function der Grössen

$$p\left(\frac{2\omega}{n}\right),\quad p\left(\frac{4\omega}{n}\right),\quad \cdots p\left(\frac{n-1}{n}\,\omega\right)$$

und deshalb die Wurzel einer Gleichung $(n + 1)$ten Grades, deren Coefficienten g a n z e r a t i o n a l e Functionen von g_2 und g_3 sind. Setzt man nun noch

$$2)\qquad f = \frac{\sqrt{n}}{\Delta^{\frac{n-1}{24}}} \cdot \frac{h^{\frac{n}{12}} \prod_{\nu=8}^{\infty} (1 - h^{2n\nu})}{h^{\frac{1}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - h^{2\nu})} = \frac{\sqrt{n}}{\Delta^{\frac{n-1}{24}}} \cdot \frac{\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^\lambda h^{\frac{n(6\lambda+1)^2}{12}}}{\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^\lambda h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}}},$$

so lässt sich zeigen, dass

$$f^{-2} = (-1)^g P$$

wird. Dabei ist

$$\varDelta = g_2^3 - 27 g_3^2, \quad h = e^{\frac{\omega' \pi i}{\omega}}, \quad n = 6g \pm 1.$$

Die Gleichung, welcher f^2 genügt, nenne ich die **Transformationsgleichung** und finde für die andern Wurzeln dieser Gleichung $f_0^2,\ f_1^2,\ f_2^2, \cdots f_{n-1}^2$, wenn $e^{\frac{2\pi i}{n}} = \varepsilon$ gesetzt wird,

$$3)\ f_r = \frac{i^{\frac{n-1}{2}}}{\varDelta^{\frac{n-1}{24}}} \cdot \frac{\varepsilon^r h^{\frac{1}{12n}} \prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - h^{\frac{2\nu}{n}} \varepsilon^{24 r \nu}\right)}{h^{\frac{1}{12}} \prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - h^{2\nu}\right)} = \frac{i^{\frac{n-1}{2}}}{\varDelta^{\frac{n-1}{24}}} \cdot \frac{\sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda} \varepsilon^{r(6\lambda+1)^2} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12n}}}{\sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}}}.$$

Bezeichnet man mit $D,\ D_0,\ D_1, \ldots D_{n-1}$ die Grössen, welche durch Transformation $n$ten Grades aus $\varDelta$ hervorgehen, so hat man auch

$$4) \qquad f = \left(\frac{D}{\varDelta^n}\right)^{\frac{1}{24}}, \qquad f_r = i^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{D_r}{\varDelta^n}\right)^{\frac{1}{24}}.$$

Durch Summation folgt nun aus den Gleichungen (2) und (3) unmittelbar

$$5) \quad \begin{cases} f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1} = (-1)^g f \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n}, \\ f_0 + \varepsilon^{-\beta} f_1 + \varepsilon^{-2\beta} f_2 + \cdots + \varepsilon^{-(n-1)\beta} f_{n-1} = 0, \end{cases}$$

wo man für β jeden beliebigen Nichtrest von n setzen kann, so dass die Gleichungen (5) im Ganzen $\frac{n+1}{2}$ **lineare** Relationen zwischen den Grössen $f,\ f_0,\ f_1, \cdots f_{n-1}$ geben, welche ich die **Jacobi'schen** Relationen nenne, weil sie **Jacobi** in ähnlicher Weise für die reciproken Werthe des Multiplicators bei der Transformation $n$ten Grades aufgestellt hat (Crelle's Journal Bd. III S. 308). Ganz ebenso bestehen auch zwischen $f^3,\ f_0^3,\ f_1^3, \cdots f_{n-1}^3$ $\frac{n+1}{2}$ **lineare Jacobi'sche** Relationen, denn es ist, wenn man den gemeinschaftlichen Nenner der f mit N bezeichnet,

$$N^3 f^3 = n\sqrt{n}\, h^{\frac{n}{4}} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - h^{2n\nu})^3 = n\sqrt{n} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} (2\lambda+1) h^{\frac{n(2\lambda+1)^2}{4}},$$

$$N^3 f_r^3 = (-i)^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{3r} h^{\frac{1}{4n}} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - h^{\frac{2\nu}{n}} \varepsilon^{24 r n}\right)^3$$

$$= (-i)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} (2\lambda+1) \varepsilon^{3r(2\lambda+1)^2} h^{\frac{(2\lambda+1)^2}{4n}}.$$

Hieraus ergiebt sich durch Summation unmittelbar

$$
6) \quad \begin{cases} f_0^3 + f_1^3 + f_2^3 + \cdots + f_{n-1}^3 = f^3 \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n}, \\ f_0^3 + \varepsilon^{-3\beta} f_1^3 + \varepsilon^{-6\beta} f_2^3 + \cdots + \varepsilon^{-3(n-1)\beta} f_{n-1}^3 = 0. \end{cases}
$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt auch ohne Weiteres, dass das letzte Glied der Transformationsgleichung

$$
\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n}{\Delta^{\frac{n^2-1}{12}}}
$$

wird. Da nun f^{-2} die Wurzel einer Gleichung $(n+1)$ten Grades ist, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von g_2 und g_3 sind, so werden die Coefficienten der Gleichung für f^{+2} auch ganze rationale Functionen von g_2 und g_3, dividirt durch eine Potenz von Δ, deren Exponent eine ganze Zahl ist. Diesen Exponenten kann man aber von vorn herein bestimmen, wenn man beachtet, dass

$$
7) \quad \begin{cases} f^2 = \left(\frac{D}{\Delta^n}\right)^{\frac{1}{12}} = \dfrac{n h^{\frac{n}{6}} \prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - h^{2n\nu}\right)^2}{\Delta^{\frac{n-1}{12}} h^{\frac{1}{6}} \prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - h^{2\nu}\right)^2}, \\ f_r^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{D_r}{\Delta^n}\right)^{\frac{1}{12}} = \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} h^{\frac{1}{6n}} \prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - h^{\frac{2\nu}{n}} \varepsilon^{24r\nu}\right)^2}{\Delta^{\frac{n-1}{12}} h^{\frac{1}{6}} \prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - h^{2\nu}\right)^2}, \\ \Delta^{\frac{1}{12}} = \frac{\pi}{\omega} h^{\frac{1}{6}} \prod\limits_{\nu=1}^{\infty} (1 - h^{2\nu})^2 \end{cases}
$$

ist. Nennt man nämlich die Coefficienten der Transformationsgleichung $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \cdots \mathfrak{g}_{n+1}$, so muss in dem Nenner von $\mathfrak{g}_\alpha$ der Exponent von Δ nothwendiger Weise zwischen

$$
\frac{\alpha(n-1)}{12} \text{ und } \frac{\alpha n}{12}
$$

liegen. Da aber dieser Exponent eine ganze Zahl ist, so wird $\mathfrak{g}_\alpha$ gleich Null, wenn zwischen $\frac{\alpha(n-1)}{12}$ und $\frac{\alpha n}{12}$ keine ganze Zahl liegt. Durch diesen Umstand fallen von vorn herein viele Glieder der

Transformationsgleichung fort. In den übrigen sind die Zähler der Coefficienten **homogene** ganze Functionen von g_2 und g_3, wenn man g_2 den Grad 2 und g_3 den Grad 3 beilegt. Wie aus den Gleichungen (7) hervorgeht, wird der Grad dieser homogenen Functionen

gleich 0,	wenn	$\alpha(n-1)$	ein Vielfaches von	12,
„ 1,	„	$\alpha(n-1)+2$ „	„ „	12,
„ 2,	„	$\alpha(n-1)+4$ „	„ „	12,
. . . .	. .	. . . . . .	. . . . .	. .
„ $\frac{\alpha}{2}$,	„	$\alpha(n-1)+\alpha=\alpha n$	„ „	12

ist. Dadurch erhält die Transformationsgleichung z. B. für $n=11$ ohne jede Rechnung die Gestalt

$$f^{24}+\frac{c}{\Delta^5}f^{12}+\frac{c_1 g_2}{\Delta^7}f^8+\frac{c_2 g_3}{\Delta^8}f^6+\frac{c_3 g_2^2}{\Delta^9}f^4+\frac{c_4 g_2 g_3}{\Delta^{10}}f^2-\frac{11}{\Delta^{10}}=0,$$

wo es nur noch übrig bleibt, die Zahlcoefficienten c, c_1, c_2, c_3, c_4, zu bestimmen.

Dies geschieht durch Entwicklung der Grössen f nach Potenzen von h und durch Einsetzen in die Newton'schen Formeln oder in die Gleichung selbst, wobei

$$8)\quad\begin{cases} g_2=\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^4\left[\frac{1}{12}+20(h^2+9h^4+28h^6+73h^8+\cdots)\right],\\ g_3=\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^6\left[\frac{1}{216}-\frac{7}{3}(h^2+33h^4+244h^6+1057h^8+\cdots)\right],\\ \Delta^{\frac{1}{12}}=\left(\frac{\pi}{\omega}\right)h^{\frac{1}{6}}\left[1-h^2-h^4+h^{10}+h^{14}--+\cdots\right] \end{cases}$$

ist. Am besten ist es, die ersten Coefficienten durch Anwendung der Newton'schen Formeln und die letzten durch Einsetzen in die Gleichung selbst zu bestimmen.

Auf diese Weise machte es mir keine grosse Mühe, die Transformationsgleichungen für

$$n=5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19$$

vollständig auszurechnen.

Die Herstellung dieser Gleichungen wird aber noch wesentlich leichter durch Anwendung der complexen Multiplication der elliptischen Functionen, wie ich in einer späteren Untersuchung zeigen werde. Ebenso werde ich in einer bald folgenden Abhandlung nachweisen, wie leicht sich alle übrigen, bei der Transformation auftretenden Grössen rational durch f ausdrücken lassen.

Es giebt ausser den Grössen f noch unendlich viele Ausdrücke,

die den Jacobi'schen Relationen genügen. Unter vielen andern sind es die Grössen

$$f(u) = \frac{F(u)}{\Phi(u)^n}, \quad f_r(u) = \frac{F_r(u)}{\Phi(u)^n},$$

wo das eine Mal

$$9) \begin{cases} \Phi(u) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum\limits_{\lambda=-\infty}^{\infty} (-1)^\lambda h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}} \cos(6\lambda+1)\frac{u\pi}{2\omega}, \\ F(u) = \left(\frac{n\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^\lambda h^{\frac{n(6\lambda+1)^2}{12}} \cos(6\lambda+1)\frac{nu\pi}{2\omega}, \\ F_r(u) = i^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^\lambda \varepsilon^{r(6\lambda+1)^2} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12n}} \cos(6\lambda+1)\frac{u\pi}{2\omega}, \end{cases}$$

das andre Mal

$$10) \begin{cases} \Phi(u) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{3}{2}} \sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda (2\lambda+1) h^{\frac{(2\lambda+1)^2}{4}} \cos(2\lambda+1)\frac{u\pi}{2\omega}, \\ F(u) = \left(\frac{n\pi}{\omega}\right)^{\frac{3}{2}} \sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda (2\lambda+1) h^{\frac{n(2\lambda+1)^2}{4}} \cos(2\lambda+1)\frac{nu\pi}{2\omega}, \\ F_r(u) = (-i)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{3}{2}} \sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda (2\lambda+1) \varepsilon^{3r(2\lambda+1)^2} h^{\frac{(2\lambda+1)^2}{4n}} \sin(2\lambda+1)\frac{u\pi}{2\omega}, \end{cases}$$

und das dritte Mal

$$11) \begin{cases} \Phi(u) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda h^{\frac{(2\lambda+1)^2}{4}} \sin(2\lambda+1)\frac{u\pi}{2\omega}, \\ F(u) = \left(\frac{n\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda h^{\frac{n(2\lambda+1)^2}{4}} \sin(2\lambda+1)\frac{nu\pi}{2\omega}, \\ F_r(u) = (-i)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \varepsilon^{3r(2\lambda+1)^2} h^{\frac{(2\lambda+1)^2}{4n}} \sin(2\lambda+1)\frac{u\pi}{2\omega} \end{cases}$$

gesetzt wird.

Der Nachweis, dass diese Grössen $f(u)$ und $f_r(u)$ den Jacobi'schen Relationen genügen, wird durch einfache Summation der Reihen geführt. Im Uebrigen sind $f(u)$ und $f_r(u)$ doppelt periodische Functionen von u und gehen, wenn man nur die Gleichungen (9) und (10) berücksichtigt, für u gleich Null in die oben behandelten Grössen

f resp. f^3 über. Sie hängen also von zwei variabeln Parametern h und u ab, ein Umstand, der für manche Untersuchungen Vortheile bietet.

Darmstadt. L. Kiepert.

F. Klein: Sulle equazioni modulari. (Rendiconti des R. Istituto Lombardo, Sitzung vom 2. Januar 1879; zum Theil abgedruckt in den math. Annalen Bd. XV, S. 86—88.)

Bezeichnet man mit g_2, g_3, Δ die Invarianten des gegebenen elliptischen Integrals, mit g'_2, g'_3, Δ' die Invarianten des transformirten, so kann man auf Grund der Betrachtungen, über die S. 251—252 dieses Repertoriums referirt ist, leicht zeigen, dass schon für $\sqrt[12]{\Delta'}$ bei Primzahltransformation n^{ter} Ordnung ($n>3$) Gleichungen $(n+1)^{ten}$ Grades bestehen, deren Coefficienten ganze Functionen von g_2, g_3, $\sqrt[12]{\Delta}$ sind. Ich gebe Regeln, nach denen man die Coefficienten dieser Gleichungen zweckmässig berechnet, und entwickele einige ihrer einfachsten zahlentheoretischen Eigenschaften. Bei $n = 5$, 7, 13 erhält man so dieselben Gleichungen, welche ich schon früher in den math. Annalen XIV, S. 147, 148, 149 auf Grund anderer Betrachtungen mittheilte. Bei $n = 11$ berechnet sich

$$z^{12} - 90\cdot 11\cdot \sqrt[2]{\Delta}\cdot z^6 + 40\cdot 11\cdot 12g_2\cdot \sqrt[3]{\Delta}\cdot z^4 - 15\cdot 11\cdot 216g_3\cdot \sqrt[4]{\Delta}\cdot z^3$$
$$+ 2\cdot 11\cdot (12g_2)^2\cdot \sqrt[6]{\Delta}\cdot z^2 - 12g_2\cdot 216g_3\cdot \sqrt[12]{\Delta}\cdot z - 11\cdot \Delta = 0$$

(für $z = \sqrt[12]{\Delta'}$), in Uebereinstimmung mit gewissen Schlussfolgerungen, welche Hr. Brioschi kurz vorher hinsichtlich der Form dieser Gleichung auf anderem Wege abgeleitet hatte (Annali di Matematica, ser. 2, t. IX pag. 172). — Da ich nicht zweifeln kann, dass diese Gleichungen bei ihrer grossen Einfachheit in der Transformationstheorie der elliptischen Functionen eine wichtige Rolle spielen werden, so will ich hier auf die ungefähr gleichzeitige, inzwischen erschienene Arbeit von Kiepert aufmerksam machen (Borchardt's Journal Bd. 87 S. 199—217), in der dieselben ebenfalls behandelt werden.

Der Schluss meiner Notiz bezieht sich auf gewisse endliche Systeme linearer Substitutionen bei $\frac{n-1}{2}$ Variablen, welche für die

Primzahltransformation n^{ter} Ordnung dieselbe Rolle spielen sollen, wie die Ikosaedersubstitutionen bei $n = 5$ oder die 168 ternären Substitutionen bei $n = 7$.

F. Klein: Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade. (Math. Annalen XV S. 251—282.)

Diese Arbeit schliesst sich als Fortsetzung an meine Untersuchungen über die Transformation siebenter Ordnung, über welche S. 336—340 dieses Repertoriums Bericht erstattet wurde, und hat dem entsprechend zunächst den Zweck, zu zeigen, dass sich und wie sich die Auflösung solcher Gleichungen siebenten und achten Grades, welche die Gruppe der Modulargleichung haben, auf die Auflösung der Modulargleichung selbst zurückführen lässt. Aber die Darlegung der dabei nöthigen Ueberlegungen gewinnt von selbst einen allgemeineren Charakter, und so will meine Arbeit zugleich ein Programm sein für die Behandlung aller Gleichungen beliebigen Affectes, ein Programm, das ebensowohl die Auflösung der cyclischen Gleichungen durch Wurzelzeichen als die Kronecker-Brioschi'sche Theorie der Gleichungen fünften Grades in sich fasst. Ohne hier auf die Darlegung dieser allgemeinen Gesichtspuncte einzugehen, oder verschiedene neue Formeln aufzuzählen, welche ich zur Behandlung der Gleichungen fünften Grades, der Jacobi'schen Gleichungen achten Grades, des allgemeinen Transformationsproblems der elliptischen Functionen etc. angebe, will ich mich hier darauf beschränken, in kurzen Zügen nur für die Gleichungen siebenten Grades mit 168 Substitutionen die wirkliche Auflösungsmethode zu skizziren.

Schon in meinem vorigen Referate sprach ich von dem Systeme der 168 ternären linearen Substitutionen, welches durch Wiederholung und Combination folgender Operationen entsteht:

$$1)\qquad \lambda' = \gamma\lambda, \quad \mu' = \gamma^4\mu, \quad \nu' = \gamma^2\nu, \qquad \left(\gamma = e^{\frac{2i\pi}{7}}\right)$$

$$2)\qquad \lambda' = \mu, \quad \mu' = \nu, \quad \nu' = \lambda',$$

$$3)\qquad \begin{cases} \sqrt{-7}\cdot\lambda' = (\gamma^6-\gamma)\lambda + (\gamma^5-\gamma^2)\mu + (\gamma^3-\gamma^4)\nu, \\ \sqrt{-7}\cdot\mu' = (\gamma^5-\gamma^2)\lambda + (\gamma^3-\gamma^4)\mu + (\gamma^6-\gamma)\nu, \\ \sqrt{-7}\cdot\nu' = (\gamma^3-\gamma^4)\lambda + (\gamma^6-\gamma)\mu + (\gamma^5-\gamma^2)\nu, \end{cases}$$

und von den vier dabei ungeändert bleibenden ganzen Functionen der λ, μ, ν: f, ∇, C, K. Die Modulargleichung liess sich dabei

durch das Gleichungssystem ersetzen:

$$f = 0, \qquad \frac{-C^3}{1728\,\nabla^7} = J.$$

Es seien nun $x_0, x_1, \cdots x_6$ die sieben Wurzeln einer Gleichung siebenten Grades mit 168 Substitutionen. Dann ist der erste Schritt der, dass man solche 3 rationale Functionen λ, μ, ν der x bildet, welche bei den 168 Permutationen der x die eben angegebenen ternären linearen Substitutionen erfahren. Dies kann durch Processe der Invariantentheorie auf sehr mannigfache Weise geschehen.

Es seien z. B. X, X' X'' irgend drei rationale Functionen von x, welche für $x = x_0, x_1, \cdots x_6$ die Werthe $X_0, X_1, \cdots X_6$ etc. annehmen. Man setze, unter γ wieder eine siebente Einheitswurzel verstanden, zur Abkürzung:

$$\Sigma\gamma^{\nu} X_{\nu} = p_1, \qquad \Sigma\gamma^{4\nu} X_{\nu} = p_4,$$

$$\frac{-1+\sqrt{-7}}{4}\cdot\Sigma\gamma^{6\nu} X_{\nu} = p_6, \qquad \frac{-1+\sqrt{-7}}{4}\,\Sigma\gamma^{3\nu} X_{\nu} = p_3,$$

$$\Sigma\gamma^{2\nu} = p_2,$$

$$\frac{-1+\sqrt{-7}}{4}\,\Sigma\gamma^{5\nu} X_{\nu} = p_5,$$

ebenso $\Sigma\gamma^{\nu} X'_{\nu} = p'_1$ etc. Endlich schreibe man statt der Determinante:

$$\begin{vmatrix} p_i & p_k & p_l \\ p'_i & p'_k & p'_l \\ p''_i & p''_k & p''_l \end{vmatrix}$$

einfach (i, k, l). Dann sind drei Functionen der gesuchten Beschaffenheit durch folgende Formeln gegeben:

$$\begin{cases} \lambda = (4, 3, 5) + (1, 6, 5) + (4, 2, 6), \\ \mu = (2, 5, 6) + (4, 3, 6) + (2, 1, 3), \\ \nu = (1, 6, 3) + (2, 5, 3) + (1, 4, 5). \end{cases}$$

Berechnet man jetzt für diese λ, μ, ν die Formen f, ∇, C, K, so werden Ausdrücke entstehen, die sich bei den 168 Permutationen der x nicht ändern, die also rational bekannt sind. Die Auflösung der Gleichung siebenten Grades für die x ist demnach auf das „Problem der λ, μ, ν“ zurückgeführt: aus den bekannten Werthen von f, ∇, C, K die λ, μ, ν zu berechnen, und zwar rational zurückgeführt.

Nun ist, sofern man nur auf die Verhältnisse der λ, μ, ν

achten will, die Modulargleichung in der oben mitgetheilten Form ein specieller Fall dieses Problems: derjenige, in welchem f insbesondere den Werth Null hat. Die Frage ist also nur noch, wie man das allgemeine Problem der λ, μ, ν auf dieses specielle zurückführt? Dies geschieht mit Hülfe einer Gleichung vierten Grades, die sich, wie man aus den Eigenschaften der Curve $f = 0$ zeigen kann, nicht vermeiden lässt. Es seien nämlich λ', μ', ν' die Unbekannten des „speciellen" Problems; f', ∇' etc. seien die Werthe, welche f, $\nabla, \cdots$ annehmen, wenn man λ', μ', ν' in sie einträgt. So schreibe man folgende Gleichungen:

$$f' = 0,$$

$$\lambda'\lambda + \mu'\mu + \nu'\nu = 0,$$

$$\frac{-C'^3}{1728\,\nabla'^7} = J.$$

Dann giebt die Elimination von $\lambda' : \mu' : \nu'$ für J eine Gleichung vierten Grades, deren Coefficienten ganze Functionen von f, ∇, C, K d. h. von bekannten Grössen sind, die man also a priori aufstellen kann. Eine Wurzel dieser Hülfsgleichung vierten Grades hat man zu bestimmen; sie heisse J_1. Dann hat man die Modulargleichung:

$$f' = 0, \qquad \frac{-C'^3}{1728\,\nabla'^7} = J_1,$$

und berechnet, wenn man sie gelöst hat, die λ, μ, ν des ursprünglichen Problems und also die x_0, x_1, $\cdots x_6$ der vorgelegten Gleichung siebenten Grades auf rationalem Wege.

München. F. Klein.

Siegm. Günther: Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie. (Halle, Verlag von Louis Nebert.) IV. Heft. **Analyse einiger kosmographischer Codices der Münchener Hof- und Staatsbibliothek. 1878.** V. Heft. **Johann Werner aus Nürnberg und seine Beziehungen zur Geschichte der mathematischen und physischen Erdkunde. 1878.** VI. (Schluss-) Heft. **Geschichte der loxodromischen Curve. 1879.**

Das 4. Heft der Sammlung beschäftigt sich mit drei mittelalterlichen Handschriften. Aus der ersten derselben werden mehrere

meteorologische und astronomische Daten — insbesondere über die Eintheilung der Windrose, die Grössenverhältnisse der Planetensphären u. a. — mitgetheilt, welche für die Geschichte dieser Wissenschaften Interesse bieten. Der zweite Codex enthält eine detaillirte Anweisung zur Verzeichniss solcher Plattkarten, wie sie das Mittelalter fast ausschliesslich anwandte. Wir finden hier ein Verzeichniss geographischer Ortsbestimmungen, eine Eintheilung des Grades in Centesimaltheile und eine Regel zur Messung der Entfernung d zweier durch Breite β_1, β_2 und Länge λ_1, λ_2 fixirten Erdorte, welche mit der bekannten Formel der Coordinatengeometrie

$$d = \sqrt{(\beta_1 - \beta_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2}$$

identisch ist. An dritter Stelle wird ein Bruchstück aus einer theologischen Abhandlung Johann's von Gmünden mitgetheilt und besprochen, welches einen gedrängten Ueberblick über die kosmographischen Anschauungen des beginnenden fünfzehnten Jahrhunderts bietet.

Der Nürnberger Mathematiker Werner (1470—1530) hat in seiner Bearbeitung des ersten Buches von Ptolemaeus' Geographie mit vielen Fragen fördernd sich beschäftigt, deren Stellung in der Geschichte bislang nicht gehörig gewürdigt schien. Werner ist es, der die Bestimmung der Polhöhe durch Beobachtung der beiden Culminationen eines Circumpolarsternes lehrte, der für die Bestimmung der Breite ein neues handlicheres Instrument angab und dessen Fehler zu berichtigen versuchte, der endlich eine Reihe neuer, scharfsinniger Projektionsmethoden erfand, von denen eine mit dem Charakter der Aequivalenz ausgestattet ist. In seinen Anhängen zur mathematischen Geographie des Amiruccius hat Werner die Fundamentalprobleme der sphärischen Trigonometrie in durchaus origineller Weise behandelt. Schliesslich ward auf das richtiger Gedanken keineswegs baare astrometeorologische System des eifrigen Witterungsbeobachters näher eingegangen. Hingegen blieb die bekannte Monographie über die Eigenbewegung der achten Sphäre und das gegen diese gerichtete Sendschreiben Coppernic's an Wapowski absichtlich ausser Acht, da diese Gegenstände dem Gebiete der reinen Astronomie zu nahe liegen.

Die Loxodrome galt bis zur Mitte des sechszehnten Säkulums ganz allgemein und noch zwei Jahrhunderte länger beim grossen Haufen der Praktiker als gerade Linie, resp. als Stück eines grössten Kreises. Raymundus Lullus und der anonyme Verfasser des für

die Geschichte der Mathematik hochwichtigen „Martologio“ behandeln sonach die loxodromische Curve als Spezialfall der gewöhnlichen Trigonometrie. Pedro Nunez erkannte die Eigenart der Schifffahrtscurve, Stevin behandelte dieselbe zuerst mathematisch, in Snellius' „Tiphys Batavus“ ward die Theorie der nunmehr als „Loxodrome“ bezeichneten Linie systematisch dargestellt, und durch Mercator-Wright kam die hohe Bedeutung derselben für die cylindrische Projection zur Geltung. Indess krankten noch sämmtliche theoretische Betrachtungen an dem Uebelstand, das zwei charakteristische Curvendreiecke ohne Rücksicht auf deren Lage als congruent angenommen wurden, während sie doch thatsächlich nur einander ähnlich sind. Leibnitz und Jakob Bernoulli halfen diesem Mangel ab und wandten auf das ihnen sehr willkommene Objekt die neue Differentialrechnung an. Die Ausdehnung der loxodromischen Aufgabe auf beliebige Rotationsflächen bahnte Walz an, während Halley den Satz auffand, dass das stereographische Abbild der Kugel-Loxodrome eine logarithmische Spirale ist. Den Fall des Sphäroides, als den für die Praxis interessantesten, studirten eingehend Maclaurin, Simpson, Maupertuis und Schubert. Kästner stellte das bis zu seiner Zeit Geleistete für den Gebrauch des Mathematikers zusammen, Bouguer, Kaschub und Robertson thaten ein Gleiches zum Besten der Schifffahrt. Im neunzehnten Jahrhundert endlich war es besonders Grunert, dessen Arbeiten einen wichtigen Fortschritt charakterisiren; eine neue Perspektive eröffnet der loxodromischen Theorie deren neueste Verallgemeinerung durch Biehringer. — Referent bedauert lebhaft, die zweite Auflage der bekannten Breusing'schen Monographie über Mercator nicht mehr haben benützen zu können, welche mehrfach neues Material für seine Zwecke beibringt, und auf welche, als Ergänzung, demnach hier ausdrücklich hingewiesen werden möge.

Ansbach. S. Günther.

Siegm. Günther: Von der expliciten Darstellung regulärer Determinanten aus Binomialcoëfficienten. (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 24. Jahrgang, 2. Heft.)

„Regulär“ wird hier eine Determinante von folgender Struktur genannt:

$$\begin{vmatrix} \binom{m_1}{n_1} & \binom{m_1}{n_2} & \binom{m_1}{n_3} & \cdots & \binom{m_1}{n_p} \\ \binom{m_2}{n_1} & \binom{m_2}{n_2} & \binom{m_2}{n_3} & \cdots & \binom{m_2}{n_p} \\ \binom{m_3}{n_1} & \binom{m_3}{n_2} & \binom{m_3}{n_3} & \cdots & \binom{m_3}{n_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{m_p}{n_1} & \binom{m_p}{n_2} & \binom{m_p}{n_3} & \cdots & \binom{m_p}{n_p} \end{vmatrix}$$

Es wird gezeigt, dass und wie eine solche Determinante auf eine bekannte und von Naegelsbach eingehend erörterte Funktion zurückgeführt werden kann. Auf Aggregate solcher Determinanten reduciren sich aber auch die Bernoulli'schen Zahlen.

Ansbach. S. Günther.

Siegm. Günther: Eine Relation zwischen Determinanten und Potenzen. (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 24. Jahrgang, 4. Heft.)

Eliminirt man x aus der Function

$$f_{(x)} = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x + 1$$

und deren erster Ableitung

$$f'_{(x)} = n x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 2x + 1$$

im Sinne der dialytischen Methode, so hat die resultirende Determinante den Werth

$$(2 + n)^n.$$

Ansbach. S. Günther.

Siegm. Günther: Einfache Methode der Berechnung der regulären Körper. (Zeitschr. f. d. Realschulwesen. 4. Jahrgang, 1. Heft.)

Im Gegensatz zu allen bisherigen Verfahrungsweisen stereometrischer Natur wird hier von der Eintheilung der Sphäre in congruente Figuren ausgegangen. Fast ohne Rechnung gelingt es, die allgemeinen Ausdrücke für die Radien der einbeschriebenen, umbeschriebenen und kantenberührenden Kugeln hinzuschreiben. Die sphärische Trigonometrie participirt dabei lediglich mit der einfachen Aufgabe: Aus den Winkeln eines gleichschenkligen sphärischen Dreiecks dessen Basis zu berechnen.

Ansbach. S. Günther.

Siegm. Günther: Beitrag zur Theorie der congruenten Zahlen. (Sitzungsberichte der k. böhm. Gesellsch. d. Wissenschaften, November 1878.)

„Congruent" wird nach Woepcke's Vorgang eine ganze Zahl a dann genannt, wenn das System zweier simultanen Gleichungen

$$x^2 + a = y^2, \quad x^2 - a = z^2$$

rationale Auflösungen zulässt. Es wird dargethan, dass die Lösung dieses Systemes, sowie die Untersuchung des Charakters von a auf eine Generalisirung des Pell'schen Problemes, resp. auf die Diskussion des Wurzelausdruckes

$$\sqrt{\frac{a}{m - m^3}}$$

hinausläuft. Zahlreiche Beispiele sprechen für die bequeme Verwendbarkeit dieser Formel.

Ansbach. S. Günther.

Siegm. Günther: Anwendung schiefwinkliger Coordinaten auf ein Problem der Potentialtheorie. (Sitzungsberichte der k. böhm. Gesellsch. d. Wissenschaften, Januar 1879.)

Nach einer geschichtlichen Einleitung über die frühere Verwendung schiefwinkliger Coordinatensysteme wird das Potential eines homogenen Tetraëders für einen seiner Endpunkte aufgestellt und nachgewiesen, dass das bezügliche dreifache Integral elementar ausgewerthet werden kann. Hierauf wird ein anscheinend neuer Lehrsatz bewiesen, aus welchem die Anziehung des Tetraëders — und damit auch eines willkürlichen Polyëders — ohne jede weitere Integration abgeleitet werden kann, sobald sie für einen der Eckpunkte gefunden ist.

Ansbach. S. Günther.

Siegm. Günther: Das mathematische Grundgesetz im Bau des Pflanzenkörpers. (Kosmos. 4. Band.)

In der historischen Entwickelung der bekannten Theorie, welcher zufolge die Anordnung der Blattstiele an Pflanzenstengeln, der Schuppen an Nadelholzzapfen u. s. w. nach bestimmten mathematischen Gesetzen sich richtet, werden drei verschiedene Stadien unterschieden. Schimper und Braun fixirten die von Bonnet blos geahnte Idee mit Hülfe der Kettenbrüche, resp. der Lamé'schen Reihen, Zeising brachte diese Erfahrungsthatsache in allerdings noch sehr

phantastischer Weise mit dem goldenen Schnitt in Verbindung, Schwendener endlich deckte die mechanischen Fundamentalbeziehungen zwischen der einen und anderen Auffassung auf. Zumal auf die arithmetischen Eigenschaften der Blattstellung wird in der Abhandlung im Detail eingegangen.

Ansbach. S. Günther.

Siegm. Günther: Die mathematische Sammlung des germanischen Museums zu Nürnberg. (Leopoldina 1878.)

Bericht über diese vom Referenten neu geordnete Sammlung. Von interessanteren Stücken derselben werden ein geodätisches Universalinstrument, die Planetenuhr des bekannten Pfarrers Hahn und eine von dem Nürnberger Astronomen Wurzelbauer herrührende Collektion grösserer Instrumente (zum Theil mit Tycho'schen Circulartransversalen) hervorgehoben.

Ansbach. S. Günther.

Sophus Lie: Neue Integrationsmethode der Monge-Ampère'schen Gleichung. (Archiv for Math. og Naturvidenskab, Bd. 2, p. 1—9. Christiania 1876—1877.)

Eine partielle Differentialgleichung 2. O. der Form

$$rt - s^2 + Ar + Bs + Ct + D = 0 \qquad (1)$$

mit zwei distincten und allgemeinen intermediären Integralen

$$u_1 - f(v_1) = 0\,, \qquad u_2 - \varphi(v_2) = 0$$

erhält durch eine zweckmässige Berührungstransformation die Form

$$s = 0.$$

Wünscht man eine solche Gleichung (1) zu integriren, so bildet man nach Bour die beiden vollständigen Systeme, deren Lösungen bez. $u_1 v_1$ und $u_2 v_2$ sind. Gelingt es, zu jedem Systeme *eine* Lösung zu finden, so verlangt die Integration von (1) nur eine Anzahl Quadraturen.

Sophus Lie: Theorie des Pfaff'schen Problems. (Archiv for Math. og Naturv. Bd. 2, p. 338—379. Christiania 1876—1877.)

Die Reductibilität eines Pfaff'schen Ausdrucks

$$X_1 dx_1 + \cdots + X_n dx_n$$

auf die bekannten Normalformen wird in einer neuen einfachen Weise nachgewiesen. Der Verfasser behauptet, dass die Kriterien, die zwischen den verschiedenen Typen des Ausdrucks $\Sigma X dx$ scheiden, zuerst von Grassmann in seiner Ausdehnungslehre (1861) gegeben sind. Im Uebrigen giebt die Abhandlung eine ausführliche Darstellung einer Integrationsmethode des Pfaff'schen Problems, die der Verfasser schon 1873 skizzirte.

Sophus Lie: Die Störungstheorie und die Berührungstransformationen. (Archiv for Math. og Naturv. Bd. 2, p. 1—28. Christiania 1877.)

Die allgemeinste Transformation

$$\left.\begin{aligned} x_k' &= X_k(x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n) \\ p_k' &= P_k(x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

die gleichzeitig sämmtliche simultane Systeme der Form

$$dx_k = \frac{dF}{dp_k}\,dt\,, \quad dp_k = -\frac{dF}{dx_k}\,dt \quad (2)$$

in Systeme derselben Form umwandelt, wird nach Jacobi und Bour bestimmt durch die Gleichungen

$$(X_i X_k) = (X_i P_k) = (P_i P_k) = 0\,, \quad (X_k P_k) = 1 \quad (3)$$

Nach den Untersuchungen des Verfassers über Berührungstransformationen bestimmen die soeben geschriebenen Relationen zugleich das allgemeinste Grössensystem $X_i P_i$, das eine Bedingungsgleichung der Form

$$P_1 dX_1 + \cdots + P_n dX_n = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n + d\Omega$$

erfüllt. Die Abhandlung sucht den inneren Grund dieses Zusammenhanges zwischen der Störungstheorie und der Theorie der Berührungstransformationen.

Verlangt man die allgemeinste Transformation, die nur *ein* System (2) in ein ähnliches System umwandelt, so sind die Relationen (3) nicht mehr nothwendig. Alle Transformationen, die eine solche Forderung erfüllen, werden bestimmt.

Sophus Lie: Petite contribution à la théorie de la surface Steinerienne. (Archiv for Math. og Naturv. Bd. 3, p. 84—91. Christiania 1878.)

Versteht man unter dem Pol einer Ebene hinsichtlich eines Kegelschnitts den Pol der Durchschnittsgeraden der gegebenen Ebene

mit der Ebene des Kegelschnitts, so besteht der Satz: Der Ort der Pole einer festen Ebene hinsichtlich aller Kegelschnitte, die auf einer Steiner'schen Fläche vierter Ordnung dritter Classe liegen, ist im Allgemeinen eine andere solche Fläche. Wenn jedoch die Ebene die vorgelegte Fläche berührt, so ist die erzeugte Fläche eine Fläche zweiten Grades.

Zu jeder Steiner'schen Fläche vierter Ordnung dritter Classe gehören somit ∞^2 Flächen zweiten Grades und ∞^3 Steiner'sche Flächen vierter Ordnung dritter Classe.

Diese Sätze bestehen noch, wenn die vorgelegte Fläche in eine Linienfläche dritter Ordnung ausartet.

Sophus Lie: Synthetische Untersuchungen über Minimalflächen. I. (Archiv for Math. og Naturv. Bd. 2, p. 1—42. Christiania 1877.) **Beiträge zur Theorie der Minimalflächen. I.** (Math. Ann. Bd. XIV, p. 331—416.)

Nimmt man zwei Raumcurven c und k, die einen Punkt p gemein haben, und verschiebt c parallel mit sich selbst derart, dass p die Curve k durchläuft, so kann die erzeugte Fläche zugleich durch Translationsbewegung der Curve k erzeugt werden. Sie enthält daher ∞^1 Curven c und zugleich ∞^1 Curven k. In jedem Punkte der Fläche liegen die beiden Haupttangenten harmonisch hinsichtlich der hindurchgehenden Curven c und k. Jede solche Fläche besitzt die Gleichungsform

$$x = A(t) + A_1(\tau);\; y = B(t) + B_1(\tau);\; z = C(t) + C_1(\tau).$$

Setzt man insbesondere voraus, dass

$$dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0 = dA_1^2 + dB_1^2 + dC_1^2$$

ist, so ist die Fläche nach Monge eine Minimalfläche. Sind die Curven c und k congruent und zugleich gleichgestellt, so bilden die beiden besprochenen Curven-Schaaren eine irreductible Schaar. Eine solche Minimalfläche nennt der Verfasser eine Doppelfläche.

Ausgehend von diesen geometrischen Betrachtungen sucht der Verfasser eine allgemeine projectivische Theorie der algebraischen Minimalflächen zu entwickeln. Unter seinen Resultaten mögen hier nur die folgenden genannt werden. Sei R der Rang der Curve c, und M die Multiplicität des Kugelkreises auf c's Developpable; und seien R' und M' die entsprechenden Zahlen der Curve k. Alsdann ist die Classe C der erzeugten Minimalfläche gleich

$$M'(R - M) + M(R' - M').$$

Ist die Fläche eine Doppelfläche, so ist

$$C = M(R - M);$$

ist sie reell und keine Doppelfläche, so kommt

$$C = 2M(R - M).$$

Die Zahlen M und R befriedigen die Relationen

$$R - M \gtreqless 3; \; M \lesseqgtr R - M.$$

Vermöge dieser Formeln ist es nun häufig leicht, alle Minimalflächen von gegebener Classe zu bestimmen. Soll z. B. $C = 3$ sein, so muss $C = M(R - M)$, $M = 1$, $R = 4$ sein. Die entsprechende Minimalfläche ist eine Cayley'sche Linienfläche dritter Ordnung und dritter Classe, die jedoch immer imaginär ist. Soll überhaupt die Classe einer reellen Minimalfläche eine Primzahl sein, so ist $M = 1$, und $C = R - 1$. Die entsprechenden Flächen werden sämmtlich bestimmt. Soll die Classe dividirt mit 2 eine Primzahl sein, so ist $C = 2M(R - M)$, $M = 1$. Auch diese sind in jedem einzelnen Falle leicht zu bestimmen.

Ist die Ordnung von c und k bez. gleich o und ω, so ist die Ordnung der Fläche gleich $o\omega - \varrho$, wo ϱ nach einer bemerkenswerthen Regel zu berechnen ist. Die Zahl ϱ ist immer gleich Null, wenn c und k keinen gemeinsamen unendlich entfernten Punkt haben. Es giebt keine *reelle* Minimalfläche, deren Ordnung gleich 2, 3, 4, 5, 7, 8 ist. Dagegen bleibt es unentschieden, ob es reelle Flächen sechster Ordnung giebt. Ist dies der Fall, so ist die Classe einer jeden solchen Fläche gleich 9.

Der Schnitt mit der unendlich entfernten Ebene besteht nur aus geraden Linien, die man erhält, wenn man die unendlich entfernten Punkte der Curve c mit den entsprechenden Punkten der Curve k durch Gerade verbindet. Die Ordnung einer umgeschriebenen Cylinderfläche ist gleich

$$M\omega + M'o.$$

Die Multiplicität der unendlich entfernten Ebene als Tangentenebene ist gleich

$$M'(R - 2M) + M(R' - 2M').$$

Sophus Lie: Sätze über Minimalflächen I, II, III. (Archiv for Math. og Naturv. Bd. III, p. 166—176, 224—233, 340—351. Christiania 1878.)

Beiträge zur Theorie der Minimalflächen. II. (Math. Ann. [noch nicht erschienen]).

Enthält eine Minimalfläche eine ebene Krümmungslinie*), so ist die Fläche algebraisch, wenn die Curve die Evolute einer ebenen algebraischen Curve ist, und nur in diesem Falle. Berührt eine Minimalfläche eine Cylinderfläche nach einer nicht ebenen geodätischen Curve, so ist die Fläche nur dann algebraisch, wenn die Curve selbst algebraisch ist. Die Minimalfläche, die die Evolute (Polarfläche) einer algebraischen Raumcurve C nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte berührt, ist algebraisch. Eine solche Fläche ist zugleich eingeschrieben in den Evoluten von C's Focalcurven. Zu jeder algebraischen Minimalfläche gehören jedenfalls ∞^4 algebraische Raumcurven, deren Evoluten um die Fläche umgeschrieben sind. Insbesondere giebt es ∞^3 Evoluten, die nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte berührt.

Die Tangentenkegel einer Minimalfläche berühren dieselbe nach ∞^3 Curven. Zu diesen Curven entsprechen auf der Bonnet'schen Biegungsfläche diejenigen ∞^3 Curven, nach denen die letzte Fläche die soeben besprochenen Evoluten algebraischer Raumcurven berührt. Jeder algebraische Kegel ist umschrieben um ∞^∞ algebraische Minimalflächen, die durch eine gemeinsame elegante Construction bestimmt werden.

Nimmt man unter den Tangentenebenen einer algebraischen Minimalfläche nach einem arbiträren algebraischen Gesetze einfach unendlich viele, so ist die hervorgehende Developpable immer um ∞^∞ algebraische Minimalflächen umgeschrieben. Dieselben werden durch eine elegante Construction bestimmt. Die Evolute einer algebraischen Raumcurve ist somit um ∞^∞ algebraische Minimalflächen umgeschrieben.

Die allgemeinste Minimalfläche, die auf ∞^1 mit ihr ähnlichen Flächen abgewickelt werden kann, wird erhalten, wenn man die Weierstrass'sche Function $F(s)$ gleich

$$(C_1 + C_2 i)\, s^{m_1 + m_2 i}$$

setzt. Ist insbesondere $m_2 = 0$, so erhält man bekanntlich die auf Rotationsflächen abwickelbaren Minimalflächen.

Sophus Lie: Theorie der Transformationsgruppen III. Bestimmung aller Gruppen einer zweifach ausgedehnten Punkt-Mannigfaltigkeit. (Archiv for Math. og Naturv. Bd. III, p. 93—165. Christiania 1878.)

*) Setzt man im ersten Punktum statt „Krümmungslinie" insbesondere „geodätische Curve", so erhält man einen von Henneberg herrührenden Satz.

Diese Abhandlung schliesst sich als Fortsetzung an zwei frühere (Archiv for Math., Bd. I. 1876). Sie zerfällt in zwei Abschnitte. In dem ersten Abschnitte entwickelt der Verfasser allgemeine Sätze, die sich auf Transformationsgruppen eines n-fach ausgedehnten Raumes beziehen. Unter denselben möge hier nur der folgende seinen Platz finden.

Seien $A_1 f \cdots A_i f$ Ausdrücke der Form

$$A_i f = X_{i1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_{in} \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

die paarweise Relationen der Form

$$A_i\big(A_k(f)\big) - A_k\big(A_i(f)\big) = \Sigma c_{iks} A_s f \, (c_{iks} = \text{Const.})$$

erfüllen. Und seien $A_1' f \cdots A_r' f$ analoge Ausdrücke in $x_1' \cdots x_n'$, die ebenso Relationen der Form

$$A_i'\big(A_k'(f)\big) - A_k'\big(A_i'(f)\big) = \Sigma d_{iks} A_s' f \, (d_{iks} = \text{Const.})$$

erfüllen. Setzen wir voraus, dass die n Gleichungen

$$A_1 f = A_1' f \cdots A_r f = A_r' f$$

durch eine *Berührungs*-Transformation zwischen $x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$ und $x_1' \cdots x_n' p_1' \cdots p_n'$ erfüllt werden können. Sollen diese Gleichungen insbesondere durch eine *Punkt*transformation zwischen $x_1 \cdots x_n$ und $x_1' \cdots x_n'$ befriedigt werden können, so ist es hierzu nothwendig und hinreichend, dass die beiden r-gliedrigen Gleichungssysteme $A_i f = 0$ und $A_i' f = 0$ gleichviele unabhängige Gleichungen enthalten.

Dieser Satz erlaubt immer zu entscheiden, ob eine vorgelegte Transformationsgruppe durch Einführung von zweckmässigen Variabeln auf eine vorgelegte Form gebracht werden kann.

Der zweite Abschnitt giebt die Bestimmung von allen Gruppen von Punkttransformationen einer Ebene. Die angewandte Methode beruht auf folgender Bemerkung. Seien $A_1 f \cdots A_r f$, wo

$$A_i f = \xi_i(xy) p + \eta_i(xy) q$$

r unabhängige inf. Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe. Alsdann besitzt die allgemeinste inf. Transformation der Gruppe die Form

$$c_1 A_1 f + \cdots + c_r A_1 f,$$

wo die c arbiträre Constanten sind. Man denke sich jetzt die ξ_i und η_i nach den Potenzen von x und y entwickelt. Setzt man voraus, dass $r > 2$ ist, so kann man immer die c_i derart wählen, dass die inf. Transformation $\Sigma c A f$ nur Glieder von erster und

höherer Ordnung hinsichtlich x und y enthält. Hierbei bleiben sogar jedenfalls $r - 2$ Constanten c vollständig unbestimmt. Es giebt daher jedenfalls $r - 2$ inf. Transformationen, die in der Umgebung des Werthsystems $x = 0$ $y = 0$ von erster Ordnung hinsichtlich x und y sind. In entsprechender Weise findet man jedenfalls $r - 6$ inf. Transformationen von zweiter Ordnung, $r - 12$ Transformationen von dritter Ordnung u. s. w.

Bildet man nach diesen Vorbereitungen die Gleichungen

$$A_i\big(A_k(f)\big) - A_k\big(A_i(f)\big) = \Sigma c_{iks} A_s f,$$

die bekanntlich bestehen sollen, so erkennt man, dass der Werth von einigen Constanten c_{iks} a priori angegeben werden kann. Ist in der That $A_i f$ eine Transformation i^{ter} Ordnung und $A_k f$ eine Transformation k^{ter} Ordnung, so ist $A_i\big(A_k(f)\big) - A_k\big(A_i(f)\big)$ von $(i + k - 1)^{ter}$ oder noch höherer Ordnung, und daher enthält die rechte Seite der letzten Gleichung nur Grössen $A_s f$, deren Ordnung gleich oder grösser als $i + k - 1$ ist.

Diese Betrachtung giebt durch verhältnissmässig einfache Rechnungen die Bestimmung aller Gruppen von Punkt-Transformationen einer Ebene.

Sophus Lie: Theorie der Transformationsgruppen. IV. (Archiv for Math. og Naturv. Bd. 3, p. 375—460. Christiania 1878.)

Auch diese Fortsetzung der vorangehenden Abhandlung zerfällt in zwei Abschnitte. Im ersten Abschnitte wird gezeigt, dass jede Gruppe von Punkttransformationen eines n-fach ausgedehnten Raumes, die n^2 oder $n^2 - 1$ inf. Transformationen erster Ordnung (siehe das Referat der vorangehenden Abhandlung) enthält, durch Einführung von zweckmässigen unabhängigen Variabeln in die allgemeine lineare Gruppe oder in eine Untergruppe derselben übergeführt werden kann. Eine solche Gruppe hat keine inf. Transformationen von dritter oder höherer Ordnung. Sie hat entweder keine oder auch n Transformationen zweiter Ordnung.

Der letzte Abschnitt bestimmt alle Gruppen von Berührungstransformationen einer Ebene. Es giebt nur drei solche Gruppen, die sich nicht in Gruppen von *Punkt*transformationen umwandeln lassen. Typen derselben sind die zehngliedrige Gruppe, die alle Kreise der Ebene in Kreise umwandelt, zusammen mit einer sieben- und einer sechsgliedrigen Untergruppe derselben.

Wenn eine Gruppe vorgelegt ist, kann man immer jede Differentialgleichung

$$f(xyy' \cdots y^{(n)}) = 0$$

angeben, die die Gruppe gestattet. Hierauf gründet sich, wie der Verfasser schon 1874 (Göttinger Nachr. Nr. 22) angegeben hat, eine Classification der gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen zwei Variabeln, und zugleich eine rationelle Integrationsmethode solcher Gleichungen, die überhaupt eine Transformationsgruppe besitzen.

Sophus Lie: Classification der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Curven. (Universitätsprogramm, p. 1—45. Christiania.)

Der Verfasser beschäftigt sich schon seit 1872 mit der Bestimmung solcher Eigenschaften der Differentialgleichungen, die bei allen analytischen Umformungen ungeändert bleiben. Um die Tragweite und überhaupt das Wesen seiner Untersuchungsmethode an einem guten und gleichzeitig wichtigen Beispiele auseinanderzusetzen, nimmt er die Differentialgleichung der geodätischen Curven und sucht die Transformationsgruppe derselben.

Ist das Bogenelement einer Fläche bestimmt durch die Gleichung

$$ds^2 = F(xy)dxdy,$$

so werden die geodätischen Curven dieser Fläche definirt durch die Differentialgleichung 2. O.

$$F\frac{d^2y}{dx} = \frac{dF}{dx}\frac{dy}{dx} - \frac{dF}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Ist nun F eine arbiträre Function von x und y, so gestattet diese Gleichung gar keine inf. Punkttransformation. Das heisst: es ist in diesem allgemeinen Falle unmöglich, den Grössen x und y solche Incremente

$$\delta x = \xi(xy)\delta t, \quad \delta y = \eta(xy)\delta t$$

zu geben, dass jede geodätische Curve in eine eben solche, inf. benachbarte Curve übergeführt wird.

Es stellt sich daher die Aufgabe, die Grösse F in allgemeinster Weise derart zu bestimmen, dass die Differentialgleichung der geodätischen Curven eine inf. Transformation gestattet. Es giebt drei Flächenclassen, die diese Forderung erfüllen. Entweder kann F durch Einführung von zweckmässigen Grössen $x'(x)$ und $y'(y)$ als neue x und neue y die Form

$$F = e^{\alpha x}\Phi(x - y) \qquad (\alpha = \text{Const.}) \qquad \text{(A)}$$

erhalten. Jede hierher gehörige Fläche besitzt die charakteristische Eigenschaft, auf ∞^1 mit ihr ähnlichen Flächen abwickelbar zu sein. Oder auch kann F die Form

$$y\varphi(\alpha) + \Phi(x) \tag{B}$$

erhalten. Dabei sind φ und Φ näher bestimmt durch zwei gewöhnliche Differentialgleichungen, die in der Abhandlung integrirt werden. Oder endlich kann F die Form

$$\varphi(x+y) + \Phi(x-y) \tag{C}$$

erhalten. Dabei sind wiederum φ und Φ durch gewöhnliche Differentialgleichungen als Functionen ihrer Argumente bestimmt. Von diesen Gleichungen werden mehrere Particularlösungen angegeben.

Gestattet die Gleichung der geodätischen Curven mehrere inf. Transformationen, so bilden dieselben eine Gruppe, die entweder 2 oder 3 oder 8 unabhängige inf. Transformationen enthält. Im letzten Falle hat die Fläche constantes Krümmungsmass. Die beiden anderen Fälle führen auf eine Reihe Flächenfamilien, die sämmtlich bestimmt werden.

Kann F in zwei Weisen die Form (A) erhalten, so kann man setzen

$$F = (x-y)^m .$$

Kann F sowohl die Form (A) wie die Form (B) erhalten, so ist

$$F = yx + 1 ;$$

in diesem Falle kann F zugleich die Form (C) erhalten; die betreffenden Flächen gestatten *drei* inf. Transformationen. Sie sind die einzigen Flächen, die gleichzeitig der Classe (B) und der Classe (C) gehören. Kann endlich F sowohl die Form (A) wie die Form (C) erhalten, so hat F eine der folgenden Formen

$$F = x + iy \,, \quad F = \frac{A}{(x+y^2)} + \frac{B}{(x-y)^2} \,, \quad F = \Omega(x-y)$$

wobei Ω durch eine integrirbare Differentialgleichung bestimmt ist.

Gehört eine Fläche der Classe (C), so verlangt die Bestimmung ihrer geodätischen Curven nur Differentiation; gehört sie der Classe (B), so ist noch eine Quadratur erforderlich. Gehört sie endlich der Classe (A), so muss man eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung integriren.

Paris, Juillet 1879.

A Monsieur Hermite,
Membre de l'Académie des Sciences.

Très cher et très-honoré Confrère.

Vous avez bien voulu me communiquer la 4e livraison du 2e volume du Répertoire de Mathématiques pures et appliquées publié à Leipzig par MM. le Dr. Leo Koenigsberger et le Dr. Gustave Zeuner, en attirant mon attention sur un article relatif à une publication de M. le Dr. A. Vogler intitulée: *Instruction sur la construction et l'usage des tables graphiques* etc. et qui a paru à Berlin en 1877.*) Dans cette courte analyse que M. le Dr. Vogler donne lui-même de son livre, il se plaint que j'aie formulé des réclamations de priorité d'abord dans les *Comptes rendus* de l'Académie des sciences (Séance du 26 Novembre 1877, tome LXXXV p. 1012) ensuite dans le ***Résumé historique*** relatif aux méthodes graphiques, qui figure dans le volume intitulé: *Notices sur les modèles, cartes et dessins relatifs aux travaux des Ponts-et-Chaussées réunis par les soins du Ministère des Travaux publics* pour l'Exposition universelle à Paris en 1878, ***imprimerie Nationale.*** Ces attaques, comme il les appelle (*Angriff*), n'ont d'autre fondement, suivant lui, que de fausses interprétations de certains passages de son livre, et des rapprochements forcés. Son livre étant divisé en trois parties dont la seconde traite des instruments de calcul, et la troisième de l'approximation que l'on obtient en usant soit de ces instruments, soit des tables graphiques, il ne comprend pas que j'aie pu avancer „qu'aucun principe nouveau n'a été énoncé dans ce livre; — que les figures les plus importantes sont la reproduction ou l'imitation de celles qui sont annexées au mémoire inséré dans les Annales des Ponts-et-Chaussées de 1846.." Il excipe de l'existence de la seconde et de la deuxième partie de son ouvrage, et du chapitre qu'il a consacré dans la première à la recherche de l'approximation obtenue, pour dire que les différences sautent aux yeux; et comme il a nettement établi mes droits dans la Préface de son ouvrage, dans sa notice historique et dans plusieurs passages, il s'étonne de la persistance de ma réclamation.

J'aurais voulu ne pas rentrer dans un débat que je croyais complétement clos depuis la publication de mon ***Résumé histo-***

*) Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln und zu deren Gebrauch etc.

rique dont un exemplaire est ci-joint. Mais, puisque M. Vogler ne se tient-pas pour satisfait, je ne vais pas comme lui, m'en tenir à des allégations vagues, mais indiquer avec précision les faits qui ont motivé ma plainte.

Vers la fin de l'année 1877, on mit sous mes yeux un recueil de six planches intitulé *sechs graphische Tafeln* etc. (six tables graphiques pour abréger les calculs) publié cette année même à Berlin par M. A. Vogler, avec quelques pages de texte, et je reconnus immédiatement dans la première de ces planches une reproduction de l'Abaque que j'ai présenté à l'Académie des sciences en 1843. Comme mon nom n'était cité ni sur la figure ni dans le texte, je crus devoir signaler le fait à l'Académie. *Comptes rendus* T. LXXXV, p. 1012.

M. Vogler, ému de ma communication, m'écrivit le 20 Décembre en m'adressant l'ouvrage complet dont il avait extrait, pour en faire une édition séparée, les six tables en question; il déclara qu'il reconnaissait parfaitement mes droits de priorité, me renvoya aux passages du texte où il les fait ressortir, s'excusa sur la brièveté de l'explication placée en tête de l'édition séparée de n'y avoir pas mentionné mon nom et, repoussant jusqu'à l'ombre d'un soupçon d'indélicatesse littéraire me pria de le justifier auprès des lecteurs des comptes rendus. Une note insérée au Compte rendu de la séance du 24 décembre 1877 fit droit au désir de M. Vogler, au delà même de ce qu'il m'était possible de concéder, en disant: „L'ouvrage complet, qui a été adressé à M. Lalanne, donne pleine satisfaction à la réclamation du savant français". On aurait dû ajouter „suivant M. Vogler".

Je ne pouvais guère, en effet, partager l'avis du réclamant, après avoir pris connaissance des passages qu'il m'indiquait comme me faisant une juste part dans l'ordre d'idées dont il traite. Il cite sa préface: or j'y vois annoncer que depuis 1867, déjà, il était en possession des méthodes à l'aide des quelles on substitue des constructions graphiques à des tables numériques à double entrée, et même du principe de *l'anamorphose géométrique.* Un certain, M. Herrmann (dont j'aurai un mot à dire tout à l'heure), a bien attiré son attention „sur le système de coordonnées logarithmiques de Lalanne; . . . . . mais ce qui m'a *surtout* intéressé, ajoute-t-il, c'est la lecture d'une note de M. Kapteyn dont l'auteur, également sans avoir connaissance des travaux antérieurs, est arrivé *par la*

29*

même méthode que moi (sic) à remplacer les courbes des tableaux par des lignes droites".

Cette méthode, M. Vogler, oublie de le dire, est celle qui a été présentée à l'Academie en 1843, qui a été l'objet d'un rapport très-favorable de Cauchy, au nom d'une commission dont Elie de Beaumont et Lamé faisaient aussi partie (*Comptes rendus* T. XVII p. 492), c'est la méthode de *l'anamorphose géométrique* fondée sur l'emploi de coordonnées convenablement graduées.

Comment M. Herrman nétait-il à même de renseigner M. Vogler à mon endroit? Par la raison toute simple qu'il avait, en 1875, publié à Brunswick, sous le titre de multiplication graphique (*Das graphische Einmaleins* etc.) une reproduction pure et simple de mon Abaque, de cette même figure qui, formellement spécifiée dans le rapport de Cauchy, éditée en français, en allemand et anglais des 1846, avait déjà été répandue à un très grand nombre d'exemplaires en divers pays: je me hâte d'ajouter que M. Herrmann, qui avait été compris dans ma réclamation de priorité, s'est empressé de s'excuser et d'exprimer de sincères regrets. Il me faisait remarquer que, de l'aveu même de M. Vogler, c'était lui Herrmann qui avait signalé à celui-ci mon système de coordonnées. Je mets donc aujourd'hui M. Herrmann hors du débat; mais j'ai le droit de demander comment, instruit de l'origine de la géométrie anamorphique, c'est *surtout* le mémoire de M. Kapteyn publié en 1876, 33 ans après le rapport de M. Cauchy, 30 ans après le mien, qui inspire à M. Vogler un si vif intérêt? Pourquoi, ayant reproduit *mon Abaque*, c'est à M. Herrmann qu'il renvoie ses lecteurs (page 40)? Pourquoi, il a consacré à la prétendue invention de M. Herrmann, dans un Recueil périodique publié à Stuttgard*), un article dans lequel il ne fait pas la moindre allusion au véritable auteur, où rien n'indique qu'il s'agit de la reproduction pure et simple d'une publication faite trente ans auparavant? Pourquoi, ayant sous les yeux mon mémoire de 1846, il attribue à M. Helmert une anamorphose qui donne des cercles au lieu de lignes droites, genre de transformation qui est formellement expliquée dans ce mémoire? (p. 45). Pourquoi, plaçant au commencement de son livre, une figure du genre de celles que j'ai publiées pour la première fois en 1842, dans l'appendice à la traduction de la météorologie de Kaemtz, pourquoi m'empruntant la théorie générale des tables graphiques et de l'anamorphose géo-

*) Zeitschrift zum Vermessungswesen etc. V. Band, 1. Heft, Februar 1876.

métrique, il se garde de mentionner ces imitations et ces emprunts et se borne à citer comme une simple „*Notice* assez étendue où l'on trouve plusieurs exemples intéressants, les uns au point de vue théorique, les autres au point de vue de leur application possible", mon mémoire de 1846, celui que, sur le rapport des illustres maîtres cités plus haut, l'Académie a jugé digne de l'insertion au Recueil des Savants étrangers?

Tels sont les points sur lesquels j'avais appelé l'attention des juges impartiaux dans le *Résumé historique* déjà cité et sur aucun desquels M. Vogler ne s'est expliqué. Qu'importe, après ce silence significatif, qu'il vienne dire que son livre ne se borne pas à la théorie des tables graphiques et de l'anamorphose? Je n'ai jamais revendiqué, dans ce livre, que la part qui m'y appartient et je n'hésite pas à répéter que c'est elle qui lui donne sa raison d'être et son principal intérêt. Il aurait été plus habile à l'auteur de le reconnaître loyalement que de dissimuler sous les voiles que je viens de déchirer les emprunts qu'il m'a faits.

Heureusement pour moi, des témoignages qu'on peut citer même après l'accueil que l'Académie avait fait à mon mémoire, m'ont rendu en divers pays meilleure justice. M. Culmann, de Zurich, M. Favaro, de Padoue, m'ont fait, dans leurs beaux livres sur la statique graphique, une part dont je ne puis que leur être reconnaissant. En publiant une édition américaine de l'Abaque, le lieutenant William Bixby, de West-Point, me l'adressait naguère avec une lettre où il m'annonce qu'elle est „constructed in accordance with the Method for which the world over you its thankes". Enfin le jury international des récompenses, pour la classe 66, décernait, l'année dernière, à l'ensemble de mes méthodes graphiques, le diplôme d'honneur, la plus haute récompense dont il put disposer. S'il s'en était tenu à la part que me fait M. Vogler, dans son livre, il n'est guère probable que j'eusse été aussi bien traité.

Tels sont, très cher et très honoré confrère, les faits que je livre à votre appréciation, et à celle du monde savant, qui jugera entre M. Vogler et moi.

Agréez, je vous prie, l'expression de mes sentiments de haute considération et d'affectueux dévouement

L. Lalanne.

H. G. Zeuthen: Om Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit*). Publié à la célébration de l'anniversaire quatre-centenaire de l'université de Copenhague. Copenhague 1879, librairie de Gyldendal (51 p.).

Les surfaces du quatrième ordre à une conique double ont été étudiées par MM. Kummer, Clebsch, Geiser, Cremona, R. Sturm, et, comme ou peut déduire par une transformation homographique, les propriétés des surfaces générales de celles des surfaces anallagmatiques, aussi par MM. Moutard, Laguerre, Darboux et par plusieurs autres savants. J'y suis revenu en appliquant à l'étude des surfaces de nouveaux moyens, qui font ressortir très-simplement les propriétés générales (celles où il n'est pas question de réalité), étudiées jusqu'à présent, et qui servent en même temps à resoudre les questions de réalité et à déterminer les formes des surfaces, ce qu'on n'avait fait que pour les surfaces anallagmatiques.

Dans la *première* partie j'applique la circonstance que le contour apparent de la surface, projetée d'un point de la conique double, est une courbe générale du quatrième ordre, à l'étude des propriétés générales de la surface. Les propriétés des 28 tangentes doubles du contour montrent les faits connus, que la surface contient 16 droites, et que l'enveloppe des plans dont les courbes d'intersection sont composées de deux coniques se décompose en cinq cônes (les cônes Kummeriens). Les projections de ces coniques forment 10 des 63 systèmes de coniques tangentes quatre fois au contour. Une courbe de la surface aura en général pour projection une courbe tangente au contour en tous les points où elle le rencontre.

Certaines courbes de la surface se présentent plus commodément lorsqu'on la projette du sommet d'un cône de Kummer. Alors le contour apparent sera composé de la trace du cône prise deux fois, et d'une courbe du quatrième ordre à deux points doubles tangente quatre fois à la trace. Cette représentation conduit, dans la *deuxième* section, à la construction suivante de la surface**): Soit P un point fixe, et σ_2 et δ_2 deux surfaces du second ordre, et désignons par SS' et DD' les points d'intersection de ces surfaces avec une droite variable par P; déterminons ensuite deux couples de points de cette droite M_1M_2 et $M_1'M_2'$, qui sont — toutes deux — harmo-

*) Sur les surfaces du quatrième ordre à une conique double.

**) Si δ_2 est une sphère au centre P, cette construction se reduira à celle qu'indique M. Darboux à la p. 122 de son ouvrage: Sur une classe remarquable etc.

niquement conjuguées par rapport à DD', pendant que l'une est harmoniquement conjuguée par rapport à PS, l'autre par rapport à PS'. Alors le lieu du point M est une surface du quatrième ordre, ayant pour conique double la ligne de contact de la surface δ_2 avec son cône circonscrit au sommet P, ayant le cône circonscrit à σ_2 au sommet P pour cône Kummerien, et tangente le long de la courbe d'intersection de σ_2 et δ_2 à un cône au sommet P. Les sommets des quatre autres cônes Kummeriens sont les sommets des cônes du second ordre par la courbe d'intersection de σ_2 et δ_2. On obtient ainsi une représentation de la surface par une surface double du second ordre (σ_2).

Dans la *troisième* et *quatrième* section je m'occupe des questions de réalité et de forme, en y appliquant respectivement la projection d'un centre placé sur la conique double, et la représentation par une surface double (σ_2) que je viens de nommer. Je fais usage alors de résultats trouvés antérieurement par moi et par M. Crone sur la réalité des tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre et des systèmes de coniques qui y sont quatre fois tangentes. Je trouve que nos surfaces appartiennent toujours à une des 6 formes que je vais énumérer. Dans cette énumération je dis (avec M. Klein) qu'une nappe d'ordre pair a le type de point lorsqu'elle ne contient aucune branche de courbe d'ordre impair, et qu'elle a le type de droite lorsqu'elle en contient, et j'indique (avec MM. Schläfli et Klein) la connexion d'une nappe par le double du nombre des courbes formées de la nappe qui ne la décomposent pas*):

A. Surfaces à 16 droites réelles, à 5 cônes Kummeriens réels et à 10 systèmes réels de coniques planes, dont chacun contient 4 couples de droites réelles. Les surfaces ont une seule nappe du type de droite et de la connexion 6, qui se trouve au dehors de tous les cônes Kummeriens.

B. Surfaces à 8 droites réelles, à 3 cônes Kummeriens réels et à 6 systèmes réels de coniques, dont chacun contient 2 couples de droites réelles. Les 8 droites imaginaires n'ont aucun point réel. Les surfaces ont une seule nappe du type de droite et de la connexion 4, qui se trouve au dehors de tous les cônes Kummeriens.

C. Surfaces à 4 droites réelles, à un seul cône Kummerien réel et à deux systèmes de coniques réels, dont l'un contient 2

*) Nous appelons un cône réel lorsque son équation est réelle, quand même son seul point réel est son sommet. Une conique réelle n'a pas toujours des points réels, mais son plan est réel.

couples de droites réelles et 2 couples de droites imaginaires conjuguées. 8 des droites imaginaires n'ont aucun point réel. Les surfaces ont une seule nappe du type de droite et de la connexion 2, qui se trouve au dehors du cône Kummerien.

D. Surfaces sans aucune droite réelle, à 5 cônes Kummeriens réels et à 6 systèmes réels de coniques. Les droites n'ont aucun point réel. Les surfaces peuvent ou avoir une seule nappe du type de point et de la connexion 2, qui se trouve au dehors de 3 des cônes Kummeriens, ou n'avoir aucune nappe réelle.

E. Surfaces sans aucune droite réelle, à 5 cônes Kummeriens réels et à 2 systèmes réels de coniques, dont chacun contient 4 couples de droites imaginaires conjuguées. Les surfaces ont deux nappes du type de point et de la connexion 0, qui se trouvent au dehors d'un seul cône Kummerien.

F. Surfaces sans aucune droite réelle, à 3 cônes Kummeriens réels et à 2 systèmes réels de coniques, dont chacun contient 2 couples de droites imaginaires conjuguées. Les autres 8 droites n'ont aucun point réel. Les surfaces ont une seule nappe du type de point et de la connexion 0, qui se trouve au dehors d'un seul cône Kummerien.

H. G. Zeuthen.

H. G. Zeuthen: Nogle Egenskaber ved Kurver af fjerde Orden med to Dobbeltpunkter.*) Avec un résumé en français.
(Oversigt over det K. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger 1879 p. 89—122.)

Une courbe plane k_4 du quatrième ordre peut toujours être regardée comme la projection centrale de la courbe d'intersection de deux surfaces du second ordre. Il est donc possible de déduire ses propriétés de celles d'une courbe gauche du quatrième ordre et de la première espèce. Par cette courbe gauche passe un faisceau de surfaces φ_2 du second ordre: les contours apparents f_2 de ces surfaces formeront un système — dit singulier parce qu'il en existe d'autres — de coniques tangentes quatre fois à k_4. Les propriétés de ce système, et leur déduction stéréométrique font l'objet du mémoire.

Une partie de ces propriétés résulteraient aussi d'une particu-

*) Sur quelques-unes des propriétés des courbes du quatrième ordre à deux points doubles.

larisation de théorèmes plus on moins connus sur les systèmes de coniques tangentes quatre fois à une courbe générale du quatrième ordre. On aurait pu obtenir par cette voie les théorèmes, déduits stéreometriquement dans le mémoire, sur le réseau de coniques passant par les points de contact des coniques f_2 du système, sur l'enveloppe des polaires d'un point fixe, et sur le lieu des pôles d'une droite fixe, par rapport aux coniques f_2. Une partie des autres théorèmes, qui nous semblent nouveaux, indiquent des générations de la courbe k_4 par l'intersection de coniques variables ayant des contacts doubles, ou de droites ayant des contacts simples, avec des coniques fixes du système singulier. Soit, par exemple, t et t' des tangentes variables aux coniques fixes f_2 et f_2', et soit donnée entre les paramètres (rapports anharmoniques) qui déterminent t et t' une relation de la forme

$$(ax^2+2bx+c)x'^2+2(a'x^2+2b'x+c')x+a''x^2+2b''x+c''=0;$$

alors le lieu des points d'intersection de t et t' — qui est en général une courbe du 8me ordre à 20 points doubles — sera une courbe k_4 si les coefficients, sont assujettis aux quatre conditions qu'on obtient en substituant à x et x' les paramètres des quatre tangentes communes à f_2 et f_2'. — Si les coniques f_2 et f_2' coïncident, les coefficients de l'équation peuvent être quelconques.

On voit que deux coniques données du système singulier et 4 points donnés déterminent 64 courbes k_4, tandis qu'une seule conique et 8 points en déterminent 128.

Nous citerons encore le théorème suivant: La collection des 8 tangentes communes à k_4 et à une conique f_2 (à des points de contact séparés) se décompose en deux groupes de 4, et tous les groupes qu'on obtient ainsi ont, sur les coniques respectives f_2, des rapports anharmoniques constants.

Si les points doubles sont les points cycliques à l'infini, les points de contact des coniques f_2 seront déterminés par un faisceau de cercles concentriques. H. G. Zeuthen.

H. G. Zeuthen: Skelet af en elementaer geometrisk Keglesnitslaere.*) (Tidsskrift for Mathematik 1878 pp. 33—54, 65—76, 109—124, 132—148.)

Cet article, qui est le résumé d'un cours à l'université, a un but semblable à celui des leçons de Steiner, publiées par M. Geiser

*) Squelette d'une théorie géométrique et élémentaire des sections coniques.

sous le titre de „Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung“; mais le detail diffère beaucoup de celui de cet excellent livre.

Le point de départ est la définition des trois coniques par leurs propriétés focales, et les démonstrations se font, jusqu'au point où j'étudie les sections planes d'un cône droit, par les moyens de la géométrie plane la plus élémentaire. La discussion de la construction d'un cercle passant par un point donné, tangent à un cercle donné et ayant le centre sur une droite donnée conduit aux propriétés fondamentales des tangentes, et en particulier, pour l'hyperbole, à celles des asymptotes. On en déduit les autres propriétés qui ont des rapports avec les foyers, et les applique ensuite à des constructions soit de tangentes, soit de coniques satisfaisant à des conditions données. La théorie des coniques confocales se présente ici; mais comme on y a aussi besoin de théorèmes qui ne sont pas encore développés, il a été nécessaire d'y revenir dans une addition à la fin de l'article.

Les résultats déjà obtenus suffisent pour construire les théories des directrices et des diamètres. Pour compléter ces théories j'introduis — sans sortir encore du plan — une transformation identique à celle qu'on obtiendrait par projection parallèle. Je l'applique notamment à déduire les propriétés particulières à l'ellipse de celles du cercle et à la détermination des aires limitées d'arcs de coniques et de droites; la plupart des propriétés particulières à l'hyperbole se déduisent de théorèmes déjà trouvés sur les asymptotes.

J'étudie ensuite de la manière ordinaire les sections planes de cônes droits, et j'obtiens ainsi une nouvelle transformation qui me permet d'étendre les théorèmes de Pascal et Brianchon, et la théorie des pôles et polaires, prouvés pour un cercle, à une conique quelconque. (J'emploie la demonstration de Steiner pour établir le théorème de Pascal sur un cercle, et une belle démonstration analogue à celle-ci, que je dois à M. Bing, pour établir le théorème de Brianchon.)

Au moyen du théorème de Pascal et du théorème inverse j'obtiens les propriétés des sections d'un cône oblique.

H. G. Zeuthen.

H. G. Zeuthen: Om Konstruktion af Tovpolygoner til givne Kraefter i Rummet.*) (Tidsskrift for Mathematik 1879; pp. 46—57, 96—101.)

Ce mémoire fait suite, en quelque sorte, aux exercises de statique graphique, insérés 1877 au même journal, où je m'occupais de la construction de polygones funiculaires dans le plan. Dans l'espace il faut que tout côté du polygone funiculaire rencontre la force consécutive, de façon qu'une force donnée impose une condition même à la partie du polygone qui la précède et au „pôle" correspondant au polygone dans „la figure de forces", qui a les mêmes rapports avec les forces données et avec le polygone funiculaire que dans le plan.

S'il y a trois forces données, le lieu du pôle sera un hyperboloïde gauche, et chaque côté du polygone funiculaire — aussi le premier et dernier — rencontrera deux droites fixes. — S'il y a quatre forces données, le lieu du pôle sera une conique plane, et les lieux des côtés des polygones seront des hyperboloides. — S'il y a cinq forces données on ne trouve, en général, que deux polygones funiculaires (qui peuvent être imaginaires).

Dans le cas où — à côté de forces données — on connait les moments des tensions de certains côtés du polygone cherché par rapport à des droites données, on peut réduire la question à celle où toutes les conditions sont des forces données.

Je m'occupe à la fin du mémoire du cas où l'on connait les moments de côtés par rapport à des points fixes.

H. G. Zeuthen.

F. Klein: Ueber die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen. (Math. Ann. XV p. 533—555.)

Durch functionentheoretische Betrachtungen bin ich für die Transformation elfter Ordnung zu folgenden Resultaten gelangt:

1. *Aufstellung der Galois'schen Resolvente 660ten Grades der Modulargleichung.*

*) Sur la construction de polygones funiculaires à des forces données dans l'espace.

Man unterwerfe fünf Variable*):

$$y_1,\ y_4,\ y_5,\ y_9,\ y_3$$

den fünfzehn Gleichungen, welche aus folgenden drei

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= y_4 y_5 y_9 y_3 - y_1^2 y_5 y_3 + y_1^2 y_4^2 + y_3^3 y_1, \\ 0 &= y_1^2 y_5 y_9 - y_4^2 y_5 y_3 - y_3^2 y_1 y_9, \\ 0 &= y_4^3 y_9 + y_9^3 y_5 + y_3^3 y_1 \end{aligned}\right.$$

durch cyclische Vertauschung der y hervorgehen, — man setze andererseits:

$$J = \frac{C^3}{\nabla^{11}},$$

wo J die absolute Invariante $\frac{g_2^3}{\Delta}$ des elliptischen Integrals ist, C eine sogleich noch näher zu definirende Function 11ten Grades der y bezeichnet:

$$C = (y_1^{11} + y_4^{11} + y_5^{11} + y_9^{11} + y_3^{11}) + \cdots,$$

und $\triangle$ folgende Function 3ten Grades vorstellt:

$$\triangle = y_1^2 y_9 + y_4^2 y_3 + y_5^2 y_1 + y_9^2 y_4 + y_3^2 y_5 .$$

Dann giebt es 660 Lösungssysteme

$$y_1 : y_4 : y_5 : y_9 : y_3,$$

welche aus einem derselben durch Wiederholung und Combination folgender linearer Substitutionen hervorgehen: $\left(\rho = e^{\frac{2i\pi}{11}}\right)$

$$S)\quad y_1' = \rho y_1,\quad y_4' = \rho^4 y_4,\quad y_5' = \rho^5 y_5,\quad y_9' = \rho^9 y_9,\quad y_3' = \rho^3 y_3;$$

$$T)\ \left\{\begin{aligned} \sqrt{-11}\cdot y_1' &= (\rho^9 - \rho^2)\, y_1 + (\rho^4 - \rho^7)\, y_4 + (\rho^3 - \rho^8)\, y_5 \\ &\quad + (\rho^5 - \rho^6)\, y_9 + (\rho^1 - \rho^{10})\, y_3, \\ \sqrt{-11}\cdot y_4' &= (\rho^4 - \rho^7)\, y_1 + (\rho^3 - \rho^8)\, y_4 + (\rho^5 - \rho^6)\, y_5 \\ &\quad + (\rho^1 - \rho^{10})\, y_9 + (\rho^9 - \rho^2)\, y_3, \\ \sqrt{-11}\cdot y_5' &= (\rho^3 - \rho^8)\, y_1 + (\rho^5 - \rho^6)\, y_4 + (\rho^1 - \rho^{10})\, y_5 \\ &\quad + (\rho^9 - \rho^2)\, y_9 + (\rho^4 - \rho^7)\, y_3, \\ \sqrt{-11}\cdot y_9' &= (\rho^5 - \rho^6)\, y_1 + (\rho^1 - \rho^{10})\, y_4 + (\rho^9 - \rho^2)\, y_5 \\ &\quad + (\rho^4 - \rho^7)\, y_9 + (\rho^3 - \rho^8)\, y_3, \\ \sqrt{-11}\cdot y_3' &= (\rho^1 - \rho^{10})\, y_1 + (\rho^9 - \rho^2)\, y_4 + (\rho^4 - \rho^7)\, y_5 \\ &\quad + (\rho^3 - \rho^8)\, y_9 + (\rho^5 - \rho^6)\, y_3, \end{aligned}\right.$$

*) Als Indices wähle ich die zum Modul 11 gehörigen quadratischen Reste.

und es kann die Aufgabe, bei gegebenem J die zugehörigen Lösungssysteme y zu berechnen, als Galois'sche Resolvente der Modulargleichung betrachtet werden. — Die bereits genannte Function C ist ein numerisches Multiplum der Summe der elften Potenzen derjenigen 660 Ausdrücke, welche vermöge der vorgenannten Substitutionen an die Stelle etwa von y_1 treten:

$$C = \frac{11}{124}(\Sigma y^{11}).$$

2. *Aufstellung der Resolvente elften Grades.* Es giebt zwei einfachste Formen der Resolvente elften Grades. Die eine ist folgende:

$$\begin{aligned}J:J-1:1 = &\left(\mathfrak{z}^2-3\mathfrak{z}+(5\pm\sqrt{-11})\right)\left(\mathfrak{z}^3+\mathfrak{z}^2-3\cdot\frac{1\mp\sqrt{-11}}{2}\cdot\mathfrak{z}+\frac{7\pm\sqrt{-11}}{2}\right)^3\\ &:\left(\mathfrak{z}^3+4\mathfrak{z}^2+\frac{7\pm5\sqrt{-11}}{2}\cdot\mathfrak{z}+(4\pm6\sqrt{-11})\right)\cdot\\ &\cdot\left(\mathfrak{z}^4-2\mathfrak{z}^3+3\cdot\frac{1\pm\sqrt{-11}}{2}\cdot\mathfrak{z}^2+(5\mp\sqrt{-11})\mathfrak{z}-3\cdot\frac{5\mp\sqrt{-11}}{2}\right)^2\\ &:-1728,\end{aligned}$$

die andere lautet:

$$\begin{aligned}0 = \xi^{11}-22\xi^8+11(9\pm2\sqrt{-11})\xi^5-11\cdot\frac{12g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}\cdot\xi^4\mp88\sqrt{-11}\,.\,\xi^2\\ +11\cdot\frac{3\pm\sqrt{-11}}{2}\cdot\frac{12g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}\cdot\xi-\frac{144g_2^2}{\sqrt[3]{\Delta^2}};\end{aligned}$$

man geht von der einen zur andern über, indem man setzt:

$$\xi^3 = \mathfrak{z}^2-3\mathfrak{z}+(3\pm\sqrt{-11}).$$

Vermöge der soeben definirten y drücken sich die 11 Wurzeln $\mathfrak{z}$, resp. ξ folgendermassen aus. Man hat für einen Werth von $\mathfrak{z}$:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathfrak{z} = &\quad(y_1^3+y_4^3+y_5^3+y_9^3+y_3^3)\\ &-(1\mp\sqrt{-11})(y_1^2y_4+y_4^2y_5+y_5^2y_9+y_9^2y_3+y_3^2y_1)\\ &+\left(\frac{1\mp\sqrt{-11}}{2}\right)(y_1^2y_5+y_4^2y_9+y_5^2y_3+y_9^2y_1+y_3^2y_4)\\ &+3(y_1^2y_3+y_4^2y_1+y_5^2y_4+y_9^2y_5+y_3^2y_9)\\ &-3(y_1y_4y_9+y_4y_5y_3+y_5y_9y_1+y_9y_3y_4+y_3y_1y_5)\\ &-\left(\frac{1\mp\sqrt{-11}}{2}\right)(y_1y_4y_5+y_4y_5y_9+y_5y_9y_3+y_9y_3y_1+y_3y_1y_4),\end{aligned}$$

für den entsprechenden Werth von ξ:

$$\begin{aligned}\nabla^{2/3}\cdot\xi = &\quad(y_1^2+y_4^2+y_5^2+y_9^2+y_3^2)\\ &-(y_1y_9+y_4y_3+y_5y_1+y_9y_4+y_3y_5)\\ &-\left(\frac{1\pm\sqrt{-11}}{2}\right)(y_1y_4+y_4y_5+y_5y_9+y_9y_3+y_3y_1),\end{aligned}$$

und die übrigen zehn Werthe von $\mathfrak{z}$, resp. $\mathfrak{x}$ ergeben sich, wenn man auf die rechter Hand stehenden Ausdrücke die soeben genannte Substitution S wiederholt anwendet.

3. *Transcendente Aufklärung der mitgetheilten Gleichungen.* Der Jacobi'schen Gleichung zwölften Grades entsprechend, die ich neuerdings mittheilte (Repertorium Band 2), setze man, unter μ einen Proportionalitätsfactor verstanden:

$$\mu A_0 = q^{\frac{11}{12}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} \cdot q^{33h^2+55h+22}$$

$$\mu A_1 = q^{\frac{1}{132}} \cdot \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h} \cdot q^{33h^2+h} + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} \cdot q^{33h^2+43h+14} \right\},$$

$$\mu A_4 = q^{\frac{37}{132}} \cdot \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h} \cdot q^{33h^2+13h+1} + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} \cdot q^{33h^2+31h+7} \right\},$$

$$\mu A_5 = q^{\frac{49}{132}} \cdot \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h} \cdot q^{33h^2+37h+10} + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} \cdot q^{33h^2+7h} \right\},$$

$$\mu A_9 = q^{\frac{97}{132}} \cdot \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} \cdot q^{33h^2+19h+2} + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h} \cdot q^{33h^2+25h+4} \right\},$$

$$\mu A_3 = q^{\frac{25}{132}} \cdot \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h} \cdot q^{33h^2+49h+18} + \sum_{-\infty}^{+8} (-1)^{h} \cdot q^{33h^2+61h+28} \right\}.$$

Dann hat man zur Bestimmung der Verhältnisse der y:

$$\frac{y_4}{y_5} = -\frac{A_0}{A_1}, \quad \frac{y_5}{y_9} = -\frac{A_0}{A_4}, \quad \frac{y_9}{y_3} = -\frac{A_0}{A_5}, \quad \frac{y_3}{y_1} = -\frac{A_0}{A_9}, \quad \frac{y_1}{y_4} = -\frac{A_0}{A_3}.$$

Ebenhausen, den 16. August 1879.

F. Klein.

K. Lasswitz: Ueber Wirbelatome und stetige Raumerfüllung.

Vierteljahrsschrift f. wiss. Philosophie. III. Jahrg. 2. H. S. 206—215 und 3. H. S. 275—293.

Nach einer Darstellung der mathematischen und physikalischen Grundlagen der Thomson'schen Wirbeltheorie wird dieselbe mit der physikalischen Theorie der Materie von Descartes in Beziehung gesetzt und an die Geschichte der letzteren die Kritik der Thomson'schen Hypothese angeschlossen. Es zeigt sich dabei, dass die Annahme Thomson's, die Materie sei eine vollkommene Flüssigkeit,

welche durch die vorhandene Wirbelbewegung für gewisse Theile constante Eigenschaften besitze, unser nach Anschauung strebendes Erkenntnissbedürfniss nicht befriedigen kann, weil die zu beantwortende Frage nur weiter zurückgeschoben wird und die Veränderlichkeit und Beweglichkeit der Theilchen der Wirbelatome wieder unbegreiflich bleibt. Das Denken verlangt den Begriff eines in aller Erfahrung Unveränderlichen, nach Grösse und Gestalt Beharrenden, wie er nur im starren Atom zu finden ist. Dagegen dürften die Helmholtz'schen Untersuchungen über Wirbelringe, auf eine im Grunde atomistisch constituirte Flüssigkeit angewendet, sich wohl zur Grundlage einer physikalisch wie erkenntniss-theoretisch befriedigenden Theorie der Materie eignen.

Gotha. K. Lasswitz.

J. Hoüel: Cours de calcul infinitésimal. (Tome II. 1879. Grand in-8. 475 pages.)

Ce volume contient le Livre III, qui traite de l'application de l'Analyse infinitésimale à la Géometrie, et la première partie du Livre IV, consacrée à l'étude des équations différentielles entre deux variables.

Le Livre III est divisé en trois Chapitres, dont le premier a pour objet l'application du Calcul différentiel à l'étude des courbes planes. Je me suis attaché à y faire usage autant que possible des méthodes fondées sur la considération des infiniment petits, de préférence à celles qui reposent sur les développements algébriques.

J'ai défini la tangente à une courbe par sa propriété essentielle, d'approcher infiniment plus de la courbe, dans le voisinage du point de contact, que toute autre droite menée par ce même point, et cette définition, d'où découlent naturellement toutes les autres propriétés, s'étend d'elle-même aux cas du plan tangent à une surface et du plan osculateur à une courbe gauche.

Je traite ensuite des asymptotes rectilignes aux courbes planes, et j'examine, dans le cas le plus simple, les conditions d'identité de l'asymptote avec la tangente à l'infini.

La notion de la *longueur* d'un arc de courbe est une de celles qui demandent à être établies avec le plus de soin, en s'appuyant sur des considérations de Géométrie infinitésimale. Ici la marche

rationnelle n'allonge en rien les raisonnements nécessaires; elle ne fait que ranger dans l'ordre logique les opérations qu'exige le calcul pratique, quelque voie que l'on choisisse, et l'on n'abrége en rien par le sacrifice de la rigueur.

Viennent ensuite l'expression de l'angle de contingence, la détermination du sens de la concavité d'une courbe, l'étude de la mesure de la courbure, celle des divers ordres de contact et des courbes osculatrices, avec des remarques sur l'identification du cercle de courbure et du cercle osculateur par des considérations de Géométrie infinitésimale; les théories des développées et des développantes, des courbes enveloppes, et des points singuliers des courbes planes.

Le Chapitre se termine par un exposé succinct de la méthode d'Analyse géométrique à laquelle M. Bellavitis, son fondateur, a donné le nom de *Méthode des Équipollences*, et qui, par une heureuse application de l'algorithme des quantités complexes, donne la solution la plus directe et la plus élégante de certaines classes de problèmes de Géométrie plane. La nécessité d'observer dans toute l'étendue de mon Ouvrage un système uniforme de notation m'a fait renoncer à l'usage des signes spéciaux imaginés par l'inventeur, et auxquels j'ai substitué les notations généralement usitées dans la théorie des quantités complexes.

Dans le Chapitre II, qui renferme les applications du Calcul différentiel à la Géométrie des trois dimensions, je traite d'abord les questions de tangence et de courbure relatives aux courbes et aux surfaces. Je donne ensuite les notions sur la mesure de la courbure des surfaces d'après la théorie de Gauss, avec quelques exemples de l'emploi des coordonnées curvilignes.

Le Chapitre III renferme les applications de l'intégration aux questions de quadrature et de rectification des lignes et des surfaces, ainsi qu'aux questions analogues relatives à la détermination des centres de gravité, des moments d'inertie, etc. Vient ensuite un recueil d'Exercices sur les matières traitées dans le Livre III.

La première partie du Livre IV, contenue dans ce volume, a pour objet la théorie des équations différentielles des divers ordres entre deux variables.

Dans le Chapitre I, je commence par traiter de l'intégration des expressions différentielles du premier ordre et du premier degré, contenant deux ou plusieurs variables indépendantes. J'étudie ensuite la formation d'une équation différentielle entre deux variables par l'élimination d'une ou de plusieurs constantes arbitraires entre

une équation finie et ses différentielles, la considération de ces exemples de formation directe pouvant éclairer sur les moyens de procéder plus tard à l'opération inverse, c'est-à-dire à l'intégration d'une équation différentielle donnée, et faire mieux saisir la dépendance qui existe entre cette équation et ses diverses espèces de solutions.

A la suite de ces préliminaires, je donne, avec quelques modifications, la démonstration, due à Cauchy*), de ce théorème fondamental, qu'une équation différentielle, soit du premier ordre, soit d'un ordre quelconque, remplissant entre des limites données certaines conditions de continuité, détermine entre ces limites une fonction implicite de la variable indépendante, exprimable ou non par les signes de l'Analyse, mais possédant une suite de valeurs représentables par la limite d'un polygone infinitésimal, que l'équation différentielle peut faire connaître avec une approximation indéfinie.

Le Chapitre II traite des principales méthodes pour l'intégration des équations différentielles du premier ordre: équations dont le premier membre est immédiatement intégrable, équations homogènes, équations linéaires, etc.

Je développe ensuite plusieurs exemples d'application de l'intégration des équations différentielles du premier ordre à la recherche de la formule d'addition des transcendantes logarithmiques, circulaires et elliptiques.

Puis j'expose la théorie du multiplicateur des équations du premier ordre, avec ses applications les plus simples à l'intégration de ces équations. J'ai profité des nombrenx exemples que contient le *Treatise on Differential Equations* de Boole.

De là je passe à l'intégration des équations différentielles du premier ordre et d'un degré en $\frac{dy}{dx}$ supérieur ou premier.

La fin du Chapitre est consacrée à la théorie des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre, et à la recherche des caractères distinctifs entre ces solutions et les intégrales particulières. J'expose à cet effet une méthode inédite, due à P.-H. Blanchet, qui me l'avait communiquée en 1846. Cette méthode remarquable conduit à une suite indéfinie de critériums, comparables à ceux que l'on rencontre dans la question de la conver-

*) Voir Moigno, *Leçons de Calcul intégral,* t. II.

gence des séries, et dont chacun répond au cas où le précédent est en défaut.

Dans le Chapitre III, je traite quelques cas généraux où l'on peut intégrer complétement des équations différentielles d'ordre supérieur au premier. J'indique ensuite d'autre cas où l'on peut abaisser leur ordre, savoir, lorsque le premier membre de l'équation est une différentielle exacte, ou lorsqu'il est homogène par rapport à l'une des variables et à ses différentielles, ou par rapport aux deux variables et à leurs différentielles.

Le Chapitre IV a pour objet l'importante théorie des équations différentielles linéaires d'ordre quelconque. J'expose les propriétés générales de cette classe d'équations, en insistant particulièrement sur le cas des équations à coefficients constants et sur les cas qui s'y ramènent. Les calculs se simplifient notablement par l'emploi des fonctions symboliques de la caractérictique de dérivation D_x, emploi fondé sur de simples identités algébriques, et qui, dans les cas traités, n'est sujet à aucune exception.

Cet algorithme symbolique s'applique également au cas où les puissances de la caractéristique D_x seraient remplacées par des factorielles. Sans vouloir donner à ce système de notation toute l'extension qu'il a reçue de Cauchy et des géomètres anglais, on peut affirmer que son adoption dans une certaine mesure offrirait de grands avantages dans l'enseignement élémentaire de l'Analyse, en se bornant aux cas où cette notation n'est qu'une abréviation d'écriture, dont la traduction se présente d'elle-même à chaque phase du calcul.

Le dernier paragraphe est consacré à une classe d'équations linéaires du second ordre, à laquelle peut se ramener l'équation de Riccati, et qui a été l'objet de nombreux travaux dans ces dernières années. J'ai exposé, pour ce cas particulier, la méthode générale fondée par Euler et Laplace, telle qu'elle a été développée par M. S. Spitzer dans ses *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen*.

Bordeaux. J. Hoüel.

H. Schubert: Tangentensingularitäten der allgemeinen Ordnungsfläche. Mathematische Annalen. Bd. 11. p. 347—378.

Der Verfasser hatte schon früher, nämlich in den Gött. Nachr vom Februar 1876 und in § 27 seiner Beiträge zur abzählenden Geo-

metrie (Math. Ann. Bd. 10, pag. 98—106, dieses Repertorium Bd. 1, pag. 362), die 5 Salmon'schen Probleme $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ (cf. Salmon-Fiedler, II. Theil, Artikel 462) mit Hilfe seiner Abzählungsmethode gelöst. Er setzt hier diese Untersuchungen fort, indem er namentlich die Zahlen für diejenigen Stellen einer punktallgemeinen Fläche n^{ten} Grades aufsucht, in denen zwei singuläre Tangenten berühren. Von den Resultaten mögen hier die folgenden beispielsweise Platz finden:

1) Die Zahl derjenigen Doppeltangentialebenen, einer Fläche n^{ten} Grades, bei denen der Verbindungsstrahl der beiden Berührungspunkte in einem dieser Berührungspunkte dreipunktig berührt, beträgt:

$$n(n-2)(n-4)(n^3+3n^2+13n-48).$$

2) Die Zahl derjenigen Punkte einer Fläche n^{ten} Grades, in denen die beiden Haupttangenten vierpunktig berühren, ohne zusammenzufallen, beträgt:

$$5n.(7n^2-28n+30),$$

eine Zahl, welche von Clebsch in Crelle-Borchardt's Journal, Bd. 63 (cf. auch Salmon-Fiedler, Artikel 463) auf algebraischem Wege um den Grad der Regelfläche der vierpunktig berührenden Tangenten zu gross bestimmt war.

3) Die Zahl derjenigen Punkte einer Fläche n^{ten} Grades, in welchen nicht zusammenfallende Haupttangenten berühren, von denen jede die Fläche noch anderswo berührt, beträgt:

$$n(n-4)(4n^5-4n^4-95n^3+99n^2+544n-840).$$

4) Die Curve vierpunktiger Berührung berührt auf jeder Fläche die Curve der mehrfachen Berührungspunkte der drei-zweipunktigen Tangenten, und zwar in den Berührungspunkten der fünfpunktigen Tangenten, und schneidet sie ausserdem noch einfach erstens in dem mehrfachen Berührungspunkte jeder vier-zweipunktigen Tangente, zweitens in denjenigen Punkten der Fläche, welche zwei Haupttangenten besitzen, von denen die eine dort vierpunktig berührt, die andere dort dreipunktig und anderswo zweipunktig berührt.

Neuerdings hat Krey in Göttingen (Math. Ann. Bd. 15, pag. 211) zu mehreren von diesen Anzahlen diejenigen Reductionen hinzugefügt, welche sie erleiden, wenn vorausgesetzt wird, dass die Fläche nicht punkt-allgemein ist, sondern die von Cayley und Zeuthen studirten Singularitäten besitzt.

H. Schubert: 1) Das Correspondenzprincip für Gruppen von n Punkten und von n Strahlen. (Mathemat. Ann. Bd. 12, pag. 180—201.)

2) Singularitäten des Complexes n^{ten} Grades. (Math. Ann. Bd. 12, pag. 202—221.)

Der Verfasser hatte im III. Abschnitt seiner Beiträge zur abzählenden Geometrie (Math. Ann. Bd. 10, pag. 1—112 und dieses Repertorium Bd. 1, pag. 358 u. 359) durch Rechnen mit Bedingungszeichen aus dem Chasles'schen Correspondenzprincip alle möglichen Formeln abgeleitet, welche die Grundbedingungen des allgemeinen *Punktepaars* mit den Grundbedingungen seiner *Coincidenz* verbinden, d. h. desjenigen spezielleren Punktepaars, bei welchem die beiden Punkte *unendlich nahe* liegen. Ebenso wurde dort das Strahlenpaar behandelt, und so wurden schliesslich alle Correspondenzprobleme erledigt, welche auf *nur zwei* Hauptelemente Bezug nehmen. Hier wird nun an die Stelle des Punktepaars eine Gruppe von n in gerader Linie befindlichen Punkten gesetzt, und namentlich die Zahl derjenigen speziellen Punktgruppen aufgesucht, bei denen sämmtliche n Punkte unendlich nahe liegen. Ebenso wird nachher für das aus einem Strahlbüschel mit n Strahlen bestehende Gebilde die $(n-1)$-fache Bedingung, dass die n Strahlen coincidiren, durch die $(n-1)$-fachen Grundbedingungen dieses Gebildes ausgedrückt. Mit Hilfe der erhaltenen, eleganten Coincidenzformeln werden endlich die Zahlen für alle eine Fläche an einer oder mehr Stellen zwei- oder mehrpunktig berührenden Tangenten, und die liniengeometrischen Analoga dieser Zahlen auf naturgemässe Weise direct aus der Definition der Fläche resp. des Complexes abgeleitet.

H. Schubert: Ueber geometrische Erweiterungen des Bezout'schen Fundamentalsatzes. (Gött. Nachr. Juli 1877, p. 401—426.)

Betrachtet man statt des Punktes das Gebilde Γ als Raumelement, so wird aus der Aufgabe:

„Die Zahl der gemeinsamen Punkte einer Curve und einer Fläche durch ihre Gradzahlen auszudrücken“

das folgende Problem, welches ich das *Charakteristikenproblem* für das Gebilde Γ genannt habe:

„Das Gebilde Γ habe die Constantenzahl c und sei Element zweier von einander unabhängigen Systeme Σ_α und $\Sigma'_{c-\alpha}$, von denen das erste α-stufig sei, d. h. ∞^α Gebilde enthalte, und das zweite $(c-\alpha)$-stufig

sei. Anzugeben ist die Zahl der den beiden Systemen gemeinsamen Gebilde als algebraische Summe der Produkte von je zwei Anzahlen — Charakteristiken —, von denen die eine immer von Σ_α, *die andere von* $\Sigma'_{c-\alpha}$ *allein abhängt.*"

Ausser der Punktgeometrie und der ihr dual entsprechenden Ebenengeometrie hat auch die Liniengeometrie ihr Charakteristikenproblem vollständig gelöst. Hier ist dasselbe für den Strahlbüschel und für mehrere andere Gebilde gelöst, welche aus einzelnen Punkten, Ebenen und Strahlen zusammengesetzt sind. Die Anwendungen der aufgestellten Charakteristikenformeln erledigen auf äusserst einfache Weise mehrere Probleme, welche bis dahin nur mit Heranziehung fremder Hilfsmittel lösbar erschienen, und machen ausserdem ein Fragen-Gebiet zugänglich, welches der herkömmlichen, analytisch-geometrischen Methode unüberwindliche Schwierigkeiten entgegenstellt.

Die Formeln sind hier ohne Beweis mitgetheilt. Die Beweise findet man im VI. Abschn. meines „Kalküls der abzählenden Geometrie" (Teubner 1879) (Cf. hier pag. 436).

H. Schubert: Die fundamentalen Anzahlen und Ausartungen der cubischen Plancurven nullten Geschlechts. (Math. Ann. Bd. 13, pag. 429—539.)

Diese Abhandlung ist die Fortsetzung meiner im 10. Bande der Math. Ann. (pag. 1—112) begonnenen *„Beiträge zur abzählenden Geometrie"*, über welche ich schon im 1. Bande dieses Repertoriums (pag. 349—363) eingehend referirt habe. In dieser zweiten Abhandlung werden die in jener ersten Abhandlung entwickelten allgemeinen Incidenzformeln und Coincidenzformeln dazu verwerthet, die Anzahlen für Kegelschnitte, für Plancurven dritter Ordnung dritten Ranges, und für Plancurven dritter Ordnung vierten Ranges durch die Anzahlen auszudrücken, welche sich auf die *Ausartungen* dieser Gebilde beziehen. Die mit Hilfe einer speciellen homographischen Abbildung erlangte Kenntniss der Eigenschaften der Ausartungen ermöglicht die Zurückführung der Ausartungsanzahlen auf die axiomatischen Anzahlen des Raumes, und dadurch die Berechnung der Anzahlen für die allgemeineren Gebilde. Den im Raume gedachten Plancurven werden nicht bloss die elementaren Bedingungen: eine gegebene Gerade zu schneiden, eine gegebene Ebene zu berühren, durch einen gegebenen Punkt zu gehen, die Ebene durch

einen gegebenen Punkt zu schicken, etc., sondern auch alle diejenigen Bedingungen auferlegt, welche über die Lage der singulären Punkte und Tangenten etwas festsetzen. Bei der Berechnung seiner Anzahlen hatte der Verfasser zwei Ziele im Auge, erstens die Erkenntniss der Lage-Beziehungen zwischen den singulären und nichtsingulären Punkten und Tangenten sowohl auf den ausgearteten, wie auf den allgemeinen Curven, und zweitens die numerische Ausrechnung aller derjenigen Anzahlen, durch welche die Anzahlen der cubischen Raumcurve ausgedrückt werden können. Die analoge Behandlung des letztgenannten Gebildes hatte ich in einer dritten Abhandlung publiciren wollen. Dieselbe werde ich jedoch nicht mehr veröffentlichen, weil ihre wichtigsten Resultate in meinem (September, 1879) bei Teubner erschienenen „Kalkül der abzählenden Geometrie“ (pag. 163—184) Platz gefunden haben. Statt der dritten Abhandlung wird aber eine kurze Beschreibung der 11 Ausartungen der Raumcurve dritter Ordnung in den Math. Ann. Bd. 15 erscheinen.

H. Schubert: Kalkül der abzählenden Geometrie. (Leipzig, Teubner 1879.)

Dieses Buch will den Leser mit den Vorstellungen, Problemen und Resultaten eines neuen Gebiets der Geometrie vertraut machen, in welchem man, unter Verzichtleistung auf die eigentliche Construction der Gebilde, nur immer zu berechnen trachtet, *wieviel* Gebilde von bestimmter Definition gewisse gegebene Bedingungen erfüllen, um dadurch einerseits der analytisch-geometrischen Forschung wichtige Frage-Stellungen und Vorarbeiten zu liefern, andererseits die Eigenschaften der räumlichen Gebilde in einem neuen Lichte erscheinen zu lassen. Zu den gesuchten Anzahlen gelangt man leicht durch einen eigenthümlichen Kalkül, welcher, dem Zwecke der abzählenden Geometrie angepasst, die geometrischen Bedingungen selbst gewissen Operationen unterwirft, die als Addition, Subtraction und Multiplication zu bezeichnen sind. In den ersten drei Abschnitten habe ich den didactischen Zweck und die Propaganda der Methode vornehmlich im Auge gehabt, und desshalb alle Definitionen, Sätze und Formeln durch einfache und complicirte, bekannte und neue Beispiele und Anwendungen erläutert. Gegenüber meinen früheren Abhandlungen auf dem Gebiete des Abzählungskalküls in den „Göttinger Nachrichten“ und „Mathemathematischen Annalen“ giebt das Buch theils eine consequentere

und fruchtbarere Durchführung der Methode, theils auch manche, noch nicht publicirte Untersuchungen.

Im *ersten Abschnitt* sind die Begriffe Constantenzahl eines Gebildes, Dimension einer Bedingung, Stufe eines Systems erläutert, und feste Symbole für die am häufigsten vorkommenden Lage-Bedingungen eingeführt. Das Princip von der Erhaltung der Anzahl ist dann in vier verschiedenen Formen ausgesprochen, und durch Beispiele verdeutlicht. Endlich sind die Grundregeln für das Rechnen mit den Bedingungssymbolen entwickelt.

Der *zweite Abschnitt* leitet aus dem Princip von der Erhaltung der Anzahl die fundamentalen Formeln ab, welche zwischen den Grundbedingungen incidenter Hauptelemente (d. h. Punkt, Strahl oder Ebene) bestehen (Incidenzformeln). Incident heissen nämlich Punkt und Strahl, wenn der Punkt auf dem Strahle liegt, Ebene und Strahl, wenn der Strahl in der Ebene liegt, Punkt und Ebene, wenn der Punkt in der Ebene liegt, Strahl und Strahl, wenn beide sich schneiden. Von den zahlreichen Anwendungen der Incidenzformeln sind besonders diejenigen hervorgehoben, welche bei Curven auf Tangente und zugehörigen Berührungspunkt, bei Flächen auf Punkt und zugehörige Tangentialebene Bezug nehmen.

Im *dritten Abschnitt* werden die Punktepaare, Strahlenpaare und überhaupt die *Paare* von Hauptelementen behandelt, und namentlich wird die invariante Bedingung, dass die beiden Hauptelemente eines Paares unendlich nahe liegen (coincidiren) mit den Lage-Bedingungen in Beziehung gebracht (Coincidenzformeln). Die entwickelten Formeln führen leicht zu den Bezout'schen und Halphen'-schen Sätzen über die gemeinsamen Elemente gegebener Punktsysteme (Curven und Flächen) und Strahlensysteme (Regelflächen, Congruenzen, Complexe). Andere Anwendungen beziehen sich auf die Berührung von Curven und Flächen aus gegebenen Systemen solcher Gebilde, auf die beiden Regelschaaren, welche in einer Fläche zweiten Grades liegen, auf die Brennfläche einer Congruenz, auf das α- β-deutige Entsprechen der Punkte des Raums mit den Strahlen eines gegebenen Complexes, endlich auch auf die Ableitung der Cayley-Brill'schen Correspondenzformel für Curven p-ten Geschlechtes aus den Coincidenzformeln des Verfassers.

Der umfangreiche *vierte Abschnitt* zeigt die Berechnung der Anzahlen durch die *Ausartungen* der Gebilde. Die Anzahl für jede einem Gebilde Γ auferlegte Bedingung wird vermittelst der Incidenzformeln und Coincidenzformeln schliesslich durch Anzahlen ausgedrückt, welche specielleren Gebilden Γ zugehören, und desshalb von Anzahlen einfacherer Gebilde abhängen, die als schon berechnet vorausgesetzt werden dürfen. Nach dieser Methode sind in dem vorliegenden Buche berechnet:

1) die bekannten Anzahlen für Kegelschnitte im Raume;

2) die bekannten Anzahlen für Flächen zweiten Grades;

3) die Anzahlen für die im Raume gedachte Plancurve dritter Ordnung mit Spitze, mit Berücksichtigung aller möglichen Bedingungen, die sich auf die Lage der Spitze, der Rückkehrtangente, des Wendepunktes und der Wendetangente beziehen (cf. Math. Ann. Bd. 13, pag. 451—509);

4) die Anzahlen für die im Raume gedachte Plancurve dritter Ordnung mit Doppelpunkt, mit besonderer Rücksichtnahme auf die Bedingungen, welche über die Lage der Wendetangenten etwas festsetzen (cf. Math. Ann. Bd. 13, pag. 509—537);

5) die Anzahlen für cubische Raumcurven (Auszug aus der nicht veröffentlichten, von der Kgl. Dänischen Akademie gekrönten Preisschrift des Verfassers);

6) die von Zeuthen (in d. Naturw. og math. Afd. 10, Bd. IV, 1873) berechneten Anzahlen für Plancurven vierter Ordnung in fester Ebene;

7) die Anzahlen für die lineare Congruenz mit beliebig liegenden und mit unendlich nahen Axen;

8) die Anzahlen für die Gebilde, welche aus zwei Geraden bestehen, deren Punkte oder Ebenen *projectiv* sind;

9) die Anzahlen für zwei einander projective Strahlbüschel;

10) die Anzahlen für zwei einander collineare Bündel;

11) die von Hirst (Proc. of the London Math. Soc. Bd. 5 u. Bd. 8) und ausführlicher von Sturm (Math. Ann. Bd. 12, pag. 254—368) berechneten Anzahlen für zwei einander correlative Bündel.

Bei der Berechnung der Anzahlen für alle diese Gebilde ist besondere Aufmerksamkeit den Eigenschaften der Ausartungen, und bei den Plancurven auch den Lage-Beziehungen der singulären Punkte und Tangenten zugewandt.

Der *fünfte Abschnitt* behandelt die Bedingungen, welche aus-

sprechen, dass von n in gerader Linie liegenden Punkten mehrere an einer oder mehr Stellen coincidiren, und die analogen Bedingungen für n in einem Strahlbüschel liegende Strahlen. Die gefundenen höheren Coincidenzformeln liefern leicht eine grosse Menge von Singularitätenzahlen sowohl für die punktallgemeine Fläche, wie auch für den strahlallgemeinen Complex. Vermöge seines Kalküls drückt der Verfasser jede der Anzahlen für Flächen-Singularitäten *direct* durch gewisse 5 Stammzahlen aus, deren Werthe sich unmittelbar aus der Definition der Fläche ergeben, wenn man dieselbe als ein zweistufiges Punktsystem auffasst, von dessen Punkten auf jeden Strahl des Raums n fallen. Bemerken möchte ich hier noch, dass ich die Coincidenz von 3 oder mehr *nicht* in gerader Linie befindlichen Punkten in meinem Buche noch gar nicht berücksichtigt habe, dass ich jedoch hoffe, diesen schwierigeren Fall bald in einer besonderen Abhandlung erörtern zu können.

Im *sechsten Abschnitt* wird zunächst für ein beliebiges Gebilde Γ das Charakteristikenproblem in folgender Weise definirt:

„Ein Gebilde Γ mit der Constantenzahl c sei Element eines ganz beliebigen i-stufigen Systems Σ und auch Element eines ganz beliebigen $(c - i)$-stufigen Systems Σ'. Beiden Systemen ist eine endliche Anzahl x von Gebilden Γ gemeinsam. Es wird für alle möglichen Werthe von i verlangt, die Anzahl x als Summe von m Producten darzustellen, deren jedes aus zwei Faktoren besteht, so dass der erste Factor immer angiebt, wieviel Gebilde aus Σ eine i-fache Bedingung erfüllen, der zweite Factor dagegen angiebt, wieviel Gebilde aus Σ' eine $(c - i)$-fache Bedingung erfüllen. Das Problem gilt als gelöst, gleichviel, wie gross die Zahl m werden mag, und gleichviel welche i-fachen und welche $(c - i)$-fachen Bedingungen zur Bildung der Producte verwandt werden mussten. Namentlich könnten diese Bedingungen auch Ausartungsbedingungen (invariant) sein.“

Es werden dann die Charakteristikenformeln für folgende Gebilde abgeleitet:

1) für den Punkt, die Ebene und den Strahl;

2) für den Kegelschnitt, wobei auf die von Halphen gefundene Modification, welche die Charakteristikenformeln in gewissen Fällen erleiden, noch keine Rücksicht genommen werden konnte;

3) für das Gebilde, welches aus einem Strahle und einem darin liegenden Punkte besteht;

4) für den Strahlbüschel;

5) für das Gebilde, welches aus einem Strahle, einem auf dem Strahle liegenden Punkte und einer durch den Strahl gehenden Ebene besteht;

6) für das Gebilde, welches aus einer Geraden und n darin befindlichen Punkten besteht;

7) für das Gebilde, welches aus einem Strahlbüschel und n darin befindlichen Strahlen besteht.

Die Anwendung der in den Fällen 3) bis 7) gefundenen Charakteristikenformeln führt theilweise zu einer einfacheren Ableitung bekannter Resultate, theils auch zu ganz neuen Resultaten, z. B. zu gewissen Singularitäten der Congruenz, die zweien gegebenen Complexen gemeinsam ist.

Das nächste Ziel der eigentlichen Charakteristikentheorie dürfte die Aufstellung der Charakteristikenformeln für das Dreieck und das Viereck sein, und im Anschluss daran, die Berücksichtigung der Halphen'schen Ausartungen in den Charakteristikenformeln des Kegelschnitts im Raume und der Fläche zweiter Ordnung.

Den Schluss des Buches bilden ein Literaturverzeichniss, ein Wortregister und ein Autorenregister. Etwaige Lücken im Literaturverzeichniss verzeihe man dem Verfasser, welcher sein Buch in einer Stadt abfasste, deren grosse Bibliotheken für reine Mathematik zur Zeit noch werthlos sind.

Hamburg. H. Schubert.

L. Koenigsberger: Zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826—29. (Teubner, 1879.)

Veranlasst durch das fünfzigjährige Jubiläum, welches in diesem Jahre die *„Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum“* von Jacobi feiern, deren Erscheinen zusammenfiel mit dem Tode Abel's, des andern grossen Schöpfers der Theorie der Transcendenten, habe ich in einer kurzen freien Zeit aus früheren Notizen eine gedrängte Zusammenstellung und Vergleichung der von Abel und Jacobi in den Jahren 1826—29 gemachten Untersuchungen, welche die Theorie der elliptischen Transcendenten betreffen, geliefert, welche eingeleitet ist durch eine Besprechung des Inhaltes des *„Traité des fonctions elliptiques“* von Legendre, und deren Schluss eine kurze Erwähnung

der durch Herrn Schering veröffentlichten, auf die Theorie der elliptischen Functionen bezüglichen Nachlassarbeiten von Gauss bildet. Ich habe mich auf die Jahre 1826—29 beschränkt, weil einerseits in jenem Zeitraume fast alle wichtigeren und umfangreicheren Theile der elliptischen Transcendenten entstanden sind, andererseits der durch die Herren Bertrand und Borchardt veröffentlichte wichtige und überaus interessante Briefwechsel zwischen Legendre und Jacobi eine klare Einsicht in die Folge und den Zusammenhang der Entdeckungen Abel's und Jacobi's gestattet; übrigens liefert das verdienstvolle Werk des Herrn Enneper „*Elliptische Functionen*, Theorie und Geschichte" hinreichendes und gut geordnetes Material zur Orientirung in der weiteren Geschichte der Theorie der Transcendenten.

Wien, im October 1879. L. Koenigsberger.

L. Koenigsberger: Ueber die Reduction Abel'scher Integrale auf niedere Integralformen, speciell auf elliptische Integrale. (Borchardt's Journal für Mathematik.)

Die Arbeit geht von der Untersuchung der allgemeinsten Relation zwischen Abel'schen Integralen aus, welche in der Form

$$F\left\{\varphi_1(f_1), \varphi_2(f_2), \ldots \varphi_k(f_k), J_1, J_2, \ldots J_n, x_1, x_2, \ldots x_n\right\} = 0$$

dargestellt wird, worin $J_1, J_2, \ldots J_n$ beliebige Abel'sche Integrale der resp. Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$,

$$f_1, f_2, \ldots f_k$$

beliebige algebraische Verbindungen dieser Integrale mit den Variabeln,

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots . \varphi_k$$

transcendente Functionen bedeuten, welche durch Integrale algebraischer Differentialgleichungen definirt werden und endlich F eine algebraische Function der in ihr enthaltenen Grössen vorstellt. Nachdem mit Hülfe von Betrachtungen, welche einer Arbeit des Verfassers über den algebraischen Zusammenhang von Integralen verschiedener Differentialgleichungen entnommen sind, die allgemeine Relation auf die lineare

$$a_1 J_1 + a_2 J_2 + \cdots + a_n J_n = u$$

zurückgeführt worden, in welcher u eine algebraische Function der Variabeln bedeutet, wird auf Grund von Umformungen, wie sie

Abel zuerst für elliptische Integrale angegeben, für die in der Form

$$\int^{x_1} F_1(x, y_1)\, dx + \int^{x_2} F_2(x, y_2)\, dx + \cdots + \int^{x_m} F_m(x, y_m)\, dx$$
$$= -\int^{x_{m+1}} F_{m+1}(x, y_{m+1})\, dx - \cdots\cdots - \int^{x_n} F_n(x, y_n)\, dx + u$$

angesetzte Beziehung, in welcher $x_1, x_2, \ldots x_m$ die unabhängigen Variabeln bedeuten, der Satz bewiesen,

dass jeder Art von Abel'schen Integralen, welche auf der rechten Seite dieser Transformationsgleichung vorkommen, ein System von Integralen erster Gattung zugehört, deren Zahl durch die den Integralen zukommende charakteristische Zahl $\varrho_{m+\alpha}$ bestimmt wird, deren Summe gleich einem Integrale erster Gattung ist, welches einem der auf der linken Seite der Transformationsgleichung befindlichen Abel'schen Integrale angehört, und deren Grenzen die Lösungen einer algebraischen Gleichung

$$z^{\varrho_{m+\alpha}} + \varphi_1(x_1, Y_1)\, z^{\varrho_{m+\alpha}-1} + \cdots + \varphi_{\varrho_{m+\alpha}}(x_1, Y_1) = 0$$

sind, während die diesen Grenzen zugehörigen algebraischen Irrationalitäten rational durch die zugehörige Lösung dieser algebraischen Gleichung und x_1, Y_1 ausdrückbar sind.

Handelt es sich somit um die auf elliptische Integrale zurückführbaren Abel'schen Integrale, so wird

jedes elliptische Integral erster Gattung, welches einem der in der Reductionsformel vorkommenden elliptischen Integrale zugehört, gleich sein müssen einem, dem betrachteten Abel'schen Integrale zugehörigen Integrale erster Gattung, oder es wird die Beziehung stattfinden müssen

$$\int^{\zeta} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = \int^{x_1} F(x, y)\, dx,$$

worin ζ eine rationale Function von x_1 und y_1, wenn y_1 den Werth von y für $x = x_1$ bezeichnet, und die zu ζ gehörige Irrationalität

$$y = \sqrt{(1-\zeta^2)(1-c^2\zeta^2)}$$

sich ebenfalls rational durch x_1, y_1 ausdrücken lässt.

Wir betrachten zuerst Abel'sche Integrale erster Gattung von der Form

$$\int^{x_1} Y dx,$$

worin Y um einen Verzweigungspunkt α herum eine Entwicklung von der Form

$$Y = \psi(x)(x-\alpha)^{\frac{r}{m}}$$

besitzt, in der $\psi(x)$ um α herum eindeutig ist, Y also die Lösung einer Gleichung von der Form

$$F_0(x)\,Y^{km} + F_m(x)\,Y^{(k-1)m} + F_{2m}(x)\,Y^{(k-2)m} + \cdots F_{km}(x) = 0$$

ist, und finden,

dass das obige Integral nur dann auf ein elliptisches Integral reducirbar sein kann, wenn $m = 2, 3, 4, 6$ ist, und dann sind in den drei letzten Füllen die elliptischen Reductionsintegrale:

$$\int\frac{dZ}{\sqrt{Z^3-1}},\quad \int\frac{dZ}{\sqrt{Z^4-1}},\quad \int\frac{dZ}{\sqrt{Z^6-1}} = \tfrac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t(t^3-1)}}.$$

Nachdem für diese Fälle durch wiederholte Anwendung des Abel'schen Theorems gezeigt worden, dass man die Form der Transformationen vereinfachen kann, dass also z. B.

in der Reductionsgleichung

$$Y_1 dx_1 = \frac{dZ}{\sqrt{Z^3-1}}$$

stets angenommen werden darf, dass

$$Z = T\,.\,Y_1,\quad \sqrt{Z^3-1} = T_1,$$

worin T und T_1 rationale Functionen von x_1 und Y_1^3 sind,

und ähnliche Sätze für die andern Integralformen, werden für alle vier Fälle auch die hinreichenden Bedingungen für die Reducirbarkeit auf ein elliptisches Integral entwickelt und zwar mit Hülfe der Reihenentwicklungen der algebraischen Functionen.

Die Untersuchung wendet sich dann zu dem allgemeinen Falle, in welchem die Entwicklung von Y_1 um einen Verzweigungspunkt $x_1 = \alpha$ herum die Form hat

$$\text{(a)}\quad Y_1 = \psi_1(x_1)(x_1-\alpha)^{\frac{r_1}{m}} + \psi_2(x_1)(x_1-\alpha)^{\frac{r_2}{m}} + \cdots \psi_\mu(x_1)(x_1-\alpha)^{\frac{r_\mu}{m}},$$

worin die ψ eindeutige Functionen von x_1 sind, und *wir gelangen* mit Hülfe von Sätzen, die Abel in seinem „précis d'une théorie des fonctions elliptiques" bewiesen, zu dem folgenden Resultat:

Ist ein Abel'sches Integral $\int^{x_1} Y dx$ erster Gattung auf ein elliptisches Integral erster Gattung reducirbar, und kommen in der Entwicklung (a) von Y_1 um nur einen seiner Verzweigungspunkte α, der ein m-facher Windungspunkt sein mag und für den m eine Primzahl sein soll, nicht alle gebrochenen Potenzen

$$(x_1-\alpha)^{\frac{1}{m}},\ (x_1-\alpha)^{\frac{2}{m}},\ \ldots\ (x_1-\alpha)^{\frac{m-1}{m}}$$

vor, so ist der Modul des elliptischen Integrales stets ein Modul complexer Multiplication.

Die Annahme nun, dass der Integralmodul ein solcher complexer Multiplication ist, führt unmittelbar zur Vergleichung der sich aus der Integralrelation ergebenden Gleichungen mit den Beziehungen, welche die Kreistheilung für die Einheitswurzeln liefert, und ergiebt das folgende Theorem:

Ist $\int^{x_1} Y dx$ *auf ein elliptisches Integral reducirbar, und hat Y einen m-fachen Windungspunkt, worin m eine Primzahl* $\equiv 3 \pmod{4}$, *in dessen Umgebung Y eine Entwicklung besitzt, in welcher nicht alle Potenzen*

$$(x_1 - \alpha)^{\frac{1}{m}}, (x_1 - \alpha)^{\frac{2}{m}}, \ldots . (x_1 - \alpha)^{\frac{m-1}{m}}$$

vorkommen, so wird einerseits der Modul des elliptischen Reductionsintegrales ein Modul complexer Multiplication sein müssen; andererseits folgt, dass die Entwicklungsform von Y_1

$$Y_1 = \psi_1(x_1)(x_1-\alpha)^{\frac{\varrho_1}{m}} + \psi_2(x_1)(x_1-\alpha)^{\frac{\varrho_2}{m}} + \cdots + \psi_{\frac{m-1}{2}}(x_1 - \alpha)^{\frac{\varrho_{\frac{m-1}{2}}}{m}}$$

sein muss, worin die ϱ *entweder alle* $\frac{m-1}{2}$ *quadratischen Reste oder alle* $\frac{m-1}{2}$ *quadratischen Nichtreste von m bedeuten; zugleich ergiebt sich, dass* $\sqrt{-m}$ *der Multiplicator der complexen Multiplication des elliptischen Integrales sein wird, und dass somit auch der Integralmodul bis auf die durch algebraische Transformation aus diesem herleitbaren bestimmt ist.*

Ist $m \equiv 1 \pmod{4}$, so hat man wieder die Fälle $m \equiv 1$ oder $\equiv 5 \pmod{8}$ zu unterscheiden und gelangt zu ähnlichen Resultaten durch Zusammenstellung mit den Factoren der Kreistheilungsgleichung vom $\frac{m-1}{4}$ten Grade; auf diese Weise lässt sich eine Reihe interessanter Sätze entwickeln, welche die Reduction Abel'scher Integrale auf elliptische in Verbindung bringen mit der Form der Entwicklung der algebraischen Functionen um deren Verzweigungspunkte herum, und diese wiederum mit den Fundamentalsätzen der Kreistheilung, der Zerlegung der Kreistheilungsgleichung in Factoren niederer Grade und der Irreductibilität dieser Theilgleichungen in Bezug auf die rationalen Ausdrücke in den Perioden.

Wien. Leo Koenigsberger.

Inhaltsverzeichniss.

Berichtigung.

S. 83, Z. 11 und 9 v. u. statt „Berührungstransformationen" lies nur: „Transformationen" (d. i. „eingliedrige Transformationsgruppen").








118828